Bulletin de la S. M. F.

Georges Papy

Variétés différentielles (Point de vue contingent)

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 1 à 14.

VARIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES (POINT DE VUE CONTINGENT)

PAR

GEORGES PAPY
(Bruxelles).

Le présent article, de caractère élémentaire et provisoire, est un effort de plus pour tenter de définir de manière satisfaisante certaines des notions différentielles fondamentales.

Il a *donc* comme origines immédiates la définition des *variétés différentiables* formulées par Hassler WHITNEY, la théorie des *jets infinitésimaux* édifiée par Charles EHRESMANN, la théorie des variétés analytiques telle qu'elle est exposée par Claude CHEVALLEY, dans son livre sur les groupes de Lie, les définitions des vecteurs tangents donnés par Warren AMBROSE et par Shiing-Shen CHERN, certaines des définitions d'éléments tangents introduites en Géométrie algébrique par Oscar ZARISKI, et enfin les idées de Nicolas BOURBAKI et d'André WEIL.

Les variétés que nous considérerons n'ont pas nécessairement le même ordre de différentiabilité en chacun de leurs points. Elles peuvent avoir des points singuliers ou encore être différentiables en des points isolés. Nous montrerons ultérieurement le bénéfice que l'on peut tirer des idées de Georges BOULIGAND — et, tout particulièrement du point de vue *paratingent* — pour l'étude immédiatement globale d'une classe plus restreinte de variétés.

Notre définition des différentielles est une généralisation de la définition de STOLZ essentiellement différente des généralisations dues à Maurice FRÉCHET. Notre point de vue est nettement « Leibnitzien » et se rattache même aux idées de FERMAT qui dérivait le calcul infinitésimal de processus de division dans des algèbres adéquates. Ces processus de division sont remplacés ici, de manière toute naturelle, par un usage systématique d'idéaux et de quotients par des idéaux.

L'importance que l'on reconnaît depuis CAUCHY au théorème d'invariance de la différentielle première — relativement à des transformations régulières non nécessairement linéaires — indique que le cadre naturel des notions différentielles est fourni par la théorie des variétés. Il nous semble dès lors désirable d'édifier la théorie de la différentiation, directement à partir de la notion de variété, et, contrairement à la plupart des auteurs cités, sans l'aide d'une théorie infinitésimale préalable.

Il est vrai que la théorie des variétés analytiques édifiée par CHEVALLEY sur la définition intrinsèque des vecteurs tangents qu'on trouve dans l'Ouvrage nommé plus haut, satisfait pratiquement à ces exigences. Malheureusement, cette définition ne convient pas lorsque la classe de la variété cesse d'être infinie, et l'on peut encore reprocher à cette théorie d'introduire une double dualisation dont le caractère artificiel apparaît dans la définition de la différentielle d'une fonction. [Si F est l'espace des fonctions admissibles en un point et F^* son dual, l'espace tangent T est une partie de F et $dF = T^*$ avec $(df)t = t(f)$ pour tout $t \in T$].

La définition qu'on vient de rappeler vide la notion de différentielle de son contenu intuitif de « différence à quelque chose près » ou de « limite de différence » — qui n'a cessé d'être utile en calcul différentiel appliqué.

Comme la notion de différence locale ne présente aucune espèce de difficulté, le point essentiel consiste à définir les *limites* adéquates (1). Nous le ferons en partant de la donnée d'un *atlas* de la variété. (Le lecteur remarquera que cela n'est pas absolument indispensable au développement de la théorie et que celle-ci aurait pu être fondée sur des données plus générales; mais nous laisserons ces généralisations de côté dans le présent article). Un atlas qui permet la définition des infiniment petits d'ordre au moins égal à tout r pour $r = 1, 2, \ldots, \infty$, est dit différentiel en ce point. On peut alors y définir les limites et les différentielles de tout ordre pour toute fonction locale. (On remarquera que pour une variété de classe infinie, la restriction de notre différentielle d'ordre r aux fonctions indéfiniment différentiables, coïncide avec le « point proche canonique de rang r » d'André WEIL.) Les notions plus restrictives d'atlas différentiable d'ordre r et de fonction différentiable s'introduisent de même, sans faire aucun appel à une théorie différentielle préalable. A partir de ces concepts fondamentaux, on introduit les autres notions différentielles, et, en particulier, celle de variété *différentielle*.

En dehors des définitions, on se bornera à donner ici les « propriétés immédiates » des notions introduites.

---

(1) *Voir* à ce sujet, les articles de FARY [16] et DEDECKER [5].

1. Variétés topologiques. — Soit $\mathcal{V}$ une variété topologique réelle de dimension n, c'est-à-dire un espace topologique de Haussdorf possédant un recouvrement ouvert formé de pièces homéomorphes à des ouverts de l'espace euclidien réel de dimension n.

Soit p un point de $\mathcal{V}$.

Soit F l'algèbre (réelle) des germes (en p) des fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de p. Soit B l'algèbre des germes en p de fonctions bornées au voisinage de p. Soit A^0 l'algèbre des germes de fonctions continues en p (et non nécessairement au voisinage de p). Soit F_0 l'idéal (d'algèbre) formé par les éléments de F qui sont germes de fonctions nulles en p. Posons

$$B_0 = F_0 \cap B; \qquad A_0^0 = F_0 \cap A^0.$$

On a évidemment $A_0^0 \subset B_0 \subset F_0$ et $A^0 \subset B \subset F$. On remarquera, de plus, que A_0^0 est un idéal de B (et donc aussi de B_0 et de A^0).

Par identification des germes de fonctions constantes au voisinage de p aux valeurs qu'elles prennent, on obtient, en désignant par R le corps des réels,

$$F = R \oplus F_0, \qquad B = R \oplus B_0, \qquad A^0 = R \oplus A_0^0,$$

les sommes directes étant relatives aux vectoriels sous-jacents.

Les éléments de A_0^0 peuvent être regardés comme les infiniment petits au point considéré. On a

$$(A_0^0)^2 = A_0^0 . A_0^0 = A_0^0 . A^0 = A_0^0 . B_0 = A_0^0 . B = A_0^0 \tag{1.1}$$

(en désignant par $K.L$ l'ensemble des sommes finies $\Sigma_i k_i l_i$ avec $k_i \in K$, $l_i \in L$).

Ceci montre, en particulier, que l'on ne peut, sans donnée supplémentaire, parler de l'ordre des infiniment petits, ce qui est nécessaire à la définition d'une structure différentielle.

Dans la suite, nous confondrons souvent, par abus de langage, germes et fonctions au point p.

La différence Δ, en p, définie par

$$\Delta : \quad F \to F_0 : \quad f \in F \to \Delta f = f - f(p) \tag{1.2}$$

est une transformation linéaire de F qui laisse invariants les sous-espaces B, A^0, F_0, B_0 et A_0^0 ; la restriction de Δ à F_0 est d'ailleurs l'identité.

Relativement au produit, Δ satisfait à la règle bien connue

$$\Delta(f.g) = f(p).\Delta g + \Delta f . g(p) + \Delta f . \Delta g. \tag{1.3}$$

2. Structures locales attachées à une carte. — Soit $\mathfrak{A} = \{x\}$ un atlas de $\mathcal{V}$. Toute carte $x \in \mathfrak{A}$ est donc un homéomorphisme local

$$x : \qquad \mathcal{V}^{(x)} \to x\mathcal{V}^{(x)} \subset R^n$$

appliquant un ouvert $\mathcal{V}^{(x)}$ de $\mathcal{V}$ sur un ouvert $x\mathcal{V}^{(x)}$ de l'espace numérique R^n. La famille ouverte $\{\mathcal{V}^{(x)}\}$ constitue un recouvrement de $\mathcal{V}$ et toute carte x est définie par ses coordonnées locales $x^i = pr^i \circ x : \mathcal{V}^{(x)} \to R$ (en désignant par pr^i la projection de R^n sur son $i^{\text{ième}}$ axe coordonné). Nous dirons que x est une carte en p lorsque $p \in \mathcal{V}^{(x)}$.

Les coordonnées x^i de la carte x et la fonction 1 engendrent un sous-vectoriel de A^0 que nous noterons V^x et l'on a $\Delta V^x = V_0^x = V^x \cap F_0$.

Posons $N_0^x = V_0^x . A_0^0$ et $N^x = R \oplus N_0^x$. Il est évident que N_0^x est un idéal de A_0^0 et même de B, C'est encore un sous-vectoriel de F.

Définissons $N_0^{r,x} = (N_0^x)^r$, $r = 1, 2, \ldots$ et $N^{r,x} = R + N_0^{r,x}$, ce qu'on complètera par $N_0^{\infty,x} = \cap_l N_0^{l,x}$ et $N^{\infty,x} = R + N_0^{\infty,x}$.

On a donc, en particulier, $N_0^{1,x} = N_0^x$ et $N^{1,x} = N^x$. Pour $r = 1, 2, \ldots$, on a $N_0^{r,x} = (V_0^x)^r . A_0^0$ et les $N_0^{r,x}$ sont à leur tour des idéaux de B contenus dans A_0^0 et des sous-vectoriels de F, de même que l'intersection $N_0^{\infty,x}$.

On désignera par $A^{r,x}$ l'algèbre réelle

$$(2.1) \qquad A^{r,x} = R + A_0^{r,x} = R + V_0^x + \ldots + (V_0^x)^r + (V_0^x)^r . A_0^0$$

qui admet encore la définition récurrente

$$(2.2) \qquad A^{r,x} = R + A_0^{r,x}, \qquad A_0^{0,x} = A_0^0, \qquad A_0^{r,x} = V_0^x . A^{r-1,x}.$$

On établit directement que $0 \leqq s < r < \infty$, entraîne

$$(2.3) \qquad A_0^{r,x} . A^{s,x} = A_0^{s+1,x}.$$

La validité de (2.3) s'étend au cas ou $r = \infty$, en posant

$$A_0^{\infty,x} = \cap_r A_0^{r,x}$$

puisque

$$A_0^{\infty,x} . A^{s,x} = (\cap_{k=2,\ldots} A_0^{s+k,x}) . A^{s,x} \subset A_0^{r,x} . A^{s,x} = A_0^{s+1,x},$$

d'où

$$A_0^{\infty,x} . A^{s,x} \subset A_0^{s+1,x}$$

et comme $V_0^x \subset A_0^{\infty,x}$, il vient $A_0^{\infty,x} . A^{s,x} \supset V_0^x . A^{s,x} = A_0^{s+1,x}$, ce qui établit l'affirmation.

3. Atlas différentiel en un point. — Nous dirons que l'atlas $\mathfrak{A}$ est *différentiel* en p si $N_0^x = N_0^y$ pour tout couple x, y de cartes de $\mathfrak{A}$ en p. Dans ce cas, $N_0^{r,x} = N_0^{r,y}$ pour tout $r = 1, 2, \ldots$, et l'on pose

$$N_0^r = N_0^{r,x}, \qquad N^r = N^{r,x} = R \oplus N_0^r.$$

Les éléments de N_0^r sont les « infiniment petits d'ordre strictement supérieur à r » en p, ce qui justifie d'appeler limite l'ordre r et de noter $\lim_r$ l'homomorphisme de vectoriel que constitue la projection du vectoriel (sous-jacent à) F sur son quotient par N_0^r :

$$(3.1) \qquad \lim_r : \quad F \to F/N_0^r : \quad f \to \lim_r f = f + N_0^r.$$

La restriction de $\lim_r$ à B (qu'on notera encore $\lim_r$) est un homomorphisme d'algèbre, d'où

$$(3.2) \qquad \forall f, g \in B : \quad \lim_r(f.g) = \lim_r f.\lim_r g,$$

le produit dans le second membre de (3.2) étant évidemment le produit dans l'anneau-quotient $\lim_r B = B/N_0^r$.

On appelle différentielle d'ordre r en p, la limite d'ordre r de la différence en p;

$$(3.3) \qquad d_r = \lim_r \circ \Delta : \quad F \to F_0/N_0^r = d_r F.$$

C'est une application linéaire dont la restriction à B jouit de la règle du produit

$$(3.4) \qquad \forall f, g \in B : \quad d_r(f.g) = f(p).d_r g + d_r f.g(p) + d_r f.d_r g,$$

où, cette fois encore, le produit $d_r f.d_r g$ est celui défini dans l'algèbre-quotient $d_r B = \lim_r B_0 = B_0/N_0^r$.

Pour tout $s > r$, il existe une application linéaire canonique $\lim_r^s$ de $\lim_s F$ *sur* $\lim_r F$ donnant lieu à $\lim_r = \lim_r^s \circ \lim_s$. La restriction de $\lim_r^s$ à $\lim_s B$ est un homomorphisme de l'algèbre $\lim_s B$ sur l'algèbre $\lim_r B$.

Pour tout $s > r$, on aura donc $d_r = \lim_r^s \circ d_s$.

4. Atlas r-différentiable en un point. — Soit r un élément de l'ensemble $\{1, 2, \ldots\}$.

Un atlas est dit *r-différentiable* en p si l'on a $A_0^{r,x} = A_0^{r,y}$, pour tout couple de cartes x, y de $\mathfrak{A}$ en p. On pose alors $A_0^r = A_0^{r,x}$ et $A^r = R + A_0^r$.

Par la formule (2.4), un atlas r-différentiable en p est s-différentiable pour tout $s \leqq r$ et un atlas est ∞-différentiable si et seulement s'il est n-différentiable pour tout entier strictement positif n.

On dira qu'un atlas est différentiable en p s'il est 1-différentiable en ce point. Dans ce cas, $V_0^x.A^0 = V_0^y.A^0$, d'où $V_0^x.A^0.A_0^0 = V_0^y.A^0.A_0^0$ et $V_0^x.A_0^0. = V_0^y.A_0^0$, c'est-à-dire $N_0^x = N_0^y$ et l'atlas est différentiel au point considéré.

Il est facile de voir qu'un atlas peut être différentiel en un point sans être différentiable en ce point.

Si l'atlas $\mathfrak{A}$ est r-différentiable en p, les éléments de A^s, pour tout $s \leqq r$ sont les germes de *fonctions s-différentiables* en p.

Au lieu de dire qu'un atlas est différentiel en un point, il sera parfois plus commode de dire qu'il est δ-différentiable en ce point, et l'on admettra alors que tous atlas est o-différentiable en tout point de la variété.

D'autre part, un atlas $\mathfrak{A}$ sera dit linéaire, ou λ-différentiable en un point si, pour tout couple x, y de cartes $\mathfrak{A}$ en ce point, on a $V_0^x = V_0^y$. Et l'on comprend aisément ce qu'il convient d'entendre par un atlas analytique ou ω-différentiable en un point.

Cela étant, la propriété de h-différentiabilité d'un atlas en un point se trouve définie pour tout élément h appartenant à l'ordonné

$$(4.1) \qquad 0 < \delta < 1 < 2 < \ldots < n < n+1 < \ldots < \infty < \omega < \lambda.$$

Selon cet ordre, si un atlas est h-différentiable en un point, il est encore h'-différentiable, pour tout $h' \leq h$, et l'ensemble des valeurs k telles que l'atlas $\mathcal{A}$ soit k-différentiable au point p possède un maximum qu'on nomme l'ordre (de différentiabilité) de l'atlas au point p.

Afin de ne pas compliquer cet exposé, nous laisserons les notions d'analyticité et de linéarité en dehors de notre considération.

5. Variétés différentielles. — Soit $\mathcal{V}$ une variété topologique réelle de dimension n, soit $\mathcal{A}$ un atlas de $\mathcal{V}$, soit $\mathcal{C}$ l'atlas de toutes les cartes de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les homéomorphismes d'un ouvert de $\mathcal{V}$ sur un ouvert de R^n. Soit r un élément de l'ordonné (4.1).

On dira qu'une carte $x \in \mathcal{C}$ est r-compatible avec l'atlas si, pour tout point $p \in \mathcal{V}$, on a

$$(5.1) \quad \sup \{ r, \text{ ordre de } \mathcal{A} \text{ en } p \} = \sup \big\{ r, \text{ ordre de } (\mathcal{A} \cup \{ x \}) \text{ en } p \big\}.$$

L'ensemble $\mathcal{A}^s$ de toutes les cartes de $\mathcal{C}$, r-compatibles avec $\mathcal{A}$, est un atlas tel qu'on ait, en tout point p de $\mathcal{V}$

$$(5.2) \qquad \sup \{ r, \text{ ordre de } \mathcal{A}^r \text{ en } p \} = \sup \{ r, \text{ ordre de } \mathcal{A} \text{ en } p \}.$$

L'atlas $\mathcal{A}^r$ prolonge $\mathcal{A}$ et est *r-complet*, en ce sens qu'il contient toute carte de $\mathcal{A}$ qui lui soit r-compatible.

Le couple $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}^r$ prend le nom de variété *r-différentielle*. C'est la variété r-différentielle engendrée par l'atlas $\mathcal{A}$.

Conformément à l'avertissement donné en fin du paragraphe précédent, nous appellerons variétés différentielles les variétés ∞-différentielles. Comme le couple $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$ détermine entièrement la variété $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}^r$, on s'autorisera parfois à désigner la variété différentielle $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}^r$ par $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$, voire par $\mathcal{V}$.

6. Algèbres différentielles. — Soit $\mathcal{V}$, $\mathcal{A}$ une variété différentielle de dimension n et d'ordre r en $p \in \mathcal{V}$ et soit $1 \leq t \leq r \leq \infty$.

Nous appellerons algèbre différentielle d'ordre t en p l'algèbre $d_t A^t = A_0^t / N_0^t$. [Pour $t = 1$, on écrit éventuellement d au lieu de d_1, et, pour $f, g \in A^1$, la formule (3.4) se réduit à

$$(6.1) \qquad d(fg) = f(p).dg + df.g(p),$$

puisque

$$(A_0^1)^2 = (V_0^x.A^0)^2 = V_0^x.(V_?^x.A^0) \subset V_0^x.A_0^0 = N_0^1,$$

ce qui signifie que le produit dans $d_1 A^1$ est identiquement nul.]

Supposons d'abord $t < \infty$. Il est alors facile de voir que toute carte

$x = (x^1, \ldots, x^n)$ de $\mathfrak{A}$ en p, fournit une base de l'algèbre $d_t A^t$ constituée par les monomes commutatifs $d_t x^{i_1} \ldots . d_t x^{i_s}$ avec $1 \leqq i_1 \leqq \ldots \leqq i_s \leqq n$ et $1 \leqq s \leqq t$ et munit, *ipso facto*, $d_t A^t$ d'une structure d'algèbre graduée, qui dépend de manière essentielle du choix de la carte x. Mais on notera que la filtration φ_t sous-jacente à la graduation de $d_t A^t$ est indépendante du choix de la carte x. Ainsi, l'algèbre différentielle d'ordre t est une algèbre filtrée dont la filtration φ_t prend les valeurs $1, 2, \ldots, t, \infty$ (²).

La donnée d'une carte x permet de décrire la structure multiplicative $d_t A^t$ de la manière suivante. Désignons par $X^1, \ldots, X^n$, des indéterminées indépendantes sur le corps des réels et soit $S_0 = R\{X^1, \ldots, X^n\}_0$ l'algèbre des séries formelles d'ordre non nul (c'est-à-dire dépourvues de terme constant) à coefficients réels, en les $X^1, \ldots, X^n$. La $(t+1)^{\text{ième}}$ puissance S_0^{t+1} de S_0 est alors un idéal de S_0 et le quotient S_0/S_0^{t+1} est une algèbre graduée de degré t engendrée par les classes $X_t^i = X^i + S_0^{t+1}$ des X^i modulo S_0^{t+1}. L'application

$$(6.2) \qquad i_t^x : \quad d_t x^i \rightarrow X_t^i$$

définit un isomorphisme d'algèbre graduée de $d_t A^t$ sur S_0/S_0^{t+1}, (qui dépend de manière essentielle du choix de la carte x).

Comme les x^i et Δx^i appartiennent à A^r, on a $d_t A^t = d_t A^r$. Afin d'éviter toute confusion, nous désignerons désormais par d_s^t la restriction de $\lim_s^t$ à $d_t A^t$ (pour tout $s \leqq t$), L'application d_s^t est donc un homomorphisme de l'algèbre différentielle d'ordre t *sur* celle d'ordre s.

Désignons par φ_t^s la filtration de $d_t A^r$, à valeurs dans l'ensemble $1, 2, \ldots, s, \infty$ définie, pour tout $w \in d_t A^r$, par les conditions

$$(6.3) \qquad \begin{cases} \varphi_t^s w = \varphi_t w, & \text{lorsque} \quad \varphi_t w \leqq s, \\ \varphi_t^s w = \infty, & \text{lorsque} \quad \varphi_t w > s. \end{cases}$$

Cela étant, les filtrations φ_t^s et φ_s des algèbres filtrées $(d_t A^t, \varphi_s^t)$ et $(d_s A^s, \varphi_s)$ ont leurs valeurs dans le même ensemble $1, 2, \ldots, s, \infty$ et d_s^t est un homomorphisme de l'algèbre filtrée $(d_t A^t, \varphi_s^t)$ sur $(d_s A^s, \varphi_s)$.

Si $r = \infty$, on se trouve en présence de trois suites inverses (³). La première est la suite des algèbres A^i, articulée par l'injection canonique de A^i dans A^j, pour tout $i \leqq j$ (ce qui découle de la propriété évidente $A^j \subset A^i$ pour tout couple $i \leqq j$). La limite inverse $\varprojlim (A^i, \text{inclusion})$ n'est autre que A^∞. La seconde suite est celle des idéaux N^i qui sont également emboîtés les uns dans les autres. Ici encore, $\varprojlim (N^i, \text{inclusion}) = N^\infty$.

La troisième suite est la suite $(d_t A^t, d_s^t)$ des algèbres différentielles $d_t A^t$, articulée par les homomorphismes surjectifs d_s^t. Toute carte $x \in \mathfrak{A}$, en p,

(²) On supposera cet ensemble muni de la loi d'addition tronquée $+_t$ définie par $a +_t b = a + b$ si $a + b = t$ et $a +_t b = \infty$ lorsque $a + b > t$.

(³) *Voir*, par exemple [15].

définit un isomorphisme de cette suite articulée sur la suite $(S_0/S_0^{t+1}, h_s^t)$ où h_s^t est l'homomorphisme engendré par $X_t^i \to X_s^i$. La relation évidente $\varprojlim(S_0/S_0^{t+1}, h_s^t) = S_0$, montre que $\varprojlim(d_t A^t, d_s^t)$ peut être identifiée à l'algèbre des séries formelles en les $d^\infty x^i$, la structure filtrée sous-jacente étant seule intrinsèque.

En vertu de ce qui précède, le quotient des limites inverses des deux premières suites s'identifie à $d_\infty A = A^\infty/N^\infty = \varprojlim A^t/\varprojlim N^t$. Il est facile de voir que $d^\infty A$ est canoniquement contenue dans l'algèbre des séries formelles considérée; mais comme la limite inverse d'un quotient n'est, en général pas isomorphe du quotient des limites, on ne peut conclure de manière aussi immédiate que $d^\infty A$ s'identifie à l'algèbre des séries formelles en les $d_\infty x^i$. Il en est cependant ainsi, comme l'a montré Herrmann [19].

7. Dérivations. — On appelle *dérivation* (*non homogène*) *d'ordre au plus égal à t*, tout élément du dual algébrique $(d_t A^t)^*$ de l'algèbre différentielle d'ordre t; les espaces de dérivations forment une suite directe (au sens d'Eilenberg-Steenrod) [15], articulée par les isomorphismes canoniques non surjectifs ${}^\tau d_s^t$ (transposés des d_s^t). L'identification canonique qui en découle permet d'écrire

$$(7.1)\quad (d_1 A^1)^* \subset (d_2 A^2)^* \subset \ldots \subset (d_t A^t)^* \subset (d_{t+1} A^{t+1})^* \subset \ldots \subset (d_r A^r)^*,$$

où r est toujours l'ordre de la variété au point p. L'espace $(d_r A^r)^*$ est donc l'espace *des* dérivations au point p.

L'*ordre* $\varphi^* t$ d'une dérivation $t \in (d_r \mathrm{A}^r)$ est défini par

$$(7.2)\qquad \varphi^* t = \min\{s \mid t \in (d_s A^s)^*\}.$$

Comme

$$(7.3)\qquad d_s A^s = A_0^s/N_0^s = A^s/N^s,$$

l'espace des dérivations $(d_s A^s)^*$ est canoniquement identifiable au sous-vectoriel $(N^s)^\perp$ de $(A^s)^*$ orthogonal à N^s. Autrement dit,

$$(7.4)\qquad (d_s A^s)^* = (N^s)^\perp \subset (A^s)^*,$$

ce qui fait apparaître les dérivations d'ordre au plus égal à s comme des formes linéaires sur A^s qui s'annulent sur N^s (qu'on appellera pour cette raison, *espace normal d'ordre s*).

La règle du produit pour les dérivations d'ordre au plus égal à s s'obtient aisément

$$(7.5)\quad (\forall f, g \in A^s, t \in (N^s)^\perp):\quad \begin{aligned} t(f.g) &= t\, d_s(f.g) \\ &= t(f(p)\, d_s g + d_s f . g(p) + d_s f . d_s g) \\ &= f(p)\, tg + tf . g(p) + t(d_s f . d_s g). \end{aligned}$$

Lorsque $s = 1$, on a $d_s f . d_s g = 0$, ce dernier terme s'annule, et l'on retrouve la règle classique.

De la définition de l'ordre d'une dérivation, on tire

$$\forall t_1, t_2 \in (d_r A^r)^* : \quad \varphi^*(t_1 + t_2) \leqq \max\{\varphi^* t_1, \varphi^* t_2\}, \tag{7.6}$$

l'inégalité stricte ne pouvant avoir lieu dans (7.6) que si $\varphi^* t_1 = \varphi^* t_2$.

Limitons-nous maintenant au cas des dérivations d'ordre fini : $s < \infty$.

A la base

$$(dx^1)^{j_1} . \ldots . (dx^n)^{j^n} \qquad (1 \leqq j_1 + \ldots + j_n \leqq s) \tag{7.7}$$

de $d_s A^s$, correspond la base duale de $(d_s A^s)^*$ que nous noterons

$$\partial^x_{j_1 \ldots j_n} \qquad (1 \leqq j_n + \ldots + j_n \leqq s). \tag{7.8}$$

Comme les notions introduites sont de caractère ponctuel, les dérivations (7.8) ne peuvent être regardées comme le résultat d'itérations de dérivées d'ordre 1. Bornons-nous à indiquer le rapport entre les dérivées (7.8) et les dérivées itérées dans le cas d'une variété et de fonctions de classe C^r, *au voisinage de p.* On a alors

$$\partial^s / ((\partial x^1)^{j_1} \ldots (\partial x^n)^{j^n}) = j_1 ! \ldots j_n ! \, \partial^x_{j_1 \ldots j_n} \tag{7.9}$$

et les dérivées (7.8) sont des « dérivées réduites » au sens de HASSE-TEICHMÜLLER-DIEUDONNÉ.

8. Intégration de dérivations. — Soit $\mathcal{V}$ une variété différentielle de dimension n et d'ordre r en p et ω_s un élément de l'espace différentiel d'ordre $s \leqq r$. Donc $\omega_s \in d_s A^s = d_s A^r$, et comme d^r_s est un homomorphisme surjectif, il existe un $\omega_r \in d_r A^r$ tel que $\omega_s = d^r_s \omega_r$ (et, finalement une fonction $f \in A^r$, telle que $\omega_r = d_r f$, $\omega_s = d_s f$.).

Comme opérateur de multiplication ω_s définit une transformation linéaire $\omega_s.$ de $d_s A^s$; de manière précise,

$$\omega_s. : \; d_s A^s \rightarrow d_s A^s : \quad \varpi \in d_s A^s \rightarrow (\omega_s.)\varpi = \omega_s . \varpi. \tag{8.1}$$

Comme il en est de même de ω_r pour $d_r A^r$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} d_s A^s & \xleftarrow{\quad d^r_s \quad} & d_r A^r \\ \Big\downarrow \; \omega_s . = (d^r_s \omega_r). & & \Big\downarrow \; \omega_r . \\ d_s A^s & \xleftarrow{\quad d^r_s \quad} & d_r A^r \end{array} \tag{8.2}$$

Autrement dit,

$$((d^r_s \omega_r).) \circ d^r_s = d^r_s \circ (\omega_r .), \tag{8.3}$$

ce qui, par transposition, donne

(8.4) $${}^{\tau}d_s^r \circ {}^{\tau}((d_s^r\,\omega_r).\,) = {}^{\tau}(\omega_r.\,) \circ {}^{\tau}d_s^r$$

ou, plus simplement,

(8.5) $${}^{\tau}d_s^r \circ {}^{\tau}(\omega_s.\,) = {}^{\tau}(\omega_r.\,) \circ {}^{\tau}d_s^r.$$

Compte tenu des identifications canoniques convenues en (7.1), la formule (8.5) affirme que, pour tout $\omega_s \in d_s A^s$, la transformation ${}^{\tau}(\omega_s.\,)$ coïncide avec la restriction d'une ${}^{\tau}(\omega_r.\,)$ à $(d_s A^s)^*$; réciproquement, pour tout $\omega_r \in d_r A^r$, la restriction de ${}^{\tau}(\omega_r.\,)$ à $(d_s A^s)$ coïncide avec ${}^{\tau}((d_s^r\,\omega_r).\,)$, ce qui montre, en particulier, que, pour tout $s \leqq r$, l'espace des dérivations d'ordre au plus égal à s, est stable pour ${}^{\tau}(\omega_r.\,)$. [La première de ces propositions peut encore s'énoncer en disant que toute transformation ${}^{\tau}(\omega_s.\,)$ de l'espace des dérivations d'ordre au plus égal à s, est prolongeable en une transformation ${}^{\tau}(\omega_r.\,)$ de l'espace de toutes les dérivations.] Cela étant, on pourra se borner à la considération des transformations ${}^{\tau}(\omega_r.\,)$ de l'espace de toutes les dérivations.

Ainsi qu'il apparaîtra plus clairement ci-dessous, la transformation ${}^{\tau}(\omega_r.\,)$ est une sorte d'intégration de dérivations. Aussi poserons-nous :

(8.6) $${}^{\tau}(\omega_r.\,) = \int \omega_r$$

et la valeur de ${}^{\tau}(\omega_r.\,)$ pour la dérivation ∂ s'écrit alors

(8.7) $${}^{\tau}(\omega_r.\,)\,\partial = \int \omega_r \partial.$$

On a clairement

(8.8) $$\int (a\omega + b\varpi) = a\int \omega + b\int \varpi$$

et la relation

(8.9) $$(\omega.\varpi).\, = (\omega.\,) \circ (\varpi.\,) = (\varpi.\,) \circ (\omega.\,) = (\varpi.\omega)$$

entraîne

(8.10) $$\int \omega.\varpi = \int \omega \circ \int \varpi = \int \varpi \circ \int \omega = \int \varpi.\omega.$$

Comme ω et ϖ sont définies par $\omega = d_r f$, $\varpi = d_r g$, avec f, $g \in A^r$, on pourra encore poser

(8.11) $$\int f = \int d_r f = \int \omega$$

moyennant quoi,

(8.12) $$\int fg = \int (f(p).g + f.g(p)) + \int f \circ \int g.$$

Lorsque r est fini, toute integrale est combinaison linéaire d'intégrales de type

$$(8.13)\qquad \int (d_r x^1)^{j_1} \ldots\ldots (d_r x^n)^{j^n} = \int d_r x^1 \int d_r x^1 \ldots \int d_r x_1 \int d_r x^2 \ldots \int d_r x^n$$

qui sont encore caractérisées par

$$(8.14)\qquad \int (d_r x^1)^{j_1} \ldots\ldots (d_r x^n)^{j_n} \partial^x_{i_1 \ldots i_n} = \partial^x_{i_1 - j_1, \ldots, i_n - j_n},$$

où l'on a convenu que $\partial^x_{k_1 \ldots k_n} = 0$, si l'un au moins des k est strictement négatif, ou s'ils sont tous nuls.

Déterminons l'effet de l'intégration $\int \omega$ sur l'ordre des dérivations.

Supposons d'abord que $\varphi\omega = \infty$, ce qui équivaut à $\omega = 0$, d'où

$$(8.15)\qquad \int \omega = \int 0 = 0.$$

Soit $\varphi\omega < \infty$, soit t une derivation quelconque et $\varpi \in d_r A^r$. Il vient alors

$$(8.16)\qquad \left(\int \omega t\right) \varpi = t(\omega . \varpi).$$

Or, en posant $\omega = d_r f$, on a

$$(8.17)\qquad \varphi\omega = \sup \{ k + 1 \wr f \in N^k \},$$

d'où

$$(8.18)\qquad \varphi\omega > k \quad \rightleftharpoons \quad f \in N^k$$

et l'on obtient successivement

$$(8.19)\qquad \forall t \in (d_r A^k)^\star : \quad \begin{aligned} \varphi^\star t &= \min \{ s \wr t \in (d_s A^r)^\star \} \\ &= \min \{ s \wr t N^s = 0 \} \\ &= \min \{ s \wr \varphi\omega > s \text{ entraîne } t\omega = 0 \}. \end{aligned}$$

D'où

$$(8.20)\qquad \varphi\omega > \varphi^\star t \quad \to \quad t\omega = 0$$

et, en particulier, on aura

$$(8.21)\qquad t(\omega . \varpi) = 0$$

dès que

$$(8.22)\qquad \varphi(\omega . \varpi) > \varphi^\star t$$

ce qui équivaut à

$$(8.23)\qquad \varphi\varpi > \varphi^\star t - \varphi\omega.$$

Compte tenu de (8.16) et de (8.20) et (8.23), on a

$$\left(\int \omega\, t\right)\varpi = 0, \tag{8.24}$$

dès que $\varphi\varpi > \varphi^\star t - \varphi\omega$, ce qui entraîne

$$\boxed{\varphi^\star \int \omega\, t \leq \varphi^\star t - \varphi\omega.} \tag{8.25}$$

L'inégalité (8.25) ne peut être améliorée en général, ainsi que le prouve l'exemple suivant. On fait $n = 4$, $r = 2$, $\omega = d_2 x^1 + d_2 x^2 . d_2 x^3$, $t = \partial_{x^1 x^2 x^3}$, en posant $\partial_{x^2 x^3 x^4} = \partial^x_{0111}$.
Alors $\varphi\omega = 1$, $\varphi^\star t = 3$. Néanmoins

$$\begin{aligned} \int \omega . t &= (d_2 x^1 + d_2 x^2 . d_2 x^3)\, \partial_{x^2 x^3 x^4} \\ &= \int d_2 x^1 . \partial_{x^2 x^3 x^4} + \int d_2 x^2 . d_2 x^3\, \partial_{x^2 x^3 x^4} \\ &= \quad 0 \quad + \partial_{x^4} \end{aligned} \tag{8.26}$$

et

$$\varphi^\star \int \omega\, t = \varphi^\star \partial_{x^4} = 1 < 3 - 1 = \varphi^\star t - \varphi\omega. \tag{8.27}$$

9. Contacts et points proches. — Mentionnons pour terminer, les *éléments différentiels homogènes* ainsi que la notion projective de *point proche* qui s'y attache.

Soit toujours $\mathcal{V}$ une variété différentielle de dimension n et d'ordre r en p. Considérons l'*espace gradué* $H = \bigoplus_i H^i = \mathcal{G}(d_r A^r)$ associé à l'espace filtré $(d_r A^r)^\star$ (*voir* Leray [20]),

Dans le cas présent, H^i est défini par

$$H^i = (d_i A^r)^\star / \Sigma_{j<i} (d_j A^r)^\star. \tag{9.1}$$

En particulier,

$$H^1 = (d_1 A^r)^\star, \tag{9.2}$$

$$H^i = (d_i A^r)^\star / (d_{i-1} A^r)^\star \qquad \text{pour} \quad 1 < i < \infty, \tag{9.3}$$

$$H^\infty = (d_\infty A^\infty)^\star / \Sigma_{i=1,\dots,<\infty} (d_i A^i)^\star. \tag{9.4}$$

Il est commode de compléter la définition (9.1) en posant

$$H^0 = 0. \tag{9.5}$$

Les éléments de H^i sont appelés *contacts d'ordre i en p*.

Comme l'intégration laisse invariant chacun des espaces $(d_i A^r)^\star$ il est clair que $\int \omega$ définit encore une transformation linéaire de H qu'on notera encore $\int \omega$.

Si d^0 désigne le degré dans H, on a la relation

$$\forall h \in H: \quad d^0 \int \omega . h \leqq d^0 h = \varphi \omega.$$

Les points proches d'ordre i sont les éléments de l'espace projectif $\overline{\wedge} H^i$ des rayons de H^i (ou droites issues de l'origine dans H^i). Il sera commode de poser $\overline{\wedge} H^0 = p$, ce qui fait apparaître p comme le seul point proche (de p) d'ordre nul. De deux points proches en p, soit α et β, on dira que α est plus proche de p que β si l'ordre de α est inférieur à celui de β.

La transformation $\int \omega$ de H, définit de manière naturelle une transformation encore notée $\int \omega$, de l'ensemble des points proches de p. Cette transformation rapproche les points proches du point p. De manière plus précise, si π est proche de p, et si $\sigma(\pi)$ désigne l'ordre de π, on a

$$\sigma\left(\int \omega\pi\right) \leqq \sigma(\pi) - \varphi\omega.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOULIGAND, *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris, 1932.

[2] CHERN, *Topics in differential Geometry* (Institute for advanced Study, Princeton, 1951).

[3] CHERN, *Differential Manifolds* (Dept. Mathematics, Chicago, 1952).

[4] CHEVALLEY, *Theory of Lie Groups*, Princeton, 1946.

[5] DEDECKER, *Une théorie algébrique des équations approchées* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 83, 1955, p. 331-364).

[6] EHRESMANN, 1951. *Les prolongements d'une variété différentiable.* (*Atti del IV° Congresso del Unione Matematica Italiana.* Taormina, 1951; publié en 1953, p. 1-9).

[7] EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 598-600.

[8] EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 777-779.

[9] EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 1081-1083.

[10] EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc*,. t. 234, 1952, p. 587-589.

[11] EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1028-1030.

[12] EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1424-1425.

[13] EHRESMANN, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie* (*Géométrie différentielle*, C. N. R. S., 1953, p. 97-110).

[14] EHRESMANN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1762-1764.