BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE KAHANE

Généralisation d’un théorème de S. Bernstein

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 221-229
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__221_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 221 à 229.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE S. BERNSTEIN ;

PAR

JEAN-PIERRE KAHANE.

S. Bernstein a démontré le théorème suivant (1) : *Pour qu'une fonction 2π-périodique f soit somme d'une série trigonométrique absolument convergente* $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$, *il suffit que f satisfasse une condition de Lipschitz d'ordre* $\alpha > \frac{1}{2}$; *inversement, pour tout* $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, *il existe des fonctions lipschitziennes d'ordre α qui ne sont pas sommes de séries trigonométriques absolument convergentes.* Le même énoncé vaut en remplaçant « f 2π-périodique » par « f définie sur un segment de longueur $< 2\pi$ ».

Le problème qui nous intéresse est celui-ci : E étant un ensemble fermé sur $[0, 2\pi]$, indiquer une condition suffisante, généralisant celle de S. Bernstein, pour qu'une fonction f, définie sur E, y soit représentable comme somme de série trigonométrique absolument convergente. On peut espérer que la condition est d'autant moins restrictive que E est plus clairsemé (dans un sens à préciser). On sait d'ailleurs que pour certains ensembles très clairsemés et jouissant de propriétés arithmétiques remarquables, aucune autre condition pour f n'est requise que la continuité sur E (2).

Notations :

A, classes des fonctions 2π-périodiques (à valeurs complexes) sommes de séries trigonométriques absolument convergentes ;

$A(E)$, classes des fonctions définies sur E, prolongeables en fonctions de la classe A ;

---

(1) *Cf.*, par exemple, ZYGMUND, *Trigonometrical Series*, chap. V.

(2) *Cf.* L. CARLESON, *Acta Mathematica*, t. 87, 1952, p. 325-345 ; H. HELSON, *Studia Mathematica*, t. 14, 1954, p. 209-213 ; J.-P. KAHANE et R. SALEM, *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1956, p. 1185-1187 et 1706-1708.

$\mathrm{Lip}\,\alpha(E)$, classe des fonctions définies sur E, telles que

$$|f(x') - f(x) < K\,|\,x' - x\,|^{\alpha}$$

quand x et x' appartiennent à E, K ne dépendant pas de x et x'; E_h, réunion des segments de longueurs $2h$ dont les centres appartiennent à E; $\mu = \mu(E)$, borne inférieure des ν pour lesquels mes. $E_h = O(h^{1-\nu})$ quand $h \to 0$.

Le problème posé admet la réponse suivante :

THÉORÈME I. — *On a* $\mathrm{Lip}\,\alpha(E) \subset A(E)$ *dès que* $\alpha > \frac{\mu}{2}$.

Pour illustrer ce résultat et montrer qu'en un certain sens on ne peut l'améliorer, nous considérons deux exemples.

Exemple 1. — E est l'ensemble parfait symétrique, construit sur $[0, 1]$, associé à la suite $\{\xi_p\}\left(0 < \xi_p < \frac{1}{2};\, p = 1, 2, \ldots\right)$. Rappelons que E est l'intersection des ensembles fermés emboîtés E_p ainsi définis : $E_0 = [0, 1]$, et l'on passe de E_{p-1} à E_p en remplaçant chaque partie connexe $[g, d]$ de E_{p-1} par les deux segments $[g, g + \xi_p(d - g)]$ et $[d - \xi_p(d - g), d]$; ainsi E_p est réunion de 2^p segments de longueur $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p$.

Exemple 2. — E est un ensemble dénombrable ayant 0 pour seul point d'accumulation, ainsi défini : on donne la suite positive $\{\lambda_n\}$, telle que $\lambda_0 = 1$ et $2\lambda_{n+1} \leqq \lambda_n\,(n = 0, 1, \ldots)$ et la suite d'entiers positifs $\{k_n\}$ tels que $k_n \lambda_n < \lambda_{n-1}\,(n = 1, 2, \ldots)$; E est l'ensemble des points $j\lambda_n$ ($j = 1, 2, \ldots, k_n$ et $n = 1, 2, \ldots$).

COMPLÉMENT AU THÉORÈME I. — *Dans l'exemple* 1,

$$\mu = -\frac{\log 2}{\log \xi}, \qquad \text{avec} \quad \xi = \overline{\lim_{p \to \infty}}\,(\xi_1 \ldots \xi_p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dans l'exemple 2,

$$\mu = \overline{\lim_{n \to \infty}}\,\frac{\log k_n}{-\log \lambda_n}.$$

Remarquons que, dans l'exemple 1, si la suite ξ_p est constante, μ est la dimension de Hausdorff de E. Il est facile de voir que, quel que soit E, μ est au moins égal à la dimension de Hausdorff de E.

THÉORÈME II. — *Dans l'exemple* 1 $\left(\text{\textit{avec l'hypothèse} } \overline{\lim}\,\xi_p < \frac{1}{2}\right)$ *et dans l'exemple* 2, *on peut construire sur* E *une fonction n'appartenant pas à* $A(E)$, *mais appartenant à* $\mathrm{Lip}\,\alpha(E)$ *pour tout* $\alpha < \frac{\mu}{2}$.

La démonstration du théorème II s'appuie sur le lemme suivant, qui est intéressant pour d'autres applications.

Lemme. — *On considère les polynômes trigonométriques à p variables*

$$P = P_t(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum r_m \varphi_m(t)\, e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_p x_p)}$$

dont le « degré » $\sup(|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_p|)$ *n'excède pas s; on donne les amplitudes* $r_m \geqq 0$; $\varphi_m(t)$ *désigne la* $m^{\text{ième}}$ *fonction de Rademacher* ($0 \leqq t \leqq 1$; $\varphi_m(t) = \pm 1$); *m est un nombre entier fonction biunivoque de* $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$. *Alors, pour un ensemble de valeurs de t de mesure positive, on a*

$$\max_{x_1, \ldots, x_p} |P| < A\left(\sum r_m^2 p \log(s+1)\right)^{\frac{1}{2}},$$

A étant une constante absolue.

Ce lemme généralise un résultat de Salem et Zygmund, relatif au cas $p = 1$ (³).

Démonstrations.

1. Démonstration du théorème I. — Soit $f \in \operatorname{Lip}\alpha(E)$. Considérons la fonction 2π-périodique g, continue, égale à f sur E et linéaire sur les intervalles contigus à E. Montrons que $g \in \operatorname{Lip}\alpha$. En effet, si x et x' appartiennent à E, on a $|g(x') - g(x)| < K|x' - x|^\alpha$. Si x et x' appartiennent au même segment $[y, y']$ contigu à E, on a

$$|g(x') - g(x)| = |g(y') - g(y)| \left|\frac{x' - x}{y' - y}\right|$$
$$< K|y' - y|^\alpha \left|\frac{x' - x}{y' - y}\right| < K|x' - x|^\alpha.$$

Et sinon, on écrit

$$g(x') - g(x) = g(x') - g(z') + g(z') - g(z) + g(z) - g(x),$$

z et z' étant respectivement sur $[x, x']$ les points de E les plus rapprochés de x et x'; en majorant chaque différence on obtient

$$|g(x') - g(x)| < 3K|x' - x|^\alpha.$$

On reprend maintenant, en la modifiant à peine, la démonstration classique

(³) *Cf.* Salem et Zygmund, *Acta Mathematica*, t. 91, 1954, p. 265 et suiv.

du théorème de S. Bernstein [1], en posant

$$g \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

$$\varphi_h(x) = g(x+h) + g(x-h) - 2g(x) \sim -4\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \sin^2 nh\, e^{inx},$$

$$\mathcal{X}(h) = \int_0^{2\pi} |\varphi_h(x)|^2 dx = 32\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \sin^4 nh.$$

Or

$$\mathcal{X}(h) = \int_{E_{2h}} |\varphi_h(x)|^2\, dx < K' h^{2\alpha} \text{mes.}\, E_{2h} < K'' h^{1-\nu+2\alpha} \qquad \text{pour} \quad \nu > \mu(E).$$

D'autre part,

$$\sum_{N<|n|\leq 2N} |c_n| < (2N)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{N<|n|\leq 2N} |c_n|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} < (2N)^{\frac{1}{2}} \Big(\sin\frac{\pi}{3}\Big)^{-2} \Big(\mathcal{X}\Big(\frac{\pi}{3N}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\sum_{N<|n|\leq 2N} |c_n| < K''' N^{\nu-2\alpha}.$$

En prenant $N = 2^j$, et en faisant la somme pour toutes les valeurs de j, on voit que la condition $\nu - 2\alpha < 0$, garantie pour un ν convenable dès que $\alpha > \frac{\mu}{2}$, entraîne que $g \in A$, donc $f \in A(E)$.

2. Démonstration du complément du théorème I.

Exemple 1. — Soit $\xi_1 \ldots \xi_p \leq h < \xi_1 \ldots \xi_{p-1}$. On vérifie facilement (en faisant la figure) que

$$2^{p-1} h < \text{mes.}\, E_h < 3 . 2^p h.$$

Donc

$$\nu > \mu \Leftrightarrow 2^p h^\nu = O(1) \Leftrightarrow 2^p (\xi_1 \ldots \xi_p)^\nu = O(1) \Leftrightarrow p\,(\log 2 + \nu \log \xi) < O(1),$$

d'où

$$\mu = -\frac{\log 2}{\log \xi}.$$

Exemple 2. — Si $\lambda_n \leq h < \lambda_{n-1}$, on a

$$\text{mes.}\, E_h = k_n \lambda_n + (\theta + k_{n-1} + \ldots + k_1) h, \qquad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Comme mes. $E_h - \theta h$ est une fonction linéaire de h sur les intervalles

$[\lambda_n, \lambda_{n-1}]$, on a

$$\text{mes.}\, E_h = O(h^{1-\nu}) \Leftrightarrow \text{mes.}\, E_{\lambda_n} = O(\lambda_n^{1-\nu}),$$

donc

$$\nu > \mu \Leftrightarrow k_n \lambda_n^{\nu} = O(1), \qquad \text{soit} \quad \mu = \overline{\lim}\, \frac{\log k_n}{-\log \lambda_n}.$$

3. Démonstration du théorème II.

Exemple 1. — Posons $r_p = \xi_1 \ldots \xi_{p-1}(1 - \xi_p)$. Les extrémités gauches g_m des 2^p segments constituant E_p s'écrivent

$$g_m = \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \ldots + \varepsilon_p r_p,$$

les ε_j prenant les valeurs 0 et 1. Admettons le lemme; on peut déterminer les coefficients $\varphi_m = \pm 1$ de façon que

$$\max_t \left| \sum \varphi_m e^{ig_m t} \right| < A \sqrt{2^p p \log p}.$$

Remarquons que les g_m, de même que les extrémités droites

$$d_m = g_m + \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p,$$

appartiennent à E. Pour avoir $f \in A(E)$, c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx} \quad \text{sur } E, \qquad \text{avec} \quad \sum |a_n| < \infty,$$

il est nécessaire que

$$\left| \sum \varphi_m f(g_m) \right| < A \sum |a_n| \sqrt{2^p p \log p}$$

et, de même,

$$\left| \sum \varphi_m f(d_m) \right| < A \sum |a_n| \sqrt{2^p p \log p},$$

d'où

$$\sum \varphi_m [f(d_m) - f(g_m)] = o \sqrt{2^p p \log p} \quad \text{quand } p \to \infty. \tag{1}$$

Choisissons une suite de valeurs p_i telle que $(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{p_i})^{\frac{1}{p_i}}$ tende vers ξ, et construisons f comme limite d'une suite de fonctions f_i, chaque f_i étant définie sur E_{p_i} et linéaire sur les segments constituant E_{p_i}. Pour passer de f_{i-1} à f_i, nous posons $f_i = f_{i-1}$ sur la frontière de $E_{p_{i-1}}$ et

$$f_i(d_m) - f_i(g_m) = p_i 2^{-\frac{p_i}{2}} \varphi_m, \tag{2}$$

g_m, d_m et φ_m ayant la signification de l'alinéa ci-dessus, pour $p = p_i$. En fixant arbitrairement f_0, chaque f_i est bien déterminée ; de plus, sur la frontière de E_{p_i}, on a

$$f_i = f_{i+1} = \ldots = f.$$

D'après (2), on a donc

$$\sum \varphi_m [f(d_m) - f(g_m)] = p_i 2^{\frac{p_i}{2}},$$

ce qui contredit (1) ; donc $f \notin A(E)$.

Moyennant la condition $\xi_p < \theta < \frac{1}{2}$, et l'hypothèse $\alpha < -\frac{1}{2}\frac{\log 2}{\log \xi}$, montrons que les f_i satisfont à une condition de Lipschitz uniforme

$$(3) \qquad |f_i(x') - f_i(x)| < K_i |x - x'|^\alpha,$$

les constantes K_i étant bornées. Choisissons i_0 assez grand pour que $i > i_0$ entraîne $(\xi_1 \ldots \xi_{p_i})^\alpha > p_i^3 2^{-\frac{p_i}{2}}$ (c'est possible d'après les hypothèses faites sur les p_i et sur α) ; dans la suite on suppose $i > i_0 + 1$. Pour majorer le premier membre de (3), supposons d'abord x et x' sur un même segment $[g_m, d_m]$ de E_{p_i} : alors d'après (2)

$$\begin{aligned} |f_i(x') - f_i(x)| &< \frac{|x' - x|}{d_m - g_m} p_i 2^{-\frac{p_i}{2}} \\ &< p_i^{-2} |x' - x| (\xi_1 \ldots \xi_p)^{\alpha - 1} < p_i^{-2} |x' - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Supposons maintenant x et x' sur un même segment de $E_{p_{i-1}}$, mais non sur un même segment de E_{p_i} ; désignons par y et y' respectivement les points de la frontière de $E_{p_{i-1}}$ les plus rapprochés de x et x' ; alors

$$\begin{aligned} &|f_i(x') - f_i(y')| < p_i^{-2} |x' - y'|^\alpha, \\ &|f_i(y') - f_i(y)| = |f_{i-1}(y') - f_{i-1}(y)| < p_{i-1}^{-2} |y' - y|^\alpha, \\ &|f_i(y) - f_i(x)| < p_i^{-2} |y - x|^\alpha. \end{aligned}$$

Or, la condition $\xi_p < \theta < \frac{1}{2}$ entraîne

$$|y' - y| \leq \frac{|x' - x|}{1 - 2\theta}, \quad |y - x| \quad \text{et} \quad |x' - y'| \leq \frac{\theta |x' - x|}{1 - 2\theta},$$

d'où

$$|f_i(x') - f_i(x)| < K(\theta) p_{i-1}^{-2} |x' - x|^\alpha.$$

Supposons enfin que le segment $[x, x']$ contienne des points frontières de $E_{p_{i-1}}$; soient respectivement z et z' les points frontières de $E_{p_{i-1}}$ les plus rapprochés de x et x' sur $[x, x']$ alors

$$\begin{aligned} &|f_i(z') - f_i(z)| = |f_{i-1}(z') - f_{i-1}(z)| < K_{i-1} |z' - z|^\alpha < K_{i-1} |x' - x|^\alpha, \\ &|f_i(x') - f_i(z')| \quad \text{et} \quad |f_i(z) - f_i(x)| < K(\theta) p_{i-1}^{-2} |x' - x|^\alpha, \end{aligned}$$

d'où

$$|f_i(x') - f_i(x)| < K_i |x' - x|^\alpha$$

dans tous les cas, avec

$$K_i = K_{i-1} + 2K(\theta)p_{i-1}^{-2}.$$

L'inégalité (3) est bien vérifiée avec $\overline{\lim} K_i = K < \infty$. Donc, en tous les points x et x' frontières pour un E_p, on a

$$|f(x') - f(x) < K |x' - x|^\alpha$$

et comme ces points sont denses sur E, on a bien $f \in \operatorname{Lip}\alpha(E)$.

Exemple 2. — Appliquons le lemme pour $p = 1$; on peut déterminer les coefficients $\varphi_j = \pm 1$ de façon que

$$\max_t \left| \sum_{j=1}^{k_n} \varphi_j e^{ijt} \right| < A\sqrt{k_n \log k_n}.$$

Pour avoir $f \in A(E)$, il est donc nécessaire que

$$\sum_{j=1}^{k_n} \varphi_j f(j\lambda_n) = O\left(\sqrt{k_n \log k_n}\right) \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Choisissons une suite de valeurs n_i telle que $\dfrac{\log k_{n_i}}{-\log \lambda_{n_i}}$ tende vers μ, avec $n_{i+1} \geq n_i + 2$. Posons

$$f(j\lambda_n) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k_n)$$

chaque fois que n n'appartient pas à la suite $\{n_i\}$, et

$$f(j\lambda_{n_i}) = \varphi_j k_{n_i}^{-\frac{1}{2}} \log k_{n_i} \qquad (j = 1, \ldots, k_{n_i}),$$

φ_j ayant la signification donnée ci-dessus pour $n = n_i$. Alors $f \notin A(E)$. D'autre part, si $\alpha > \frac{\mu}{2}$, on peut choisir i assez grand pour que

$$k_{n_i}^{-\frac{1}{2}} \log k_{n_i} < \lambda_{n_i}^\alpha,$$

d'où, immédiatement,

$$f \in \operatorname{Lip}\alpha(E).$$

4. Démonstration du lemme. — Nous reprenons la méthode de Salem et Zygmund ([3]). Posons

$$P_1 = \text{partie réelle de } P = \sum X_m \varphi_m(t) \qquad \text{et} \qquad R = \sum r_m^2.$$

D'après l'indépendance des $\varphi_m(t)$, et le fait que $\operatorname{Ch} X < e^{\frac{X^2}{2}}$, on a

$$\int_0^1 e^{\lambda P_1}\,dt = \prod_m \int_0^1 e^{\lambda X_m \varphi_m(t)}\,dt = \prod \operatorname{Ch}(\lambda X_m) < e^{\frac{1}{2}\lambda^2 R},$$

d'où

$$\int_0^1 e^{\lambda |P_1|}\,dt < \int_0^1 e^{\lambda P_1}\,dt + \int_0^1 e^{-\lambda P_1}\,dt < 2\,e^{\frac{1}{2}\lambda^2 R}. \tag{4}$$

Posons

$$M_1 = \max_{x_1,\ldots,x_p} |P_1| = \varepsilon P_1(x_1^0, \ldots, x_p^0) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

On a

$$P_1(x_1, \ldots, x_p) - \varepsilon M_1 = (x_1 - x_1^0)\frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \ldots + (x_p - x_p^0)\frac{\partial P_1}{\partial x_p},$$

les dérivées partielles étant prises en un point convenable entre $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ et $(x_1, \ldots, x_p)$. Or

$$\varepsilon_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \ldots + \varepsilon_p \frac{\partial P_1}{\partial x_p} \qquad (\varepsilon_j = \pm 1)$$

est la dérivée de $P_1(\varepsilon_1 u, \ldots, \varepsilon_p u)$ qui est un polynome trigonométrique en u de degré $\leq s$; d'après un théorème bien connu de S. Bernstein, cette dérivée n'excède pas $M_1 s$ en module. Donc

$$|P_1 - \varepsilon M_1| < \theta M_1 \qquad \text{pour} \quad |x_j - x_j^0| < \frac{\theta}{s} \; (j = 1, 2, \ldots, p;\; 0 < \theta < 1).$$

Ainsi $|P_1| > M_1(1-\theta)$ dans un hypercube $\mathcal{H}$ de volume $\left(\frac{2\theta}{s}\right)^p$, et

$$\left(\frac{2\theta}{s}\right)^p \int_0^1 e^{\lambda M_1(1-\theta)}\,dt < \int_0^1 \int \cdots \int_{\mathcal{H}} e^{\lambda |P_1|}\,dx_1 \ldots dx_p\,dt$$

$$< (2\pi)^p \sup_{x_1,\ldots,x_p} \int_0^1 e^{\lambda |P_1|}\,dt.$$

En utilisant (4), on obtient

$$\int_0^1 \exp\left(\lambda M_1(1-\theta) - p\log\frac{\pi s}{\theta} - \frac{\lambda^2 R}{2} - \xi\right) dt < 2\,e^{-\xi}.$$

Donc sur un ensemble en t de mesure supérieure à $1 - 2e^{-\xi}$, on a

$$M_1(1-\theta) < \frac{1}{\lambda}\left(p\log\frac{\pi s}{\theta} + \xi\right) + \frac{\lambda R}{2},$$

d'où, par un choix convenable de λ,

$$M_1(1-\theta) < \sqrt{2}\sqrt{R\left(p\log\frac{\pi s}{\theta} + \xi\right)}.$$

On obtiendrait le même résultat en remplaçant P_1 par la partie imaginaire de P, soit P_2, et M_1 par $M_2 = \max |P_2|$. Comme

$$M \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}(M_1 + M_2),$$

on a, sur un ensemble en t de mesure supérieure à $1 - 4e^{-\xi}$,

$$M(1-\theta) < 2\sqrt{R\left(p \log \frac{\pi s}{\theta} + \xi\right)},$$

ce qui démontre le lemme.

Manuscrit reçu le 22 janvier 1957.