

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE SAMUEL

## **La notion de place dans un anneau**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 85 (1957), p. 123-133

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1957\\_\\_85\\_\\_123\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__123_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## LA NOTION DE PLACE DANS UN ANNEAU;

PAR

P. SAMUEL

(Clermont-Ferrand).

1. **Introduction.** — La théorie des places dans un *corps* commutatif  $K$  repose, on le sait, sur le résultat fondamental suivant : étant donné un sous-anneau  $A$  de  $K$  et une spécialisation  $f$  de  $A$  (c'est-à-dire un homomorphisme de  $A$  dans un corps), il existe dans la famille  $\mathcal{F}$  des spécialisations de sous-anneaux  $B$  de  $K$  prolongeant  $f$ , une spécialisation maximale  $g$ , et le domaine de définition  $B$  de  $g$  est un *anneau de valuation* de  $K$  (c'est-à-dire que les relations  $x \in K$  et  $x \neq 0$  entraînent  $x \in B$  ou  $1/x \in B$ ); une telle spécialisation maximale est appelée une *place* de  $K$ ; réciproquement, si  $B$  est un anneau de valuation de  $K$ ,  $B$  admet un unique idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , et l'homomorphisme canonique de  $B$  sur  $B/\mathfrak{m}$  est une spécialisation maximale. Ces faits, qui constituent ce qu'on appelle souvent le « théorème d'extension des spécialisations », ont été partiellement généralisés par M. N. BOURBAKI au cas des anneaux commutatifs quelconques, dans des travaux inédits dont il a eu l'amabilité de m'entretenir. La méthode de M. N. BOURBAKI consiste à étudier le prolongement de spécialisations à valeurs dans des corps projectifs (cf. [1]). J'essaie ici d'aborder la question par une autre méthode, basée sur les généralisations qu'on peut donner de la notion d'anneau de valuation.

Étant donné un anneau commutatif quelconque  $R$  et un sous-anneau  $A$  de  $R$ , nous aurons à considérer les trois relations suivantes entre  $A$  et  $R$  :

(P<sub>1</sub>) *Il existe un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$  tel que, pour tout anneau  $B$  tel que  $A \subset B \subset R$  et  $A \neq B$  et tout idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $B$ , on ait  $\mathfrak{q} \cap A \neq \mathfrak{p}$ .*

(P<sub>2</sub>) *Le complémentaire  $S = R - A$  de  $A$  dans  $R$  est multiplicativement stable.*

(P<sub>3</sub>) *Pour tout polynôme  $P(X_1, \dots, X_n)$  de la forme*

$$X_1^{q_1} \dots X_n^{q_n} + \sum_k a_k m_k(X)$$

où les  $m_i(X)$  sont des monomes dont le multidegré est  $< (q(1), \dots, q(n))$  (pour la relation d'ordre produit dans  $Z^n$ ) et où  $a_i \in A$ , et pour tout système  $(s_1, \dots, s_n)$  de  $n$  éléments de  $S = R - A$ , on a  $P(s_1, \dots, s_n) \neq 0$ .

Nous dirons qu'un sous-anneau  $A$  d'un anneau (commutatif)  $R$  est de type  $(P_i)$  (dans  $R$ ) si la relation  $(P_i)$  est vérifiée. Un polynôme  $P$  ayant la propriété décrite dans  $(P_3)$  sera appelé un polynôme *dominé* à coefficients dans  $A$ ; les polynômes dominés à une variable ne sont autres que les polynômes unitaires. La relation  $(P_1)$  exprime que  $A$  est le domaine de définition d'une spécialisation maximale, parmi les spécialisations définies sur des sous-anneaux de  $R$ .

Nous verrons que, dans le cas où  $R$  est un corps, les propriétés  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  sont équivalentes, et expriment que  $A$  est un anneau de valuation de  $R$ . Dans le cas d'un anneau commutatif quelconque  $R$ , nous verrons que  $(P_1)$  implique  $(P_2)$  et  $(P_3)$ , que  $(P_3)$  implique  $(P_2)$ , mais qu'aucune autre implication n'est valable en général. Nous étudierons aussi ce que deviennent les propriétés  $(P_i)$  lorsqu'on remplace  $R$  par un sous-anneau, ou par un anneau contenant  $R$ . Nous montrerons enfin que la fermeture intégrale dans  $R$  d'un sous-anneau  $C$  de  $R$  est l'intersection des sous-anneaux de type  $(P_2)$  [resp.  $(P_3)$ ] de  $R$  contenant  $C$ , mais que l'intersection des sous-anneaux de type  $(P_1)$  de  $R$  contenant  $C$  est en général strictement plus grande que la fermeture intégrale de  $C$ . De tout ceci il résulte que la notion d'anneau de type  $(P_3)$ , malgré son apparente complication, est celle qui généralise le mieux la notion de sous-anneau de valuation d'un corps. Les anneaux de type  $(P_2)$  interviennent surtout comme intermédiaires dans les démonstrations.

## 2. Propriétés des anneaux de type $(P_2)$ :

**THÉOREME 1.** — Soient  $R$  un anneau commutatif,  $A$  un sous-anneau de  $R$  tel que  $S = R - A$  soit non vide et multiplicativement stable. Alors :

- L'ensemble des éléments  $a$  de  $A$  pour lesquels il existe  $s \in S$  tel que  $sa \in A$  est un idéal premier  $\mathfrak{p}_1$  de  $A$ .
- L'ensemble des éléments  $a$  de  $A$  tels que  $sa \in A$  pour tout  $s \in S$  est un idéal premier  $\mathfrak{p}_0$  de  $A$ ; on a  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_0$  est un idéal premier de  $R$ .
- L'ensemble  $\mathfrak{n}$  des éléments  $x$  de  $R$  pour lesquels il existe  $s \in S$  tel que  $sx = 0$  est à la fois un idéal de  $R$  et un idéal de  $A$ , et l'on a  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}_1$ .
- L'anneau  $A$  est intégralement fermé dans  $R$ .

Démontrons *a*. Si  $a$  et  $a'$  sont deux éléments de  $A$  pour lesquels il existe  $s$  et  $s'$  dans  $S$  tels que  $sa \in A$  et  $s'a' \in A$ , on ne peut avoir à la fois  $sa' \in S$  et  $s'a \in S$  car, sinon, on aurait  $sas'a' = sa's'a \in S$  puisque  $S$  est multiplicativement stable, en contradiction avec  $sas'a' \in A$ ; on a donc, par exemple,  $sa' \in A$ , d'où  $s(a + a') \in A$ , ce qui montre que  $a \in \mathfrak{p}_1$  et  $a' \in \mathfrak{p}_1$  impliquent  $a + a' \in \mathfrak{p}_1$ . D'autre part,  $a \in \mathfrak{p}_1$  et  $b \in A$  entraînent évidemment  $ba \in \mathfrak{p}_1$ ;

donc  $\mathfrak{p}_1$  est un idéal de  $A$ . Pour montrer qu'il est premier, considérons deux éléments  $a, b$  de  $A$  tels que  $ab \in \mathfrak{p}_1$ ; il existe alors  $s \in S$  tel que  $sab \in A$ ; si  $a \notin \mathfrak{p}_1$ , on a  $sa \notin A$ , c'est-à-dire  $sa = s' \in S$ , d'où  $b \in \mathfrak{p}_1$ , puisque  $s'b = sab \in A$ .

Le fait que  $\mathfrak{p}_0$  est un idéal de  $A$  est évident, et l'inclusion  $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1$  résulte de ce que  $S$  est non vide. Si  $a \in \mathfrak{p}_0$  et si  $s \in S$ , on a  $as \in A$  et  $ass' \in A$  pour tout  $s' \in S$  puisque  $ss' \in S$ ; donc  $as \in \mathfrak{p}_0$  et  $\mathfrak{p}_0$  est un idéal de  $R$ . Pour montrer que  $\mathfrak{p}_0$  est premier dans  $A$ , considérons deux éléments  $a, b$  de  $A$  tels que  $ab \in \mathfrak{p}_0$  et que  $a \notin \mathfrak{p}_0$ ; il existe alors  $s \in S$  tel que  $sa \notin A$ ; on a  $sas'b = ss'ab \in A$  pour tout  $s' \in S$ , d'où  $s'b \in A$  puisque  $sa \in S$  et que  $S$  est multiplicativement stable; par conséquent  $b \in \mathfrak{p}_0$ . Enfin, pour montrer que  $\mathfrak{p}_0$  est un idéal premier de  $R$ , remarquons qu'une relation  $xy \in \mathfrak{p}_0$  ( $x, y \in R$ ) implique que  $x$  ou  $y$  est dans  $A$  puisque  $S$  est multiplicativement stable; on peut ainsi se borner aux relations  $as \in \mathfrak{p}_0$  où  $a \in A$  et  $s \in S$ ; on a alors  $ass' \in A$  pour tout  $s' \in S$ , d'où  $as' \in A$  puisque  $S$  est multiplicativement stable, et par suite  $a \in \mathfrak{p}_0$ . Ceci démontre  $b$ .

Dans  $c$  le fait que  $\mathfrak{n}$  est un idéal de  $R$  est classique et immédiat, en tenant compte du fait que  $S$  est multiplicativement stable. Il reste à montrer qu'on a  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}_1$ ; or, pour  $x \in \mathfrak{n}$ , il existe  $s \in S$  tel que  $sx = 0$ , donc  $sx \in A$ ; ceci implique  $x \in A$  puisque  $S$  est multiplicativement stable, et  $x \in \mathfrak{p}_1$ , d'après la définition de  $\mathfrak{p}_1$ .

Montrons, pour terminer, qu'aucun élément  $s$  de  $S$  n'est entier sur  $A$ . Raisonnons par l'absurde et considérons une équation de dépendance intégrale  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$  ( $a_i \in A$ ,  $s \in S$ ) de plus petit degré possible vérifiée par  $s$  sur  $A$ . On a

$$s(s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1) = -a_0 \in A,$$

d'où  $s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1 \in A$  puisque  $S$  est multiplicativement stable; ceci contredit le caractère minimal de  $n$  si l'on a  $n \geq 2$ . Si  $n = 1$ , l'équation s'écrit  $s + a_0 = 0$ , d'où  $s \in A$ , ce qui est encore contradictoire.

C. Q. F. D.

REMARQUES. — 1° L'idéal  $\mathfrak{p}_0$  est évidemment le conducteur de  $A$  dans  $R$ .

2° D'après  $c$  tout élément nilpotent de  $R$  est dans  $\mathfrak{p}_0$ .

EXEMPLE. — Soient  $k$  un corps et  $R = k[x, y]$ , où  $x$  et  $y$  sont liés par la relation  $xy = 0$ . Tout élément de  $R$  s'écrit, d'une façon et d'une seule, sous la forme  $a + xP(x) + yQ(y)$ , où  $a \in k$  et où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à une variable sur  $k$ . Le sous-anneau de polynômes  $A = k[x]$  est de type  $(P_2)$ . Les idéaux  $\mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{p}_1$  et  $\mathfrak{p}_0$  sont tous trois égaux à l'idéal maximal  $Ax$ .

THÉOREME 2. — Soit  $R$  un corps. Les sous-anneaux de type  $(P_2)$  de  $R$  ne sont autres que les anneaux de valuation de  $R$ .

Si  $A$  est de type  $(P_2)$ , et si  $x$  est un élément non nul de  $R$ , on a

$$x(1/x) = 1 \in A,$$

d'où  $x \in A$  ou  $1/x \in A$  puisque  $R - A$  est multiplicativement stable. Réciproquement, si  $xy \in A$  et si  $x \notin A$ , on a  $1/x \in A$ , d'où  $y = (xy)(1/x) \in A$ , ce qui montre que  $R - A$  est multiplicativement stable.

### 3. Implications toujours valables entre $(P_1)$ , $(P_2)$ et $(P_3)$ :

**THÉORÈME 3.** — *La relation  $(P_3)$  implique  $(P_2)$ .*

Soient en effet  $s$  et  $s'$  deux éléments de  $R - A$  tels que  $ss' = a \in A$ . On obtient une contradiction en appliquant  $(P_3)$  au polynôme dominé  $XX' - a$ .

c. q. f. d.

Nous allons maintenant démontrer que  $(P_1)$  implique  $(P_2)$ , puis que  $(P_1)$  implique aussi la propriété plus forte  $(P_3)$ . En vue de la démonstration du fait que  $(P_1)$  implique  $(P_2)$ , rappelons le lemme suivant, dû à COHEN et SEIDENBERG [(2)] :

**LEMME 1.** — *Soient  $B$  un anneau commutatif,  $A$  un sous-anneau de  $B$  et  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$ . Pour qu'il existe un idéal premier  $\mathfrak{P}$  de  $B$  tel que  $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ , il faut et il suffit qu'on ait  $B\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{p}$ .*

La nécessité est facile car on a  $\mathfrak{p} \subset B\mathfrak{p} \cap A \subset \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ . Réciproquement remarquons que l'ensemble des idéaux  $\mathfrak{Q}$  de  $B$  tels que  $\mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{p}$  est non vide, et est inductif si on l'ordonne par inclusion; soit  $\mathfrak{M}$  un élément maximal de cet ensemble. Montrons que  $\mathfrak{M}$  est premier. En effet, si  $x$  et  $x'$  sont des éléments de  $B - \mathfrak{M}$ , on a  $(\mathfrak{M} + Bx) \cap A \neq \mathfrak{p}$  et  $(\mathfrak{M} + Bx') \cap A \neq \mathfrak{p}$ , et il existe donc des éléments  $a, a'$  de  $A - \mathfrak{p}$  tels qu'on ait  $a = m + bx$  et  $a' = m' + b'x'$  avec  $m, m' \in \mathfrak{M}$  et  $b, b' \in B$ . Si l'on avait, de plus,  $xx' \in \mathfrak{M}$ , on en déduirait  $aa' \in \mathfrak{M}$ , d'où  $aa' \in \mathfrak{M} \cap A = \mathfrak{p}$ , en contradiction avec le fait que  $\mathfrak{p}$  est premier; on a donc  $xx' \in \mathfrak{M}$ , et  $\mathfrak{M}$  est premier.

Ceci étant, étant donnés un anneau (commutatif)  $R$ , un sous-anneau  $A$  de  $R$  et un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , nous dirons que le couple  $(A, \mathfrak{p})$  est *maximal* dans  $R$  si, pour tout anneau  $A'$  tel que  $A \subset A' \subset R$  et  $A' \neq A$ , il n'existe aucun idéal premier  $\mathfrak{p}'$  de  $A'$  tel que  $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ . Pour que  $A$  soit de type  $(P_1)$  dans  $R$ , il faut et il suffit qu'il existe un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$  tel que  $(A, \mathfrak{p})$  soit maximal. D'après le lemme, pour que  $(A, \mathfrak{p})$  soit maximal, il faut et il suffit qu'on ait  $B\mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{p}$  pour tout anneau  $B$  tel que  $A \subset B \subset R$  et  $B \neq A$ , ou encore qu'on ait  $A[s]\mathfrak{p} \cap A \neq \mathfrak{p}$  pour tout  $s \in R - A$ .

**THÉORÈME 4.** — *Si le couple  $(A, \mathfrak{p})$  est maximal dans  $R$ ,  $R - A$  est multiplicativement stable; autrement dit  $(P_1)$  implique  $(P_2)$  et l'idéal  $\mathfrak{p}$  contient l'idéal  $\mathfrak{p}_1$  défini dans le théorème 1 (a).*

Nous allons utiliser la méthode classique de démonstration, due à C. CHEVALLEY, et permettant « d'éliminer l'élimination ». Supposons qu'il existe deux éléments  $s, s'$  de  $R - A$  tels que  $ss' = a \in A$ . Par hypothèse il existe des éléments  $b, b'$  de  $A - \mathfrak{p}$  tels que  $b \in A[s]\mathfrak{p} \cap A$  et  $b' \in A[s']\mathfrak{p} \cap A$ .

On a alors, pour  $b$  par exemple, une relation de la forme

$$b = p_0 + p_1s + \dots + p_ns^n \quad \text{où } p_i \in \mathfrak{p};$$

en remplaçant  $b$  par  $b - p_0$  on peut supposer qu'on a  $p_0 = 0$ ; parmi les éléments  $b$  de  $A - \mathfrak{p}$  exprimables sous la forme

$$b = p_1s + \dots + p_{n-1}s^{n-1} + p_ns^n \quad (p_i \in \mathfrak{p})$$

nous en choisisons un, tel que  $n$  soit le plus petit possible. De même choisisons  $b'$  dans  $A - \mathfrak{p}$  de sorte que, dans la relation

$$b' = p'_1s' + \dots + p'_qs'^q \quad (\text{où } p'_j \in \mathfrak{p}),$$

le degré  $q$  soit le plus petit possible. Supposons, par exemple, qu'on ait  $n \geq q$ . En multipliant la seconde relation par  $p_ns^n$  et en tenant compte de  $ss' = a$ , on obtient

$$p_ns^n b' = p_np'_1 a s^{n-1} + \dots + p_np'_q a^q s^{n-q},$$

d'où en reportant dans la première relation

$$bb' = b'p_1s + \dots + b'p_{n-1}s^{n-1} + p_np'_1 a s^{n-1} + \dots + p_np'_q a^q s^{n-q}.$$

Ceci contredit le caractère minimal de  $n$ , puisque  $bb' \in A - \mathfrak{p}$ . Donc  $R - A$  est multiplicativement stable.

Pour démontrer l'inclusion  $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$ , considérons un élément  $a$  de  $\mathfrak{p}_1$  (cf. th. 1, a); il existe  $s$  dans  $R - A$  tel que  $sa \in A$ . Comme on a  $A[s] \cap A \neq \mathfrak{p}$ , il existe, comme ci-dessus, un élément  $b$  de  $A - \mathfrak{p}$  tel que  $b = p_1s + \dots + p_ns^n$  avec  $p_i \in \mathfrak{p}$ . En multipliant par  $a^n$ , on voit que  $ba^n \in \mathfrak{p}$ , d'où  $a \in \mathfrak{p}$  puisque  $\mathfrak{p}$  est premier et que  $b \in A - \mathfrak{p}$ . c. Q. F. D.

Avant de montrer que  $(P_1)$  implique  $(P_3)$  démontrons un lemme qui nous sera utile.

**LEMME 2.** — *Étant donné un anneau commutatif  $R$ , un sous-anneau  $C$  de  $R$  et un idéal premier  $\mathfrak{q}$  de  $R$ , il existe un couple  $(A, \mathfrak{p})$  maximal dans  $R$  tel que  $C \subset A$  et que  $\mathfrak{q} = C \cap \mathfrak{p}$ .*

La démonstration est classique : on considère l'ensemble des couples  $(A', \mathfrak{p}')$  formés d'un anneau  $A'$  tel que  $C \subset A' \subset R$  et d'un idéal premier  $\mathfrak{p}'$  de  $A'$  tel que  $\mathfrak{p}' \cap C = \mathfrak{q}$ . Cet ensemble est inductif pour la relation d'ordre évidente  $A' \subset A''$  et  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'' \cap A'$ . Il admet donc un élément maximal  $(A, \mathfrak{p})$ .

**THÉORÈME 5.** — *La relation  $(P_1)$  implique  $(P_3)$ .*

Considérons un couple  $(A, \mathfrak{p})$  maximal dans  $R$ , et posons  $S = R - A$ ; nous savons déjà que  $S$  est multiplicativement stable (th. 4). Soit  $\mathfrak{n}$  l'idéal formé par les éléments  $x$  de  $R$  pour lesquels il existe  $s$  dans  $S$  tel que  $sx = 0$  (th. 1, c); on a  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$  (th. 4). L'anneau  $A' = A/\mathfrak{n}$  est un sous-anneau de

$R' = R'/\mathfrak{n}$ , qui est lui-même un sous-anneau de l'anneau de fractions  $T' = R_s$  ([3], chap. I). Notons  $\mathfrak{p}'$  l'idéal premier  $\mathfrak{p}'/\mathfrak{n}$  de  $A'$ ; il existe un couple maximal  $(B', \mathfrak{q}')$  dans  $T'$  tel que  $A' \subset B'$  et  $A' \cap \mathfrak{q}' = \mathfrak{p}'$  (lemme 2). Montrons que, pour tout  $s \in S$ , la classe  $s'$  de  $s$  mod  $\mathfrak{n}$  n'appartient pas à  $B'$ ; en effet, dans le cas contraire, l'idéal premier  $\mathfrak{q}'_1 = \mathfrak{q}' \cap A'[s']$  vérifierait  $\mathfrak{q}'_1 \cap A' = \mathfrak{p}'$ ; or l'image réciproque de  $A'[s']$  par l'application canonique  $R \rightarrow R/\mathfrak{n}$  est  $A[s]$  car  $\mathfrak{n} \subset A[s]$ , et l'image réciproque  $\mathfrak{q}_1$  de  $\mathfrak{q}'_1$  par cette application est un idéal premier de  $A[s]$ ; on a  $\mathfrak{q}_1 \cap A = \mathfrak{p}$  car  $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}_1 \cap A$  est évident et, si  $x \in \mathfrak{q}_1 \cap A$ ,  $x$  est congru mod  $\mathfrak{n}$  à un élément  $y$  de  $\mathfrak{p}$  (puisque  $\mathfrak{q}'_1 \cap A' = \mathfrak{p}'$ ), d'où  $x \in \mathfrak{p}$  puisque  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{p}$ . Comme  $T' - B'$  est multiplicativement stable (th. 4), la relation  $s's^{-1} = 1$  montre qu'on a  $s^{-1} \in B'$ , et  $s^{-1} \in \mathfrak{q}'$  (th. 4). Alors, si

$$P(X_1, \dots, X_r) = X_1^{n_1} \dots X_r^{n_r} + \sum_{\lambda} a_{\lambda} m_{\lambda}(X) \quad a_{\lambda} \in (A)$$

est un polynôme dominé sur  $A$ , une relation de la forme  $P(s_1, \dots, s_r) = 0$  avec  $s_i \in S$  pour  $i = 1, \dots, r$  donnerait, par réduction mod  $\mathfrak{n}$  et division par  $s_1^{n_1} \dots s_r^{n_r}$  ( $s'_i$  classe de  $s_i$  mod  $\mathfrak{n}$ ), la relation  $1 \in \mathfrak{q}'$ , ce qui est absurde. Donc  $A$  est de type  $(P_3)$  dans  $R$ . C. Q. F. D.

#### 4. Modifications de l'anneau $R$ :

**THÉORÈME 6.** — Soient  $R$  un anneau commutatif et  $A$  un sous-anneau de type  $(P_2)$  [resp.  $(P_3)$ ] de  $R$ . Si  $R'$  est un sous-anneau de  $R$ ,  $R' \cap A$  est de type  $(P_2)$  [resp.  $(P_3)$ ] dans  $R'$ .

Vérification immédiate.

**THÉORÈME 7.** — Soient  $R$  un anneau commutatif et  $A$  un sous-anneau de type  $(P_1)$  [resp.  $(P_3)$ ] de  $R$ . Si  $R'$  est un anneau commutatif contenant  $R$ , il existe un sous-anneau  $A'$  de type  $(P_1)$  [resp.  $(P_3)$ ] de  $R'$  tel que  $A' \cap R = A$ .

Pour  $(P_1)$ , soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $A$  tel que  $(A, \mathfrak{p})$  soit maximal dans  $R$ . D'après le lemme 2, il existe un couple  $(A', \mathfrak{p}')$  maximal dans  $R'$  tel que  $A \subset A'$  et que  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ . Pour montrer qu'on a  $A' \cap R = A$ , il suffit de montrer que tout élément  $x$  de  $A' \cap R$  est dans  $A$ ; or l'idéal premier  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{p}' \cap A[x]$  de  $A[x]$  vérifie  $\mathfrak{q}' \cap A = \mathfrak{p}$ , ce qui montre que  $A[x] = A$  puisque le couple  $(A, \mathfrak{p})$  est maximal dans  $R$ .

Si  $A$  est de type  $(P_3)$  dans  $R$ , l'ensemble  $S = R - A$  est multiplicativement stable (th. 3). Considérons l'anneau de fractions  $R'_S$  et l'homomorphisme canonique  $h$  de  $R'$  dans  $R'_S$ ; les restrictions de  $h$  à  $A$  et  $R$  ont même noyau  $\mathfrak{n} \subset A$  (th. 1, c). L'ensemble  $B$  des éléments de  $R'_S$  de la forme  $h(a) + \sum h(a_i)h(s_i)^{-1}(a, a_i \in A, s_i \in S)$  est évidemment un sous-anneau de  $R'_S$  (contenu d'ailleurs dans  $R'_S$ ) et l'ensemble  $\mathfrak{b}$  des éléments de la forme

$\sum_i h(a_i)h(s_i)^{-1} (a_i \in A, s_i \in S)$  est évidemment un idéal  $\mathfrak{b}$  de  $B$ . On a  $\mathfrak{b} \neq B$

car, sinon, une relation  $\sum_{i=1}^n h(a_i)h(s_i)^{-1} = 1$  donnerait

$$h\left(s_1 \dots s_n - \sum_{i=1}^n a_i s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_n\right) = 0,$$

d'où

$$s_1 \dots s_n - \sum_{i=1}^n a_i s_1 \dots s_{i-1} s_{i+1} \dots s_n = u \in \mathfrak{u} \subset A,$$

ce qui est contraire à  $(P_3)$ . Donc  $\mathfrak{b}$  est contenu dans un idéal premier  $\mathfrak{m}$  de  $B$ , par exemple un idéal maximal. D'après le lemme 2, il existe un couple  $(A'', \mathfrak{p}'')$  maximal dans  $R'_S$  tel que  $B \subset A''$  et  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}''$ . Posons  $A' = h^{-1}(A'')$  et  $\mathfrak{p}' = h^{-1}(\mathfrak{p}'')$ ; il est clair que  $\mathfrak{p}'$  est un idéal premier de  $A'$ ; comme  $A''$  est de type  $(P_3)$  dans  $R'_S$  (th. 5), on voit aussitôt que  $A'$  est de type  $(P_3)$  dans  $R'$ . Il reste à montrer que  $A' \cap R = A$ ; or, si  $A'$  contient un élément  $s$  de  $S$ , on a  $h(s) \in A''$  et  $h(s)^{-1} \in \mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}''$ , d'où  $1 = h(s)h(s)^{-1} \in \mathfrak{p}''$  ce qui est contraire au fait que  $\mathfrak{p}''$  est un idéal premier.

C. Q. F. D.

3. La fermeture intégrale d'un sous-anneau :

**THÉORÈME 8.** — Soient  $R$  un anneau commutatif et  $C$  un sous-anneau de  $R$ . La fermeture intégrale de  $C$  dans  $R$  est l'intersection des sous-anneaux de type  $(P_2)$ , et aussi celle des sous-anneaux de type  $(P_3)$ , de  $R$  contenant  $C$ .

Comme tout sous-anneau de type  $(P_2)$  de  $R$ , et *a fortiori* tout sous-anneau de type  $(P_3)$  (th. 3), est intégralement fermé dans  $R$  (th. 1, d), il suffit de montrer que, pour tout élément  $x$  de  $R$  qui n'est pas entier sur  $C$ , il existe un sous-anneau  $A$  de type  $(P_3)$  de  $R$ , contenant  $C$  et tel que  $x$  ne soit pas entier sur  $A$ . Pour cela nous remarquons que l'ensemble des sous-anneaux de  $R$  contenant  $A$  et sur lesquels  $x$  n'est pas entier est un ensemble ordonné inductif; soit  $A$  un élément maximal de cet ensemble. Nous allons montrer que  $A$  est de type  $(P_2)$ , puis qu'il est de type  $(P_3)$ .

Pour montrer que  $A$  est de type  $(P_2)$ , considérons deux éléments  $s, t$  de  $R - A$ , et supposons qu'on ait  $st = u \in A$ . D'après le caractère maximal de  $A$ ,  $x$  est entier sur  $A[s]$  et sur  $A[t]$ ; on a donc des relations de dépendance intégrale de la forme  $f(s, x) = 0$  et  $g(t, x) = 0$ , où  $f$  et  $g$  sont des polynômes à deux variables sur  $A$ , unitaires en  $x$ . Choisissons-les de telle sorte que leurs degrés  $d$  et  $e$  par rapport à  $s$  et  $t$  soient les plus petits possibles. Les relations  $f(s, x) = 0$  et  $g(t, x) = 0$  peuvent s'écrire, en les



ordonnant par rapport à  $s$  et à  $t$ ,

$$u(x) = u_1(x)s + \dots + u_d(x)s^d, \quad v(x) = v_1(x)t + \dots + v_e(x)t^e,$$

où  $u$  et  $v$  sont des polynômes unitaires en  $x$ , et où

$$d^0(u_i) < d^0(u), \quad d^0(v_j) < d^0(v).$$

Supposons, par exemple,  $d \geq e$ . En multipliant la seconde relation par  $s^e$  et en tenant compte de  $st = a$ , on obtient

$$s^d v(x) = av_1(x)s^{d-1} + \dots + a^e v_e(x)t^e.$$

En reportant dans la première préalablement multipliée par  $v(x)$  on trouve

$$\begin{aligned} u(x)v(x) &= u_1(x)v(x)s + \dots + u_{d-1}(x)v(x)s^{d-1} \\ &\quad + au_d(x)v_1(x)s^{d-1} + \dots + a^e u_d(x)v_e(x)s^{d-e}. \end{aligned}$$

Le premier membre est un polynôme unitaire de degré  $d^0(u) + d^0(v)$ ; les coefficients des puissances de  $s$  dans le second membre sont tous des polynômes de degrés  $< d^0(u) + d^0(v)$ ; cette relation est donc une relation  $h(s, x) = 0$  de dépendance intégrale pour  $x$  sur  $A[s]$ , dont le degré par rapport à  $s$  est  $\leq d - 1$ . Ceci contredit le caractère minimal de  $d$ . Donc l'hypothèse  $st = a \in A$  est intenable, et  $R - A$  est multiplicativement stable.

Pour montrer que  $A$  est de type  $(P_2)$  dans  $R$  considérons, comme dans le théorème 3, l'idéal  $\mathfrak{n}$  formé des éléments  $y$  de  $R$  pour lesquels il existe  $s$  dans  $S$  tel que  $sy = 0$ , ainsi que les anneaux  $A' = A/\mathfrak{n} \subset R' = R/\mathfrak{n} \subset T' = R_S$ . Soit  $h$  l'homomorphisme canonique de  $R$  sur  $R'$ . L'élément  $h(x)$  n'est pas entier sur  $A'$ , sinon l'on aurait une relation de la forme

$$h(x)^n + h(a_{n-1})h(x)^{n-1} + \dots + h(a_0) = 0 \quad (a_i \in A),$$

d'où  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathfrak{n}$ , et  $x$  serait entier sur  $A$  puisque  $\mathfrak{n} \subset A$ . Comme dans la première partie de la démonstration il existe alors, parmi les sous-anneaux de  $T'$  contenant  $A$  et sur qui  $h(x)$  n'est pas entier, un sous-anneau maximal  $B'$ ; d'après la première partie  $B'$  est de type  $(P_2)$  dans  $R'$ . Pour tout  $s \in R - A$ , on a  $h(s) \notin B'$ , car sinon, comme  $x$  est entier sur  $A[s]$  d'après le caractère maximal de  $A$ ,  $h(x)$  serait entier sur  $A'[h(s)]$  donc sur  $B'$ . Donc la relation  $h(s)h(s)^{-1} = 1 \in B'$  implique  $h(s)^{-1} \in B'$  et aussi  $h(s)^{-1} \in \mathfrak{p}'_1$ ,  $\mathfrak{p}'_1$  désignant l'idéal premier formé des éléments  $y'$  de  $B'$  pour lesquels il existe  $z' \in T' - B'$  tel que  $y'z' \in B'$  (cf. th. 1, a; remarquons que  $\mathfrak{p}'_1 \neq B'$ ). Alors si  $P(X_1, \dots, X_r)$  est un polynôme dominé sur  $A$  dont le terme dominant est  $X_1^{n_1} \dots X_r^{n_r}$ , une relation de la forme  $P(s_1, \dots, s_r) = 0$  avec  $s_i \in R - A$ , donnerait, par réduction mod  $\mathfrak{n}$  et division par

$$h(s_1)^{n_1} \dots h(s_r)^{n_r},$$

la relation  $1 \in \mathfrak{p}'_1$ , ce qui est absurde. Donc  $A$  est de type  $(P_2)$  dans  $R$ .

C. Q. F. D.

## 6. Quelques contre-exemples :

1°  $Ni (P_2)$ ,  $ni (P_3)$  n'impliquent  $(P_1)$ .

Prenons en effet pour  $A$  un corps  $K$  et pour  $R$  l'anneau de polynomes  $K[X]$ . Comme  $A$  est l'intersection de  $R$  avec l'anneau de la valuation à l'infini de  $K(X)$ ,  $A$  est de types  $(P_2)$  et  $(P_3)$  dans  $R$  (th. 6). Cependant le seul idéal premier de  $A$ , qui est  $(O)$ , est l'intersection de  $A$  et de l'idéal  $(X)$  [ou  $(O)$ ] de  $R$ ; ainsi  $A$  n'est pas de type  $(P_1)$  dans  $R$ . Cet exemple montre aussi que :

2° Le théorème 6 ne s'étend pas aux anneaux de type  $(P_1)$ .

3° Anneau de type  $(P_2)$  où l'idéal  $\mathfrak{p}_1$  (th. 1, a) n'est pas maximal.

On prend  $R = K[X, Y, 1/X]$  ( $K$  : corps) et  $A = K[X, Y]$ . Le couple  $(A, AX)$  est maximal dans  $R$  : en effet tout élément de  $R - A$  est de la forme  $P(X, Y)/X^n$  où  $n > 1$  et où  $P(X, Y)$  est un polynôme non multiple de  $X$ ; si l'on pose  $B = A[P(X, Y)/X^n]$ , on a

$$P(X, Y) \in BX \quad \text{d'où} \quad BX \cap A \neq AX.$$

Or l'idéal  $AX$  est premier non maximal. On sait que  $\mathfrak{p}_1 \subset AX$  (th. 4), et l'on voit d'ailleurs aisément que  $\mathfrak{p}_1 = AX$  dans ce cas. Notons qu'ici  $A$  est même de type  $(P_1)$  [donc  $(P_3)$ ] dans  $R$ .

4° La fermeture intégrale d'un sous-anneau  $C$  de  $R$  n'est pas l'intersection des sous-anneaux de type  $(P_1)$  de  $R$  contenant  $C$ .

On prend  $C = K$  (un corps) et  $R = K[X]$ . Un sous-anneau  $B$  de  $R$  contenant  $K$  et distinct de  $K$  contient un polynôme unitaire non constant  $P(X)$ , donc  $R$  est entier sur  $B$ ; ainsi  $B$  ne peut être de type  $(P_2)$  dans  $R$  (th. 1, d), ni *a fortiori* de type  $(P_1)$  sauf si  $B = R$ . On a vu que  $K$  n'est pas de type  $(P_1)$  dans  $R$ . Donc le seul sous-anneau de type  $(P_1)$  de  $R$  contenant  $K = C$  est  $R$  lui-même.

5° La relation  $(P_2)$  n'implique pas  $(P_3)$ .

On prend pour  $A$  un corps, et pour  $R$  l'anneau  $R = A[x, y, z]$ , où  $x, y, z$  sont liés par la relation  $xyz + x + y + z = 0$  (anneau de coordonnées affines d'une surface cubique irréductible). Comme  $XYZ + X + Y + Z$  est un polynôme dominé,  $A$  n'est pas de type  $(P_3)$  dans  $R$ . Montrons qu'il est cependant de type  $(P_2)$ , c'est-à-dire, puisque  $A$  est un corps, que les seuls éléments inversibles de  $R$  sont ceux de  $A^*$ . Si  $P(x, y, z)$  est un élément inversible de  $R$ , il induit un élément inversible dans l'anneau de coordonnées de la section de la surface cubique par  $z = h$  ( $h$  transcendant sur  $A$ ), c'est-à-dire de l'hyperbole  $[Z = h, (Xh + 1)(Yh + 1) = 1 - h^2]$ . Or, en posant  $K = A(h)$  et  $T = Xh + 1$ , cet anneau de coordonnées est  $K[T, 1/T]$ .

et, comme on le voit aussitôt, ses éléments inversibles sont ceux de la forme  $aT^n$  ( $a \in K^*$ ,  $n$  entier rationnel). On a donc

$$P(x, y, z) = (xz + 1)^n f(z)/g(z),$$

où  $f$  et  $g$  sont des polynômes à une variable sur  $A$ . En s'induisant sur la droite ( $X = 0$ ,  $Y + Z = 0$ ), on voit que  $f(z)/g(z)$  doit être inversible dans l'anneau de coordonnées de cette droite, et est donc une constante. On peut ainsi supposer que  $P(x, y, z) = (xz + 1)^n$ . Or, cette fonction rationnelle sur la surface cubique a des pôles à distance finie si  $n < 0$ , ou des zéros à distance finie si  $n > 0$ , à savoir sur la droite ( $Z = 1$ ,  $X = -1$ ); donc, si  $n \neq 0$ , cette fonction rationnelle ne peut être un élément inversible de l'anneau de coordonnées affines  $R = A[x, y, z]$ . Par conséquent  $P(x, y, z) = 1$ .

**REMARQUE.** — L'exemple précédent amène à étudier en général les éléments inversibles d'un anneau d'intégrité de la forme  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  où  $K$  est un corps (on dit que  $R$  est une algèbre affine, ou un anneau d'intégrité de type fini). On a le résultat suivant, analogue, en bien plus facile, au classique théorème des unités de Dirichlet :

**THÉORÈME 9.** — Soit  $R = K[x_1, \dots, x_n]$  une algèbre affine sur un corps algébriquement clos  $K$ , et  $U$  le groupe multiplicatif des éléments inversibles de  $R$ ; alors  $U/K^*$  est un groupe abélien libre de type fini.

Soit  $R'$  la clôture intégrale de  $R$ ; c'est une algèbre affine d'après le théorème de normalisation; comme le groupe multiplicatif  $U'$  des éléments inversibles de  $R'$  contient  $U$ , il suffit de démontrer le théorème 9 pour  $R'$ ; on peut donc supposer  $R$  intégralement clos. Par normalisation de la variété projective lieu de  $(1, x_1, \dots, x_n)$  sur  $K$ , on peut considérer  $R$  comme l'anneau de coordonnées affines sur une variété normale projective  $V$ . Alors, pour qu'un élément  $u$  de  $R$  soit inversible, il faut et il suffit que son diviseur  $(u)$  ait toutes ses composantes à l'infini sur  $V$ . Donc, si l'on note  $\mathfrak{H}$  le groupe additif des diviseurs à l'infini sur  $V$  et  $\mathfrak{G}$  le groupe des diviseurs linéairement équivalents à 0 sur  $V$ ,  $U/K^*$  est évidemment isomorphe à  $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}$ , et est un groupe abélien libre de type fini puisqu'il en est ainsi de  $\mathfrak{H}$ .

Dans le théorème 9 on peut éviter de supposer  $K$  algébriquement clos, à condition de remplacer  $U/K^*$  par  $U/K'^*$ , où  $K'$  est le corps formé par les éléments de  $R$  qui sont algébriques sur  $K$ .

**7. Conclusions.** — Dans le cas où  $R$  est un corps (commutatif) les notions de sous-anneaux de type  $(P_1)$ ,  $(P_2)$  et  $(P_3)$  de  $R$  coïncident avec la notion de sous-anneau de valuation de  $R$ . Nous l'avons en effet vu pour  $(P_2)$  (th. 2). En vertu des théorèmes 3, 4 et 5, il suffit alors de montrer que tout sous-anneau de valuation  $A$  du corps  $R$  est de type  $(P_1)$  dans  $R$ , ce qui est classique et facile (prendre pour  $\mathfrak{p}$  l'unique idéal maximal de  $R$ ); la démonstra-

tion directe du fait que  $A$  est de type  $(P_3)$  dans  $R$  est d'ailleurs facile dans ce cas. La seule démonstration dont la théorie ne soit pas très facile est alors celle de l'analogie du théorème 4.

Dans le cas général la notion de sous-anneau de type  $(P_1)$  semble trop restrictive puisqu'elle ne vérifie pas le « théorème de descente » (cf. th. 6, voir § 6, 2°) et ne donne pas la caractérisation classique de la fermeture intégrale d'un sous-anneau (cf. th. 8 et exemple § 6, 4°). Par contre la notion de sous-anneau de type  $(P_2)$  n'est pas assez restrictive; il résulte de l'exemple (§ 6, 5°) qu'elle ne vérifie pas le « théorème de montée » (cf. th. 7), car, sinon, en prenant pour  $R'$  le corps des fractions  $A(x, y, z)$  de  $R$ ,  $A$  serait de type  $(P_3)$  d'après le théorème 6.

La notion de sous-anneau de type  $(P_3)$ , qui vérifie les théorèmes 6, 7 et 8, paraît donc être la généralisation naturelle de la notion de sous-anneau de valuation d'un corps. Si  $A$  est un sous-anneau de type  $(P_3)$  de  $R$ , et si  $\mathfrak{p}_1$  est l'idéal premier de  $A$  défini dans le théorème 1,  $a$ , on pourra définir (à une équivalence près) la *place*  $p$  associée à  $A$  en posant  $p(a) =$  classe de  $a \bmod \mathfrak{p}_1$  lorsque  $a \in A$ , et  $p(x) = \infty$  lorsque  $x \in R - A$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BOURBAKI, *Algèbre Linéaire*, 2<sup>e</sup> éd., App. III, Hermann, Paris, 1955; *Act. Sc. et Ind.*, n° 1236.
- [2] COHEN-SEIDENBERG, *Prime ideals and integral dependence* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 52, 1946, p. 252-261).
- [3] SAMUEL, *Algèbre locale* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. 123, Gauthier-Villars, Paris, 1953).

Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> décembre 1956.

