BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC KRASNER

Les algèbres cylindriques

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 315-319
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__315_0>

Réunion des Mathématiciens
d'Expression latine (1957, Nice).
Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 315 à 319.

LES ALGÈBRES CYLINDRIQUES;

PAR

MARC KRASNER (1).

(Paris).

Contrairement à ce que M. L'ABBÉ semble penser, les algébristes se sont occupés d'algèbres cylindriques dès 1938 ([1], [3]), du moins dans le cas particulier, où l'algèbre de Boole sous-jacente est complète. Il s'agissait, d'ailleurs, surtout d'algèbres cylindriques concrètes, quoique (du moins dans le travail cité [1] de 1938) l'algèbre abstraite correspondante ait été envisagée sans être définie explicitement. Ces études n'ont par été motivées par des préoccupations logiques, mais avaient comme but principal une très large généralisation abstraite de la théorie de Galois.

Voici le résumé des idées essentielles du travail cité [1], sous une forme légèrement modifiée qu'on trouve dans [2] : Soit E un ensemble et soit U un ensemble auxiliaire, dit l'*ensemble des noms des coordonnées*. Les éléments P de E^U (c'est-à-dire les fonctions définies sur U et à valeurs dans E) sont dits les *U-points de E* (ou simplement des *points* si U et E sont connus sans confusion possible). Des sous-ensembles r de E^U sont dits des *U-relations* de E (ou simplement *relations* si la confusion n'est pas à craindre) et l'on dira que *P satisfait* à r si $P \in r$.

On définit, dans l'ensemble $\mathfrak{R}$ des U-relations de E, les opérations ensemblistes suivantes :

1° L'*opposition* $r \to \bar{r}$, où $\bar{r}$ est le complémentaire de r dans E^U.

2° Pour tout $\bar{U} \subseteq U$, la *$\bar{U}$-cylindrification* (que j'ai appelée *$\bar{U}$-projection*)

---

(1) Le texte ci-après développe l'intervention faite par Marc KRASNER à la suite de la conférence de Maurice L'ABBÉ.

$r \to r_{\overline{U}}$, où $r_{\overline{U}}$ est l'ensemble de tous les points P tels que leur restriction à $\overline{U}$ coïncide avec celle de quelque $P' \in r$.

(Une relation r est dite *identique* sur le complément $\complement \overline{U}$ de $\overline{U}$ dans U si $r_{\overline{U}} = r$.)

3° Pour toute application biunivoque ε d'un $\overline{U} \subseteq U$ quelconque dans U, le *changement* $r \to r^{(\varepsilon)}$ des *noms des variables*. Cette opération est définie seulement pour les relations r identiques sur le complémentaire $\complement \overline{U}$ de $\overline{U}$ et son résultat $r^{(\varepsilon)}$ est la relation identique sur le complémentaire $\complement \overline{U}^{\varepsilon}$ du transformé $\overline{U}^{\varepsilon}$ de $\overline{U}$ par ε, complètement définie par la condition que $P \in r^{\varepsilon)}$ si, et seulement s'il existe un $P' \in r$ tel que, pour tout $u \in \overline{U}$, on ait $P'.u = P.u^{\varepsilon}$.

4° L'*intersection* [appelée le plus grand commun diviseur (p. g. c. d.) dans le travail] $\cap R$ de tout ensemble $R \subseteq \mathfrak{R}$ de relations.

En plus, on envisage une classe particulière de relations, les *relations diagonales* D_{u_1, u_2}, où u_1, u_2 sont des éléments arbitraires de U et où D_{u_1, u_2} est l'ensemble de tous les points P tels que $P.u_1 = P.u_2$.

Les opérations précédentes sont dites les *opérations fondamentales*. Un ensemble $R \subseteq \mathfrak{R}$ de relations est dit *logiquement fermé* s'il l'est par rapport à toutes les opérations fondamentales qu'on peut effectuer sur les $r \in R$ ou ou les $\overline{R} \subseteq R$ et contient une relation diagonale. R étant un ensemble quelconque de relations, le couple $S = (E, R)$ est dit une *U-structure* dans E (ou simplement une *structure* dans E si U est fixé; cette notion de structure, antérieure à celle de Bourbaki, est moins générale que cette dernière du point de vue de l'échelle des ensembles employée). On montre que la famille des sur-ensembles logiquement fermés R' de R contient leur intersection R_f, qui est, ainsi, le plus petit sur-ensemble logiquement fermé de R, dit sa *fermeture logique*. Deux U-structures

$$S = (E, R) \qquad \text{et} \qquad S' = (E, R')$$

dans E sont dites *équivalentes* si les fermetures logiques R_f et R'_f des R et R' respectivement coïncident. On appelle le *corps abstrait* $K(S)$ *défini par* S l'ensemble de toutes les structures équivalentes à S. Si U est fini et si $R \subseteq \mathfrak{R}$ est logiquement fermé, il est clair que R est une algèbre cylindrique concrète si l'on y restreint l'opération $\overline{R} \to \cap \overline{R} (\overline{R} \subseteq R)$ aux $\overline{R} \subseteq R$ finis. Inversement, on peut montrer que toute algèbre cylindrique concrète à l'ensemble des variables U et à support E, qui est, en plus, complète en tant qu'algèbre de Boole, est de la forme précédente.

Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble de symboles x. On regarde d'une manière purement abstraite les $x \in \mathfrak{X}$ comme des variables représentant, pour un U fixé, les U-relations (dans un ensemble fixé, mais indéterminé E) et l'on considère des expressions $f(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ $(x_\alpha \in \mathfrak{X})$ obtenues à partir des $x_\alpha \in X$ et des relations diagonales par des itérations multiples ayant un sens (de telles itérations sont facilement caractérisables à l'aide de certains schémas arborescents infinis) des opérations fondamentales

$$y \to \bar{y}, \qquad y \to y_{\bar{U}}, \qquad y \to y^{(\varepsilon)}, \qquad Y \to \cap Y.$$

Ces expressions $f = f(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ sont dites *fonctions logiques*. Si l'on donne à toute $x_\alpha \in \mathfrak{X}$ une valeur r_α prise dans un ensemble donné R de U-relations d'un ensemble E, et si l'on applique (« concrètement ») aux r_α l'itération multiple des opérations fondamentales, qui est appliquée aux x_α correspondants dans l'expression de $f(\ldots, x_\alpha, \ldots)$, on obtient une U-relation $f(\ldots, r_\alpha, \ldots)$ dans E, qui est dite la valeur de $f(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ pour les valeurs $\ldots, x_\alpha = r_\alpha, \ldots$ de ses arguments x_α. $f(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ et $g(\ldots, x_\alpha, \ldots)$ étant deux fonctions logiques, on a, ou bien

$$f(\ldots, r_\alpha, \ldots) = g(\ldots, r_\alpha, \ldots),$$

ou bien

$$f(\ldots, r_\alpha, \ldots) \neq g(\ldots, r_\alpha, \ldots)$$

auquel cas on dit qu'on a respectivement, pour $x_\alpha = r_\alpha$, l'*identité* ou la *non-identité logique* des $f(\ldots, r_\alpha, \ldots)$ et $g(\ldots, r_\alpha, \ldots)$. Il est clair que si U est fini, si l'on considère seules les fonctions logiques qui sont des itérations multiples *finies*, autrement dit où l'opération $Y \to \cap Y$ est appliquée aux seuls ensembles finis Y, et si $x_\alpha \to r_\alpha$ est une application biunivoque de $\mathfrak{X}$ sur un ensemble logiquement fermé R de relations, de telles $f(\ldots, r_\alpha, \ldots)$ ne sont autre chose que l'ensemble des formules de l'algèbre cylindrique abstraite correspondant à l'algèbre cylindrique concrète R, et les identités et non-identités logiques correspondantes constituent l'ensemble des relations de cette algèbre cylindrique abstraite.

Toutefois le cas, qui donne une bonne « théorie de Galois abstraite » n'est pas, sauf si E est fini, celui de U fini, mais celui où la puissance pU de U est $\geqq pE$. Voici l'essentiel des résultats qu'on obtient sous cette hypothèse :

σ étant une permutation (une application biunivoque sur soi-même) de E (ou, plus généralement, μ étant une application biunivoque de E sur un autre ensemble E'), on note $\sigma.P$ (respectivement $\mu.P$), où P est un U-point de E, le U-point de E (respectivement de E') tel que, pour tout $u \in U$, on ait $(\sigma.P).u = \sigma.(P.u)$ [respectivement $(\mu.P).u = \mu.(P.u)$]; et si r est une relation dans E, on note $\sigma.r$ respectivement $\mu.r$ l'ensemble des $\sigma.P$ respectivement $\mu.P$, où P parcourt r. On dit que σ *préserve* r si $\sigma.r = r$.

$S = (E, R)$ étant une structure dans E, on appelle *groupe de Galois* de E

par rapport à S l'ensemble (qui est un groupe de permutations de E) $g_{E/S}$ des permutations σ de E, qui préservent toute $r \in R$.

On démontre :

1° Loi d'équivalence. — *Deux structures $S = (E, R)$ et $S' = (E, R')$ sont équivalentes si et seulement si $g_{E/S} = g_{E/S'}$.*

2° Loi d'existence. — *Quel que soit le groupe de permutations g de E, il existe de structures $S = (E, R)$ telles que $g_{E/S} = g$.*

(La démonstration de la loi d'existence est triviale, mais non celle de la loi d'équilavence.)

La loi d'équivalence répond à la question suivante : *Etant donné un ensemble R de relations dans E, quelles sont toutes les relations r de E préservées par toutes les permutations σ de E qui préservent toute relation $\in R$? La* réponse est : *Ce sont les valeurs des fonctions logiques pour les valeurs de leurs arguments appartenant à R.* On peut montrer, d'ailleurs, qu'on peut, dans cet énoncé, se limiter à une classe assez restreinte de fonctions logiques, au lieu de les employer toutes.

K étant un corps abstrait dans E, toutes les structures S telles que $K(S) = K$ ont, en vertu de la loi d'équivalence, un même groupe $g_{E/S}$, qui sera noté $g_{E/K}$ et, en vertu de la même loi et de celle d'existence, on a le

Théorème de Galois. — *$K \rightarrow g_{E/K}$ est une application biunivoque de l'ensemble des corps abstraits de E sur celui des groupes de permutations de E.*

Soient $S = (E, R)$ et $S' = (E', R')$ deux U-structures dans deux ensembles E, E' qui peuvent être distincts (mais, naturellement, sont tels que $pE \leqq pU$ et $pE' \leqq pU$). Alors on a la

Loi d'isomorphisme. — *Si ε est une application biunivoque de R sur R', qui est un isomorphisme par rapport aux opérations fondamentales* [autrement dit est telle que pour toutes fonctions logiques $f(\ldots, x_\alpha, \ldots)$, $g(\ldots, x_\alpha, \ldots)$.

$$f(\ldots, r_\alpha, \ldots) = g(\ldots, r_\alpha, \ldots)$$

et

$$f(\ldots, \varepsilon . r_\alpha, \ldots) = g(\ldots, \varepsilon . r_\alpha, \ldots)$$

s'impliquent mutuellement], *E et E' ont une même puissance et il existe une application biunivoque μ_ε de E sur E' telle que, pour tout $r \in R$, on ait $\varepsilon . r = \mu_\varepsilon . r$.* Cette théorie jette une lumière sur l'origine profonde de la théorie de Galois, et, en analysant les caractères de la théorie de Galois ordinaire, qui y permettent le remplacement des opérations fondamentales ensemblistes par les opérations rationnelles, elle permet de caractériser une classe de structures (structures éliminatives) qui ont, dans une certaine mesure, les mêmes caractères.

Le travail de M. SILVA [3] joue le même rôle par rapport au système des *Principia Mathematica* de RUSSEL que le mien par rapport au calcul propositionnel du 1er ordre. M. SILVA peut, toutefois, se borner au cas, où U est fini. Par contre, en plus des opérations fondamentales précédentes (mais concernant les U finis; par contre, $\cap$ se rapporte toujours aux ensembles quelconques de relations), il introduit l'opération

$$R(x_{j(i)}^{(i)}) \to x_{n+1}(x_{j(i)}^{(i)}) \qquad \left[\max_i j(i) = n\right],$$

où $x_{j(i)}^{(i)}$ est une variable propositionnelle de type $j(i) \leqq n$, R une identité logique entre toutes ces variables $x_{j(i)}^{(i)}$ (en nombre fini) et x_{n+1} est une « relation » à laquelle satisfont les valeurs des $x_{j(i)}^{(i)}$ de type correspondant quand elles satisfont à l'identité R et dans ce cas seulement. Ceci posé, on obtient la théorie de Galois de même forme. La théorie analogue, mais où $pU \geqq pE$, peut se déduire de la mienne grâce à la loi d'isomorphisme, mais ce n'est pas le cas pour la théorie où U est fini. Par contre, si U est fini, il faut, en général, pour avoir toutes les relations préservées par les permutations de E préservant toutes les relations $\in R$, employer les valeurs que prennent sur R toutes les fonctions logiques de la théorie de Silva, et non une classe particulière de ces fonctions. On voit ainsi que les deux théories sont analogues, mais chacune permet d'aller plus loin que l'autre dans une certaine direction.

La théorie de M. SILVA peut être considérée comme une théorie des algèbres concrètes généralisant, pour les calculs propositionnels d'ordre quelconque, les algèbres cylindriques complètes du point de vue booléen, et où $\cap$ est étendue à toutes les familles de relations.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] KRASNER (M.). — *Une généralisation de la notion de corps* (*J. Math. pures et appl.*, t. 9, 1958, p. 367-385).

[2] KRASNER (M.). — *Généralisation abstraite de la théorie de Galois* [*Algèbre et théorie des nombres* (Paris, 1949), Centre national de la Recherche scientifique, 1950 (*Coll. intern. C. N. R. S.*, 24); p. 163-168].

[3] SILVA (J. Sebastiao e). — *Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque* (*Pontif. Acad. scient. Comment.*, t. 9, 1945, p. 327-357).

Marc KRASNER,
Directeur de Recherches,
1, rue Ernest-Gouin, Paris, 17e.