BERNARD MALGRANGE

Faisceaux sur des variétés analytiques réelles

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 231-237

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__231_0>

Bull. Soc. math. France,
83, 1955, p. 231 à 237.

FAISCEAUX SUR DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES ;

PAR

BERNARD MALGRANGE,

Institut de Mathématique,
Université de Strasbourg.

Dans un article récent, H. CARTAN a montré que les résultats essentiels de la théorie des faisceaux analytiques cohérents sur les variétés de Stein (connus sous le nom de « théorèmes A et B ») étaient valables pour les sous-variétés analytiques réelles de l'espace numérique R^n ([3], th. 3). D'autre part, j'ai montré qu'une variété analytique-réelle, réunion dénombrable de compacts, et munie d'un ds^2 analytique pouvait être réalisée comme sous-variété analytique d'un espace R^n [8]. Cet article a pour objet d'apporter à ces résultats les compléments suivants :

1° *Soit V une variété analytique-réelle, réunion dénombrable de compacts, possédant la propriété suivante :*

Pour tout faisceau analytique cohérent F sur V, on a $H^1(V, F) = 0$.

Alors V peut être réalisée comme sous-variété analytique d'un espace R^n.

Pour les variétés analytiques complexes, un résultat analogue a été établi par R. REMMERT [9].

2° *Soit V une variété analytique-réelle (resp. une variété analytique complexe de dimension complexe n), et F un faisceau analytique réel (resp. analytique-complexe) cohérent sur V. Pour $p \geqq 2$ (resp. $p \geqq n+1$), on a $H^p(V, F) = 0$.*

(Lorsque V n'est pas paracompacte, la définition adoptée ici de $H^p(V, F)$ est celle de A. GROTHENDIECK [6].)

1. Pour établir le premier résultat, nous aurons besoin du lemme suivant, dû à H. CARTAN et F. BRUHAT :

LEMME 1. — *Soit V une variété analytique-réelle, réunion dénombrable de* *compacts, et soit E un sous-ensemble analytique non vide de V, de dimension p. Il existe une suite de points $x_n \in E$ sans point d'accumulation dans V, jouissant de la propriété suivante :*

Si un sous-ensemble analytique de E ne contient aucun des x_n, il est de dimension $< p$.

(La définition d'un sous-ensemble analytique, et celle de sa dimension, sont celles de [1].)

Soit, en effet, G_p l'espace des germes de sous-ensemble analytique irréductibles de dimension p aux différents points de V.

On sait [1] que G_p est *localement connexe* par arcs, et que l'ensemble $G_p(E)$ des germes composants irréductibles de dimension p de E est ouvert et fermé dans G_p. Choisissons un point g_i dans chaque composante connexe de $G_p(E)$; les images x_i des g_i dans V n'ont aucun point d'accumulation (sinon, on montrerait facilement que les g_i ont un point d'accumulation g; et une infinité de g_i seraient contenus dans un voisinage connexe de g, ce qui est absurde).

Si un sous-ensemble analytique F de E ne contient aucun des points x_i, $G_p(F)$, ouvert et fermé dans $G_p(E)$, ne contient aucune des composantes de $G_p(E)$, et par suite est vide; donc $\dim F < p$, ce qui démontre le lemme.

Tirons-en quelques conséquences :

a. Le résultat précédent permet de simplifier les démonstrations des propositions 2 et 3 de [8], en raisonnant directement sur les sous-ensembles analytiques d'une variété analytique-réelle, sans qu'il soit nécessaire de « complexifier ». Nous nous dispenserons de refaire les raisonnements, qui restent identiques, à cette modification près.

b. Supposons qu'une variété analytique-réelle V, réunion dénombrable de compacts, possède la propriété suivante :

(P) *Pour toute suite (x_n) de points de V sans point d'accumulation, il existe une fonction f analytique dans V admettant en chacun des x_n un développement limité d'ordre 1 donné.*

Le lemme 1 montre aussitôt qu'il existe un nombre fini $f_1, \ldots, f_N$ de fonctions analytiques dans V, telles que l'application $V \to R^N$ qu'elles définissent soit de rang égal à $\dim V$ en chaque point de V (le raisonnement est le même que celui de [8], prop. 3).

L'expression $\sum_1^N df_i^2$ est un ds^2 analytique sur V; donc V peut être réalisée comme sous-variété analytique d'un espace R^n [8]. Par suite [3], les « théorèmes A et B » sont valables pour V; en particulier, pour tout faisceau analytique cohérent E, sur V, on a, pour $p \geq 1$: $H^p(V, F) = 0$.

Réciproquement, supposons qu'une variété analytique-réelle V, réunion dénombrable de compacts, possède la propriété suivante :

Pout tout faisceau analytique cohérent F sur V, on a : $H^1(V, F) = 0$.

On sait qu'alors elle vérifie la propriété (P) (*cf.* [2], th. 4).

Par conséquent :

THÉORÈME 1. — *Pour une variété analytique-réelle, réunion dénombrable de compacts, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1° *V possède la propriété* (P);
2° *V peut être munie d'un ds^2 analytique;*
3° *V peut être réalisée comme sous-variété d'un espace R^n;*
4° *Pour tout faisceau analytique cohérent F sur V, on a :* $H^1(V, F) = 0$;
5° *V vérifie les « théorèmes* A *et* B ».

Il serait intéressant de savoir si toute variété analytique réelle, réunion dénombrable de compacts, possède ces propriétés. L'un des buts de la seconde partie de cet article est justement de donner un résultat (malheureusement très partiel) dans ce sens.

2. Soit E un espace topologique, et F un faisceau de groupes abéliens sur E. Nous utiliserons la définition des groupes de cohomologie $H^p(E, F)$ donnée par A. GROTHENDIECK (définition qui coïncide avec la définition habituelle lorsque E est paracompact) dans [6].

D'autre part, si $\underline{U} = \{\mathfrak{U}_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E par des ouverts $\mathfrak{U}_i$, nous désignerons, suivant l'habitude, par $H^p(\underline{U}, F)$ le $p^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe des cochaînes de $\underline{U}$ à valeurs dans F.

LEMME 2. — *Avec les définitions précédentes, supposons qu'il existe un entier $p \geq 1$ qui possède les propriétés suivantes :*

1° *Pour toute intersection finie*

$$\mathfrak{U}_{i_1 \ldots i_n} = \mathfrak{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{U}_{i_n}$$

d'ouverts $\in \underline{U}$, et tout entier $k \geq 1$, on a

$$H^k(\mathfrak{U}_{i_1 \ldots i_n}, F) = 0.$$

2° *Pour tout ouvert W contenu dans un $\mathfrak{U}_i$, on a*

$$H^p(W, F) = 0.$$

Alors, $H^{p+1}(E, F) = 0$.

DÉMONSTRATION. — La première hypothèse entraîne que l'on a

$$H^{p+1}(E, F) = H^{p+1}(\underline{U}, F),$$

(*voir* [6], th. 3.7.1); tout revient donc à montrer que $H^{p+1}(\underline{U}, F) = 0$.

Soit donc $c = \{ c_{i_0 \dots i_{p+1}} \}$ une $(p+1)$-cochaîne alternée de $\underline{U}$ à valeurs dans F, vérifiant $\delta c = c$; montrons qu'il existe une p-cochaîne alternée $\gamma = \{ \gamma_{i_0 \dots i_p} \}$ vérifiant $\delta \gamma = 0$. Nous allons montrer qu'on peut, en quelque sorte, déterminer les $\gamma_{i_0 \dots i_p}$ par récurrence, et, pour cela, nous aurons besoin de quelques définitions et notations.

Soit J un sous-ensemble de I; posons

$$E_J = \bigcup_{i \in J} \mathcal{U}_i,$$

et considérons le recouvrement ouvert $\underline{U}_J = \{ \mathcal{U}_i \}_{i \in J}$ de E_J; la cochaîne c induit de manière évidente une $(p+1)$-cochaîne de $\underline{U}_J$ à valeurs dans la restriction de F à E_J, cochaîne que nous noterons c_J (et qui est évidemment elle aussi un cocycle).

Nous appellerons « solution partielle » la donnée (J, γ_J) :

a. d'un sous-ensemble J de I (appelé « ensemble d'indices » de la solution partielle);

b. d'une p-cochaîne γ_J de $\underline{U}_J$, à valeurs dans F, vérifiant $\delta \gamma_J = c_J$.

L'ensemble des solutions partielles est ordonné de façon naturelle : $(J, \gamma_J) < (J', \gamma'_{J'})$ si $J \subset J'$ et si, sur $\underline{U}_J$, $\gamma'_{J'}$ induit γ_J.

L'ensemble ordonné des solutions partielles est visiblement inductif, et non vide; il admet donc un élément maximal (M, γ_M); le lemme sera démontré si nous prouvons que l'on a : $M = I$.

Raisonnons par l'absurde : si $M \neq I$, il existe $a \in I$, $a \notin M$; montrons qu'il existe une solution partielle ayant $M \cup a$ pour ensemble d'indices, et majorant (M, γ_M).

Cela revient à déterminer, pour tout $(i_0, \dots, i_{p-1}) \in M^p$, une section $\alpha_{i_0 \dots i_{p-1} a}$ de F au-dessus de $\mathcal{U}_{i_0 \dots i_{p-1} a}$, vérifiant, pour tout $(i_0, \dots, i_p) \in M^{p+1}$,

$$c_{i_0 \dots i_p a} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \alpha_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_p a} + (-1)^{p+1} (\gamma_M)_{i_0 \dots i_p} \tag{1}$$

au-dessus de $\mathcal{U}_{i_0 \dots i_p a}$.

Considérons alors l'espace $\Omega = \mathcal{U}_a \cap E_M$, et le recouvrement $\underline{\mathcal{O}} = \{ \mathcal{O}_i \}_{i \in M}$ de Ω défini par $\mathcal{O}_i = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_a$, $i \in M$.

D'après l'hypothèse 2, on a $H^p(\Omega, F) = 0$; d'après l'hypothèse 1 et un théorème déjà cité, on a donc aussi : $H^p(\underline{\mathcal{O}}, F) = 0$.

Alors,

$$c' = \{ c'_{i_0 \dots i_p} \} = \{ c_{i_0 \dots i_p a} + (-1)^p (\gamma_M)_{i_0 \dots i_p} \}$$

est une p-cochaîne de $\underline{\mathcal{O}}$ à valeurs dans F. Montrons que c'est un cocycle :

$$(\delta c')_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k c_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1} a} + \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+k} (\gamma_M)_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}}.$$

Puisque (M, γ_M) est une solution partielle, on a

$$\sum (-1)^k (\gamma_M)_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}} = c_{i_0 \dots i_{p+1}}$$

d'où

$$(\delta c')_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k c_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1} a} + (-1)^p c_{i_0 \dots i_{p+1}} = 0,$$

puisque c est un cocycle.

Il existe donc une $(p-1)$-cochaîne $\beta = \{ \beta_{i_0 \dots i_{p-1}} \}$ de $\underline{\mathcal{O}}$ qui vérifie $\delta\beta = c'$ et

$$\{ \alpha_{i_0 \dots i_{p-1} a} \} = \{ \beta_{i_0 \dots i_{p-1}} \}$$

est une solution de (1), d'où le lemme.

THÉORÈME 2. — *Soit V une variété analytique-réelle, et F un faisceau analytique cohérent sur V; pour tout $p \geq 2$, on a : $H^p(V, F) = 0$.*

Si $\mathfrak{U} \subset V$ est un ouvert isomorphe à un ouvert $\subset R^n$, on a, d'après le théorème 1 : $H^p(\mathfrak{U}, F) = 0$ pour tout $p \geq 1$ ($\mathfrak{U}$ est muni d'un ds^2 analytique !) ; il suffit alors de recouvrir V par de tels ouverts, et d'appliquer le lemme 2.

THÉORÈME 3. — *Soit V une variété analytique-complexe, de dimension (complexe) n, et soit F un faisceau analytique cohérent sur V. Pour tout $p > n$, on a : $H^p(V, F) = 0$.*

(Pour un théorème analogue sur les variétés algébriques et les faisceaux algébriques cohérents, *voir* [11].)

Si l'on prend pour $\mathfrak{U}_i$ des ouverts de V isomorphes à des ouverts d'holomorphie de C^n, la première condition de lemme 2 sera remplie ; par suite, le théorème résultera immédiatement du

LEMME 3. — *Soit Ω un ouvert $\subset C^n$ et F un faisceau analytique cohérent sur Ω ; tout point $x \in \Omega$ possède un voisinage ouvert $\mathfrak{U}_x \subset \Omega$ tel que, pour tout ouvert $W \subset \mathfrak{U}_x$, on ait $H^p(W, F) = 0$ si $p \geq n$.*

a. Démontrons d'abord ceci : Ω étant un ouvert quelconque $\subset C^n$, et $\underline{\mathcal{O}}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur Ω, on a, pour $p \geq n$: $H^p(\Omega, \underline{\mathcal{O}}) = 0$. Soit $A^{q,r}$ l'espace des formes différentielles de type (q, r) sur Ω, à coefficients indéfiniment différentiables. D'après un théorème de Dolbeault, tout revient à démontrer que l'application

$$d'' : \quad A^{0, n-1} \to A^{0, n}$$

est surjective [4].

Soit donc $\omega = \alpha \, d\bar{z}_1 \dots d\bar{z}_n$ une forme $\in A^{0,n}$. On sait ([7], chap. III, prop. 7) qu'il existe β, fonction indéfiniment différentiable sur Ω, vérifiant

$$2\,\Delta\beta = \sum \frac{\partial^2 \beta}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_i} = \alpha.$$

Alors,

$$\varpi = \sum (-1)^{i+1} \frac{\partial \beta}{\partial z_i}\, d\bar{z}_1 \ldots \widehat{d\bar{z}_i} \ldots d\bar{z}_n$$

vérifie $d''\varpi = \omega$, d'où a.

b. Soit maintenant F un faisceau analytique cohérent sur Ω, et x un point de Ω. D'après la définition des faisceaux analytiques cohérents, on peut trouver un voisinage ouvert $\mathfrak{U}_x$ de x, des faisceaux sur $\mathfrak{U}_x$, soient $G_i (0 \leqq i \leqq n)$ isomorphes à $\mathcal{O}^k$ (k pouvant dépendre de i), et des homomorphismes $G_i \to G_{i-1}$, $G_0 \to F$ tels que la suite

$$G_n \to G_{n-1} \to \ldots \to G_0 \to F \to 0$$

soit exacte.

On appelle F_i le noyau de l'application $G_i \to G_{i-1}$ $(i \geqq 1)$, F_0 le noyau de l'application $G_0 \to F$, et l'on pose $F_{-1} = F$.

D'après a, on a, pour tout ouvert $W \in \mathfrak{U}_x$, tout $p \geqq n$, et tout i : $H^p(W, G_i) = 0$.

En appliquant la suite exacte de cohomologie, il vient

$$H^p(W, F_i) \approx H^{p+1}(W, F_{i+1}),$$

d'où

$$H^p(W, F) \approx H^{p+1}(W, F_0) \approx \ldots \approx H^{p+n+1}(W, F_n)$$

et, comme $p + n + 1 \geqq 2n + 1$, $H^p(W, F) = 0$, d'où le lemme et le théorème.

Problèmes. — **1.** Soit V une variété analytique complexe *non compacte*, connexe, dénombrable à l'infini, de dimension complexe n, et F un faisceau analytique cohérent sur V; a-t-on toujours : $H^n(V, F) = 0$?

Un raisonnement analogue à celui fait en a montre qu'il en est bien ainsi lorsque F est localement libre; en effet, F est alors le faisceau des sections d'un espace fibré analytique à fibre vectorielle Φ. Soit $A^{p,q}$ l'espace des formes différentielles de type (p, q) sur V à valeurs dans Φ; tout revient à démontrer ([10], th. 1) que l'application

$$d'' : \quad A^{0,n-1} \to A^{0,n}$$

est surjective; or, on vérifie sans difficulté que les conditions d'application de [7] (chap. III, th. 2) sont satisfaites.

2. Soit V une variété analytique complexe, de dimension 1, ou bien non compacte, connexe, dénombrable à l'infini de dimension 2. Le résultat précédent, joint à un théorème de J. Frenkel ([5], th. III.4'), montre ceci :

tout espace fibré principal sur V, de groupe structural un groupe de Lie complexe G résoluble connexe, peut être muni d'une structure analytique compatible avec sa fibration.

Ce résultat est-il encore valable sans la restriction « G résoluble » ? (pour $n = 1$, la réponse est positive, d'après un résultat non publié de J. FRENKEL).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] F. BRUHAT et H. CARTAN, *Sur la structure des sous-ensembles analytiques réels* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 988).

[2] H. CARTAN, *Variétés analytiques complexes et cohomologie* (Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, p. 41).

[3] H. CARTAN, *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes* (*Bull. Soc. math.*, t. 85. 1957, p. 77).

[4] P. DOLBEAULT, *Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 236. 1953, p. 175).

[5] J. FRENKEL, *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés* (*Bull. Soc. math. Fr.*, ce numéro).

[6] A. GROTHENDIECK, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, à paraître au *Tôhoku Math. Journal*,

[7] B. MALGRANGE, *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-1956, p. 271).

[8] B. MALGRANGE, *Plongement des variétés analytiques-réelles* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 85, 1957, p. 101).

[9] R. REMMERT, *Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1956, p. 118).

[10] J.-P. SERRE, *Un théorème de dualité* (*Comm. Math. Helv.*, t. 29, 1955, p. 9).

[11] J.-P. SERRE, *Sur la cohomologie des variétés agébriques* (*J. Math. pures et appl.*, t. 36, 1957, p. 1).

Manuscrit reçu le 27 avril 1957.