JACQUES-LOUIS LIONS

Équations différentielles à coefficients opérateurs non bornés

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 321-330

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__321_0>

Réunion des Mathématiciens
d'Expression latine (1957, Nice).
Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 321 à 330.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A COEFFICIENTS OPÉRATEURS NON BORNÉS;

PAR

JACQUES L. LIONS (*).
(Nancy).

1. Introduction. — Dans un espace de Banach H on donne une famille d'opérateurs *non bornés* $A(t)$, $t\in R$ (ou $t\in R^n$, *cf.* n° 6). Soit $N(t)$ le domaine de $A(t)$. On suppose toujours que les $A(t)$ sont des opérateurs fermés, avec un domaine de définition dense dans H. On cherche une fonction $t\to u(t)$ de R dans H, qui soit une fois continûment différentiable pour $t\geqq 0$, avec

(i) $$u(t)\in N(t) \qquad \text{pour tout } t\geqq 0;$$

(ii) $$A(t)\,u(t)+u'(t)=f(t) \qquad \left[u'(t)=\frac{d}{dt}u(t)\right],$$

où $t\to f(t)$ est une fonction continue donnée de $t\geqq 0$ dans H;

(iii) $$u(0)=0.$$

On s'intéresse à la question suivante (parmi un grand nombre d'autres possibles) : *quand le problème* (i), (ii), (iii) *admet-il une solution unique* ?

Lorsque $A(t)=A$ est un opérateur ne dépendant pas de t, ce problème est résolu par le théorème de Hille-Yosida. Dans le cas d'opérateurs $A(t)$ pouvant dépendre de t, mais avec un domaine $N(t)$ essentiellement indépendant de t, le problème est résolu par T. KATO [9].

Lorsque l'espace H est un *espace de Hilbert* (¹) on peut aller plus loin,

(*) Conférence d'exposition.

(¹) En réalité, avec les notations du n° 2, le point essentiel est que V soit un espace de Hilbert, mais ce n'est pas nécessaire pour H.

i. e. considérer des cas où $N(t)$ dépend essentiellement de t, ceci : *a.* sous des hypothèses suffisantes portant sur les $A(t)$ (*cf.* n° 2); *b.* avec des définitions convenables de solution (*cf.* n° 3).

On énonce un résultat au n° 4, en donnant le plan de la démonstration; des applications sont données au n° 5 et des généralisations indiquées au n° 6.

2. Construction d'opérateurs $A(t)$. — Soient V et H deux espaces de Hilbert séparables, avec $V \subset H$ (algébriquement et topologiquement), V étant dense dans H. Si $u, v \in V$, on désigne par $((u, v))$ leur produit scalaire dans V et par $\|u\|$ la norme de u dans V. Si $f, g \in H$, (f, g) désigne leur produit scalaire, et $|f|$ la norme de f.

On donne une forme sesquilinéaire continue $a(u, v)$ sur V [i. e. linéaire en u et semi-linéaire en v, ce qui signifie en particulier : $a(u, \lambda v) = \bar{\lambda} a(u, v)$ pour $\lambda \in C$]. La donnée de cette forme continue définit un opérateur non borné A avec son domaine de définition N (*cf.* [12], [13]) :

On désigne par N le sous-espace de V formé des u tels que la forme semi-linéaire

$$v \to a(u, v)$$

soit continue sur V muni de la topologie induite par H. Alors, V étant dense par H, cette forme est définie par un produit scalaire dans H :

$$a(u, v) = (Au, v), \tag{2.1}$$

ce qui *définit* $Au \in H$, pour $u \in N$.

En général, i. e. sans aucune hypothèse sur $a(u, v)$, N n'est pas dense (on peut avoir $N = \{0\}$) et A n'est pas fermé. Mais si l'on suppose qu'il existe un nombre réel λ tel que

$$|a(v, v) + \lambda |v|^2| \geq \alpha \|v\|^2 , \qquad \alpha > 0, \qquad \text{pour tout } v \in V, \tag{2.2}$$

alors on voit facilement que A est un opérateur fermé à domaine de définition dense.

Comme on a déjà signalé dans ([1]), le fait utile dans cette construction est que V soit un espace de Hilbert, mais H peut être un espace vectoriel topologique localement convexe quelconque (*cf.* [12]).

Les opérateurs $A(t)$ utilisés dans la suite sont construits par le procédé ci-dessus : on se donne une famille $a(t; u, v)$ de formes sesquilinéaires sur V (pour tout t fixé); ceci définit, pour tout t, un opérateur $A(t)$ avec son domaine de définition $N(t)$. Naturellement, il faudra faire une hypothèse sur la façon dont les $a(t; u, v)$ dépendent de $t(u, v$ fixés) : continûment, différentiablement, etc.

Remarque 2.1. — Plus généralement, on peut considérer une famille d'espaces de Hilbert $V(t)$, dépendant de t.

3. Les définitions possibles des solutions du problème. — Le problème (i), (ii), (iii) est le problème « naturel », avec les hypothèses de différentiabilité les plus raisonnables. Une solution du problème (i), (ii), (iii) sera dite *solution usuelle*.

En fait (comme il est classique dans la théorie des équations aux dérivées partielles) il peut être utile, voire fondamental, d'introduire des solutions généralisées du problème. Voici comment on peut procéder.

SOLUTION PRESQUE PARTOUT (p.p) (*cf.* [14]). — On cherche une fonction $u(t)$ absolument continue à valeurs dans H, (i) et (ii) ayant lieu p.p.

SOLUTION FAIBLE [2]. — Il suffit évidemment de résoudre le problème dans le cas d'un intervalle fini $[0, \mu]$. Soit $\mathcal{H}$ l'espace des fonctions $t \to h(t)$ une fois continûment différentiables de $[0, \mu]$ dans H, avec $h \in L^2(0, \mu), V) =$ espace des fonctions de carré sommable à valeurs dans V, et avec $h(\mu) = 0$. Alors si u est solution usuelle du problème et si l'on suppose par exemple que

$$t \to a(t;\, u, v) \quad \text{est continue,}$$

alors

$$\int_0^\mu a(t;\, u(t), h(t))\, dt - \int_0^\mu (u(t), h'(t))\, dt = \int_0^\mu (f(t), h(t))\, dt. \tag{3.1}$$

Mais sous la forme (3.1) le problème naturel est le suivant : on cherche une fonction u dans $L^2((0, \mu), V)$, vérifiant (3.1) pour tout $h \in \mathcal{H}$, la fonction f étant donnée dans $L^2((0, \mu), H)$.

Une solution de ce problème sera appelée *solution faible* du problème (i), (ii), (iii).

SOLUTION ULTRA-FAIBLE. — Soit $A^*(t)$ l'opérateur adjoint de $A(t)$ dans H, $N^*(t)$ son domaine de définition. Soit $\mathcal{H}_1$ l'espace des fonctions $h \in \mathcal{H}$ et telles que

$$h(t) \in N^*(t) \qquad \text{pour tout } t \in [0, \mu]$$

et que

$$A^*(t)\, h(t) \quad \text{soit dans } L^2((0, \mu), H).$$

Alors si u est solution faible, on a

$$\int_0^\mu (u(t), A^*(t)\, h(t))\, dt - \int_0^\mu (u(t), h'(t))\, dt = \int_0^\mu (f(t), h(t))\, dt. \tag{3.2}$$

Sous cette forme, le problème naturel est : on cherche une fonction u dans $L^2((0, \mu), H)$ [et non plus $L^2((0, \mu), V)$] vérifiant (3.2) pour

[2] Les solutions faibles et ultra-faibles ont été introduites dans le cas particulier d'opérateurs hyperboliques du deuxième ordre par SOBOLEFF, [21].

tout $h \in \mathcal{H}_1$. Une solution de ce problème sera appelée *solution ultra-faible* du problème (i), (ii), (iii).

REMARQUE 3.1. — Dans le cas d'espace $V(t)$ dépendant de t, l'espace $L^2((0, \mu), V)$ sera remplacé par une somme mesurable (*cf.* [4]), d'où aussitôt la généralisation à ce cas de la notion de solution faible ([3]).

REMARQUE 3.2. — On arrive aussi à la notion de solution ultra-faible en considérant $A(t) + \frac{d}{dt}$ comme opérateur non borné dans l'espace $L^2((0, \mu), H)$. Naturellement dans ce cas les espaces V ne jouent aucun rôle.

SOLUTION DISTRIBUTION VECTORIELLE (*cf.* [12], [13]). — Si E est un espace de Banach (pour fixer les idées), on rappelle (*cf.* [20]) qu'on appelle distribution en t à valeurs dans E toute application linéaire continue de $\mathcal{D}$ dans E, où $\mathcal{D}$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à valeurs complexes et à support compact, muni de la topologie de Schwartz.

On désigne ensuite par $\mathcal{D}'_+(E)$ l'espace des distributions en t à valeurs dans E et *à support limité à gauche.*

On suppose maintenant que $a(t; u, v)$ est donnée pour tout t et que la fonction $t \to a(t; u, v)$ (u, v fixés) est indéfiniment différentiable.

Si $u(t)$ est une fonction continue de R dans V, à support limité à gauche, on désigne par

$$a(t; \vec{u}, v)$$

la fonction

$$t \to a(t; u(t), v);$$

évidemment $a(t; \vec{u}, v)$ est dans l'espace $\mathcal{D}'_+$ des distributions à support limité à gauche; on a ainsi défini une application

$$\vec{u} \to a(t; \vec{u}, v)$$

de l'espace des fonctions continues à valeurs dans V et à support limité à gauche dans l'espace $\mathcal{D}'_+$; il résulte de [20] que cette application peut se prolonger par continuité à l'espace $\mathcal{D}'_+(V)$; est ainsi définie une application linéaire continue

$$\vec{u} \to a(t; \vec{u}, v) \text{ de } \mathcal{D}'_+(V) \text{ dans } \mathcal{D}'_+.$$

Par ailleurs si $\vec{u} \in \mathcal{D}'_+(V)$, et si $D = \frac{d}{dt}$, $(D\vec{u}, v)$ est défini et appartient à $\mathcal{D}'_+$.

([3]) Il n'y a pas de difficulté spéciale pour les théorèmes d'existence, en utilisant la méthode [16]. Nous n'avons pu démontrer l'unicité que dans des cas particuliers.

On est alors conduit au problème suivant : étant donné $\vec{T}$ dans $\mathcal{D}'_+(H)$, on cherche $\vec{u}$ dans $\mathcal{D}'_+(V)$ vérifiant

$$(3.3) \qquad a(t;\vec{u}, v) + (D\vec{u}, v) = (\vec{T}, v) \qquad \text{pour tout } v \in V.$$

Une solution de ce problème sera appelée *solution-distribution à valeur vectorielle* du problème (i), (ii), (iii).

Autres questions. — Pour avoir une liste complète (?) des questions relatives aux solutions, il faut ajouter ceci : étant donnée une fonction f, k fois continûment différentiable à valeurs dans H, que peut-on dire de la régularité de la solution ?

Il faut également signaler le travail de Trèves [22], à paraître.

4. Un résultat. — Il y a dans les travaux cités des résultats relatifs à tous les problèmes posés ci-dessus, les hypothèses variant avec les énoncés. On donne ici un résultat sur les solutions-distributions vectorielles (solutions qui donnent lieu aux *énoncés* les plus simples).

Théorème 4.1. — *On suppose que la fonction $t \to a(t; u, v)$ est indéfiniment différentiable sur R, et que pour tout nombre fini μ il existe λ tel que*

$$\operatorname{Re} a(t; v, v) + \lambda |v|^2 \geqq \alpha \| v \|^2,\ \alpha > 0, \qquad \textit{pour tout } v \in V,\ t \in]-\infty, \mu].$$

Dans ces conditions, pour tout $\vec{T}$ donné dans $\mathcal{D}'_+(H)$ il existe $\vec{u}$ unique dans $\mathcal{D}'_+(V)$, solution de (3.3).

En outre, si $\vec{T}$ est nulle pour $t < t_0$, alors $\vec{u}$ est nulle pour $t < t_0$.

On donne seulement ici le plan d'une démonstration.

a. Il suffit de résoudre le problème sur un intervalle fini. Or on sait que sur tout intervalle ouvert borné, une distribution à valeurs dans un espace de Banach est dérivée d'ordre fini d'une fonction continue (ou k fois continûment différentiable) à valeurs dans cet espace de Banach. Ceci permet de transformer le problème (3.3) en un problème relatif à des fonctions, pour une équation analogue, mais avec des termes complémentaires intégro-différentiels.

Pour simplifier, on ne considère pas ces termes complémentaires.

b. On a alors à construire une solution de (3.3), T étant une fonction, par exemple, une fois continûment différentiable.

On utilise pour cela une méthode d'approximation de la solution par des solutions approchées (méthode de Faedo-Galerkine, *cf.* [5], [3], [7], [8], [11], [13], [23], [24].

Précisons ce point. Soit $w_1, \ldots, w_n, \ldots$ une base de l'espace V; on définit les fonctions $g_{in}(t)$, $i=1, \ldots, n$, comme étant les solutions du système différentiel

$$\sum_i g'_{in}(t)\,(w_i, w_j) + \sum_i g_{in}(t)\, a(t;\, w_i, w_j) = (T(t), w_j) \qquad (j=1, \ldots, n),$$

avec $g_{in}(0)=0$ [en supposant $T(t)=0$ pour $t \leqq 0$].

On pose ensuite

$$u_n(t) = \sum_i g_{in}(t)\, w_i,$$

ce qui définit les « solutions approchées ». A l'aide de majorations *a priori*, on peut en déduire par passage à la limite, une solution locale du problème. On passe ensuite à une solution globale.

L'unicité est démontrée en raisonnant directement sur l'équation avec termes complémentaires.

L'hypothèse essentielle

$$\operatorname{Re} a(t;\, v, v) + \lambda\, |v| \geqq \alpha\, \|v\|^2$$

intervient dans l'obtention de majorations *a priori* (4).

5. **Applications.** — Dans les applications, t est le temps, $A(t)$ un opérateur différentiel, son domaine $N(t)$ étant défini par des conditions aux limites.

Nous prenons pour H le cas le plus simple : $H = L^2(\Omega) =$ espace des (classes de) fonctions de carré sommable sur un ouvert Ω quelconque de R^n; alors, avec les notations précédentes :

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, dx$$

On désigne par $H^m(\Omega)$ l'espace des classes de fonctions u telles que $D^p u \in L^2(\Omega)$ pour tout $|p| \leqq m$ (les dérivées étant prises au sens des distributions sur Ω). On pose

$$\|u\|_m = \left(\sum_{|p| \leqq m} |D^p u|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On désigne par H_0^m la fermeture dans $H^m = H^m(\Omega)$ du sous-espace des fonctions à support compact dans Ω. On désigne par V un sous-espace

(4) Pour une démonstration détaillée dans le cas plus général d'opérateurs

$$A(t) + B(t)\frac{d}{dt} + C(t)\frac{d^2}{dt^2}, \quad \textit{cf.}\ [13].$$

vectoriel fermé de H^m, avec

$$H_0^m \subset V \subset H^m.$$

On considère

$$(5.1) \quad a(t;\, u,\, v) = \sum_{|p|,|q|\leq m} \int_\Omega a_{pq}(x,\, t)\, D^q u\, \overline{D^p v}\, dx \qquad (u,\, v \in H^m),$$

où

$$a_{pq}(x,\, t) \in L^\infty(\Omega) \qquad \text{pour tout } t \geqq 0 \quad (\text{ou } t \in R).$$

On suppose que $t \to a(t;\, u,\, v)$ est continue ou suffisamment différentiable et que

$$\operatorname{Re} a(t;\, v,\, v) + \lambda |v|^2 \geqq \alpha \|v\|_m^2, \qquad \alpha > 0, \qquad t \in [0,\, \mu],$$

ce qui est une hypothèse d'ellipticité.

L'opérateur $A(t)$ est donné (sur H^m) par

$$A(t) = \sum (-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x,\, t) D^q);$$

on voit facilement que dans ce cas l'espace $N(t)$ est l'espace des fonctions $u \in V$ telles que $A(t)u \in L^2(\Omega)$ et que

$$(A(t)u,\, v) = a(t;\, u,\, v) \qquad \text{pour tout } v \in V.$$

Cette dernière condition, jointe à « $u \in V$ » exprime que u vérifie certaines conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, mêlé, etc.; pour des exemples, *cf.* [12], chap. I).

Plus généralement, on pourra prendre des formes $a(t;\, u,\, v)$ du type (5.1) mais augmentées d'intégrales superficielles. Cela conduit aux problèmes de dérivée oblique (*cf.* [15]).

Le problème (i), (ii), (iii) devient dans ce cas : on cherche une fonction (ou une distribution) $u(x,\, t)$, solution de

$$A(t)u + \frac{\partial}{\partial t} u = T,$$

avec

$$u(x,\, 0) = 0 \quad (^5)$$

et $u(x,\, t)$ vérifie pour tout $t > 0$ les conditions aux limites équivalentes à l'appartenance à $N(t)$.

On a des critères d'existence et d'unicité pour les solutions usuelles, les solutions faibles, etc. Ceci résout de très larges classes de *problèmes mixtes* au sens de M. Hadamard.

---

(5) Cette condition est remplacée par une condition de support lorsqu'on pose le problème dans des espaces de distributions.

Il faut ici faire la remarque suivante : supposons que nous ayons trouvé une solution usuelle (au sens du n° 2) du problème mixte; cela signifie que $t \to u(t)$ est une fois continûment différentiable de $t \geqq 0$ dans $L^2(\Omega)$, et continue de $t \geqq 0$ dans V; il en résulte facilement que pour tout $t \geqq 0$ fixé, $u(t)$ est dans $N(t)$, donc que $u(t)$ vérifie *les conditions aux limites du problème mixte dans un sens faible en x.*

Ceci n'est donc pas une *solution classique* du problème mixte, en appelant solution classique une fonction suffisamment différentiable en x et t, et vérifiant les conditions aux limites en tout point de la frontière de Ω.

Il n'est pas possible d'obtenir l'existence de la solution classique par des résultats généraux abstraits; et avec $H = L^2(\Omega)$, il faut naturellement faire des hypothèses de régularité sur les coefficients de $A(t)$ et *sur la frontière de* Ω (Ω était jusqu'ici quelconque). Avec ces hypothèses, et en utilisant les résultats et les méthodes de [1], [19], on démontre l'existence de la solution classique (*cf.* [13]).

Pour des cas particuliers relatifs à l'ordre 2, *cf.* [6], [18].

Remarque 5.1. — On peut naturellement poser les problèmes mixtes dans des ouverts non cylindriques. Nous reviendrons sur ce point, à l'aide des espaces $V(t)$. Pour des méthodes directes, *cf.* [2], [16].

6. Quelques variantes. — Par des méthodes analogues à celles brièvement indiquées au n° 4 on peut étudier les problèmes suivants :

1° *Conditions différentielles à la frontière.* — Bornons-nous à un exemple : dans un ouvert borné Ω de R^n, on considère le laplacien Δ et l'on cherche $u(x, t)$ solution de

$$\Delta u(x, t) = 0 \qquad \text{pour} \quad t \geqq 0,$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial}{\partial n} u + \frac{\partial}{\partial t} u = 0 \quad \text{sur la frontière } \Gamma \text{ de } \Omega,$$

$u(x, 0)$ étant donné sur Γ (des problèmes de ce genre interviennent en Hydrodynamique). Bien entendu il s'agit de définir de façon précise ce qu'on entend par « solution » de ce problème, ce qui peut être fait au sens classique ou comme au n° 3. On peut montrer des résultats analogues au théorème 4.1 (*cf.* [13]) ([6]).

2° *Equations aux dérivées partielles à coefficients non bornés.* — Bornons-nous à renvoyer à[17]).

([6]) Dans l'exemple ci-dessus, on peut plus simplement utiliser une transformation de Laplace en t.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ARONSZAJN (N) and SMITH (K. T.). — *Functional spaces and functional completion* ((à paraître).

[2] BROWDER (F. E.). — *Parabolic systems of differential equations...* (*Proc. nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 42, 1956, p. 914-917).

[3] CHIFFI (Antonio). — *Analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazime* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 9, 1955, p. 247-281).

[4] DIXMIER (Jacqnes). — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Paris, Gauthier-Villars, 1957 (*Cahiers scientifiques*, 25).

[5] FAEDO (Sandro). — *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa...* (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 1, 1949, p. 1-40).

[6] GAGLIARDO (Emilio). — *Teoremi di existenza e di unicità per problemi al contorno relativi ad equazioni paraboliche lineari e quasi lineari in n variabili* (*Ricerche di Matematica*, t. 5, 1956, p. 239-257).

[7] GREEN (J. W.). — *An expansion method for parabolic partial differential equations* (*J. Res. Nat. Bur. Stand.*, t. 51, 1953, p. 127-132).

[8] HOPF (Eberhard). — *Ueber die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen* (*Math. Nachr.*, t. 4, 1950, p. 213-231).

[9] KATO (Tosio). — *Integration of the equation of evolution in a Banach space* (*J. Math. Soc. Japan*, t. 5, 1953, p. 208-234).

[10] LADYŽENSKAJA (O. A.). — *Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques*, Moscou, 1953.

[11] LADYŽENSKAJA (O. A.). — *Équations opérationnelles non stationnaires* [*Mat. Sbornik*, t. 39 (81), 1956, p. 491-524].

[12] LIONS (J. L.). — *Problèmes aux limites en théorie des distributions* (*Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 13-153) (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1954).

[13] LIONS (J. L.). — *Boundary value problems.* Lawrence, University of Kansas, 1957 (*Technical Report*, 1, 2, 3).

[14] LIONS (J. L.). — *Sur certains problèmes mixtes* (*C. R. Acad. Sc.*, t., 240, 1955, p. 390-392).

[15] LIONS (J. L.). — *Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique* (*Ann. of Math.*, t. 64, 1956, p. 208-239).

[16] LIONS (J. L.). — *Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*) t. 7, 1957, p. 143-182.

[17] LIONS (J. L.). — *Sur certaines équations aux dérivées partielles à coefficients opérateurs non bornés* (*J. Anal. Israël*) t. 6, 1958, p. 333-355.

[18] MAGENES (Enrico). — *Sull'equazione del calore teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione de M. Picone* (*Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, t. 21, 1952, p. 99-123 et 136-170).

[19] NIRENBERG (Louis). — *Remarks on strongly elliptic partiel differential equations* (*Comm. pure and appl. Math.*, t. 8, 1955, p. 648-674).

[20] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble*, t. 7, 1957, p. 1-141).

[21] SOBOLEFF (S. L.). — *Doklady*, t. 48, 1945, p. 542-545 et 618-620; t. 49, 1945, p. 12-15.

[22] TRÈVES (François). — *Relations de domination entre opérateurs différentiels* (*Acta Math.*) (à paraître).

[23] VISIK (I. M.). — *Mat. Sbornik*, t. 39 (81), 1956, p. 51-148).

[24] VISIK (I. M.) et LADYŽENSKAJA (O. A.). — *Problèmes aux limites pour équations*

aux dérivées partielles et certaines classes d'équations opérationnelles. (*Uspekhi Mat. Nauk*, t. 11, 1956, n° 6, p. 41-97).

Bibliographie complémentaire (ajoutée à la correction des épreuves). — Foias-Gussi-Poenaru, *Doklady*, t. 119, 1958, p. 884-887; Sobolewsky (P. E.), *Doklady*, t. 122, 1958, p. 994-996; t. 123, 1958, p. 984-987; Lions (J. L.), *C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 1099-1102.

Jacques L. Lions,
Maître de Conférences
à la Faculté des Sciences de Nancy,
2, rue de la Craffe,
Nancy (Meurthe-et-Moselle).