BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN LERAY

La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire. (Problème de Cauchy. II.)

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 75-96

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__75_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 75 à 96.

LA SOLUTION UNITAIRE D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE (¹) (PROBLÈME DE CAUCHY, II) (²);

PAR

JEAN LERAY.

INTRODUCTION

Nous nommons *solution unitaire* d'un opérateur différentiel linéaire $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ la solution $U(\xi, x)$ du problème de Cauchy le plus simple : second membre égal à 1, données de Cauchy nulles sur l'hyperplan d'équation $\xi_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l = 0$. Nous notons $U^\star(\xi, x)$ la solution unitaire de *l'adjoint* $a^\star$ de a. Nous allons en établir les propriétés, que [IV] et [V] utiliseront.

En effet [IV] définira, par une intégrale, une transformation fonctionnelle, prolongeant la transformation de Laplace, qui transformera $U^\star(\xi, x)$ en la solution élémentaire de a, supposé hyperbolique. Et [V] définira, par une intégrale, une autre transformation fonctionnelle, prolongeant la convolution par une transformée de Laplace, qui transformera $U^\star(\xi, x)v(x)$ en la solution $u(x)$ du problème de Cauchy :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = v(x), \qquad u(x) \text{ s'annule } m \text{ fois sur } S;$$

m désigne l'ordre de a, qui n'est plus supposé hyperbolique.

(¹) Cet article a été résumé aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 245, 1957, p. 2146-2152.

(²) Nous désignons cette série d'articles par [I], [II], ...

[I] *Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 85, 1957, p. 389-429).

Cet article-ci déduit de [I] une *uniformisation de la solution unitaire* $U(\xi, y)$ applicable au cas où ξ est variable, mais y *fixe* (théorème 1, n° 2). Puis, sans utiliser cette uniformisation et en supposant $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ à coefficients polynomiaux, il établit la *réciprocité* de la solution unitaire : *l'adjoint* $a^*\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ et *le transformé de Laplace* $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ont *même solution unitaire* $U^*(\xi, x)$ à des dérivations $-\frac{\partial}{\partial \xi_0}$ près; ces dérivations seront d'ailleurs transformées en l'opération identique par ces transformations fonctionnelles que définiront [IV] et [V] (théorème 4, n° 3). En particulier, quand $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est un opérateur homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$, *à coefficients linéaires*, cette réciprocité réduit la recherche de U et U^* à la détermination *des bicaractéristiques* de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et à des calculs d'intégrales (théorème 5, n° 4).

1. Notations. — X est un domaine d'un *espace affin* sur le corps des nombres complexes; $\dim X = l$; x et y sont des points de X; les coordonnées de x sont notées $(x_1, \ldots, x_l)$.

ξ et η sont *des fonctions linéaires* de x, à valeurs numériques complexes; la valeur de ξ en x est

$$\xi . x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l; \tag{1.1}$$

$(\xi_0, \ldots, \xi_l)$ sont les coordonnées de ξ; les ξ constituent un espace vectoriel Ξ de dimension $l+1$. Nous nommons Q la quadrique de $\Xi \times X$ d'équation

$$Q : \quad \xi . x = 0,$$

ξ^* désigne l'hyperplan de X d'équation

$$\xi^* : \quad \xi . x = 0.$$

Les ξ^* constituent un espace projectif, Ξ^*, de dimension l, image de Ξ.

Soit un polynome en ξ, indépendant de ξ_0, à coefficients fonctions holomorphes de $x \in X$:

$$a(x, \xi) = \sum_{j_1+\ldots+j_l \leq m} a_{j_1\ldots j_l}(x) \xi_1^{j_1} \ldots \xi_l^{j_l}; \tag{1.2}$$

son degré est m; sa *partie principale* est le polynome homogène de degré m :

$$h(x, \xi) = \sum_{j_1+\ldots+j_l = m} a_{j_1\ldots j_l}(x) \xi_1^{j_1} \ldots \xi_l^{j_l}; \tag{1.3}$$

on note $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *l'opérateur différentiel linéaire* d'ordre m :

$$(1.4)\qquad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j_1+\ldots+j_l \leq m} a_{j_1\ldots j_l}(x) \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_l}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_l^{j_l}}.$$

Si

$$b(\xi, x) = a(x, \xi),$$

alors $b\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ désigne un autre opérateur différentiel linéaire d'ordre m :

$$b\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right) u(x) = \sum_{j_1+\ldots+j_l \leq m} \frac{\partial^{j_1+\ldots+j_l}}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_l^{j_l}} [a_{j_1\ldots j_l}(x) u(x)].$$

Notons

$$a^*(\xi, x) = a(x, -\xi), \qquad a^*(x, \xi) = a(-\xi, x);$$

$a^*\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ est appelé adjoint de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$; $a^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'adjoint de $a\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$; a est l'adjoint de a^*.

Théorème. — Transformer les coordonnées de X par une transformation affine [donc celles de Ξ par une transformation linéaire telle que (1.1) subsiste] n'altère pas les correspondances

$$a(x, \xi) \to a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \to a^*\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right).$$

Définition 1. — Nous nommons solution unitaire de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ la solution $U(\xi, y)$ du problème de Cauchy

$$(1.5)\qquad a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U(\xi, y) = 1; \qquad U(\xi, y) \text{ s'annule } m \text{ fois pour } \xi.y = 0.$$

$U(\xi, y)$ est évidemment homogène de degré 0 en ξ : c'est une fonction de (ξ^*, y).

2. Uniformisation de la solution unitaire U de a.

Définition 2.1. — Considérons le système d'Hamilton ([3])

$$(2.1)\qquad \begin{cases} dx_j = h_{\xi_j}(x, \xi)\, dt, \qquad d\xi_j = -h_{x_j}(x, \xi)\, dt \qquad (j = 1, \ldots, l), \\ d\xi_0 = \left[\sum_j x_j h_{x_j} - h\right] dt. \end{cases}$$

h_{x_j} désigne $\frac{\partial h}{\partial x_j}$.

([3]) Les équations d'Hamilton et de Jacobi se rencontrent en Mécanique analytique; *voir* E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, n^{os} 14 et 33.

Ce système différentiel admet les intégrales premières

$$(2.2) \qquad \xi . x + (1 - m) t h(x, \xi), \quad h(x, \xi)$$

et la forme différentielle invariante

$$(2.3) \qquad (d\xi) . x + h(x, \xi)\, dt;$$

c'est d'ailleurs le seul système pour lequel cette forme est invariante : *voir* n° 5.

Notons

$$\xi(t, \eta, y), \quad x(t, \eta, y),$$

la solution de (2.1) issue du point

$$(2.4) \qquad (\eta, y) \in Q,$$

c'est-à-dire telle que

$$\xi(0, \eta, y) = \eta, \qquad x(0, \eta, y) = y, \qquad \eta . y = 0.$$

Puisque $h(x, \xi)$ est homogène en ξ de degré m, $\xi(t, \eta, y)$ est une fonction de $\left(t^{\frac{1}{1-m}}, \eta\right)$ homogène de degré 1 ; $\xi(t, \eta, y)$ est holomorphe pour

$$(2.5) \qquad |t| < \rho(\eta, y),$$

$\rho(\eta, y)$ étant continue > 0 ; pour tout nombre complexe θ :

$$\rho(\theta \eta, y) = |\theta|^{1-m} \rho(\eta, y).$$

Nous nommons *voisinage caractéristique* de Q la variété analytique Φ que constituent les (t, η, y) vérifiant (2.4) et ou bien (2.5), ou bien une condition analogue plus stricte.

L'application holomorphe de Φ dans $\Xi \times X$:

$$(t, \eta, y) \to (\xi(t, \eta, y), y)$$

est nommée *projection caractéristique.* Elle applique homéomorphiquement sur Q la variété de Φ d'équation $t = 0$; nous convenons d'identifier le point $(0, \eta, y) \in \Phi$ et sa projection $(\eta, y) \in Q$:

$$Q \subset \Phi.$$

Φ est un *voisinage de Q au-dessus de $\Xi \times X$*, au sens du n° 3 de [I], dont nous emploierons la terminologie.

Note. — Rappelons que les équations d'Hamilton (2.1) deviennent les équations des caractéristiques de *l'équation de Jacobi.*

$$V_t + h(x, V_x) = 0,$$

quand on pose

$$\xi_j = V_{x_j}, \qquad \xi.x = V.$$

En particulier, définissons

$$V(t, \eta, y) = \xi(t, \eta, y).x(t, \eta, y);$$

éliminons η, qui vérifie $\eta.y = 0$, de

$$V(t, \eta, y), \qquad x(t, \eta, y);$$

nous obtenons une fonction multiforme

$$V[t, x, y],$$

homogène en t de degré $1/(1-m)$, solution de l'équation de Jacobi, donc de l'équation

$$V + (1-m)t\,h(x, V_x) = 0,$$

nulle sur l'ensemble K, que va définir le théorème 1, 3°.

Voici le *théorème d'uniformisation* qu'emploieront [IV] et [V] :

THÉORÈME 1. — 1° *La solution unitaire $U(\xi, y)$ et ses dérivées en (ξ, y) d'ordre $< m$ sont holomorphes sur un voisinage caractéristique Φ de Q.*

2° *Le déterminant fonctionnel* $\dfrac{D(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l, y_1, \ldots, y_l)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l, y_1, \ldots, y_l)}$ *de la projection caractéristique est le produit de $h(y, \eta)$ par une fonction holomorphe ne s'annulant pas. La variété Δ où s'annule ce déterminant a donc pour équation*

$$\Delta: \quad h(y, \eta) = 0. \tag{2.6}$$

3° *La projection caractéristique projette Δ sur l'ensemble K des points (ξ, y) de $\Xi \times X$ tels que l'hyperplan ξ^* touche le conoïde caractéristique* (4) *de sommet y.*

4° *Près d'un point ordinaire de Q :*

K est un ensemble analytique de dimension complexe $2l$;

Φ est un revêtement fini de X ramifié au-dessus de K,

$U(\xi, x)$ est une fonction algébroïde, se ramifiant sur K et dont le degré est le degré de ramification (5) *de Φ.*

Le degré de cette ramification est 1, *c'est-à-dire $U(\xi, x)$ est holomorphe, en un point (η, y) de Q non caractéristique, c'est-à-dire où*

$$\eta.y = 0, \qquad h(y, \eta) \neq 0.$$

(4) [I], n° 2 rappelle la définition de ce conoïde.

(5) [I], n° 6, rappelle la définition de ces termes.

Ce degré est 2 et K est une variété régulière en un point (η, y) de Q caractéristique régulier, c'est-à-dire où

$$\eta \cdot y = 0, \qquad h(y, \eta) = 0, \qquad \sum_j h_{y_j} h_{\eta_j} \neq 0.$$

Un point (η, y) de Q est *ordinaire* quand il n'est pas exceptionnel; quand il est *exceptionnel*, l'hyperplan η^* de X touche le conoïde caractéristique de sommet y le long d'une courbe passant par y. Plus précisément :

Définition 2.2. — Le point (η, y) de Q est *exceptionnel* quand il existe dans X une bande bicaractéristique, issue de y, fonction holomorphe d'un paramètre t et dont l'élément de contact de paramètre t appartient à η^*; t est une variable numérique voisine de 0.

Ce théorème **1** sera établi aux n[os] **6** et **7**.

3. **Réciprocité de la solution unitaire.** — Soit $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynomiaux : $a(x, \xi)$ est un polynome en (x, ξ). Notons n le plus petit entier tel que

$$x_0^n a\left(\frac{x}{x_0}, x_0 \xi\right)$$

soit un polynome en (x_0, x, ξ); n est de signe quelconque; x_0 est une variable numérique. Notons

$$x_0^n a\left(\frac{x}{x_0}, x_0 \xi\right) = A(x_0, x_1, \ldots, x_l, \xi). \tag{3.1}$$

Évidemment : quel que soit le nombre θ,

$$A(\theta x_0, \ldots, \theta x_l, \theta^{-1}\xi) = \theta^n A(x_0, \ldots, x_l, \xi); \tag{3.2}$$

$$A(1, x_1, \ldots, x_l, \xi) = a(x, \xi). \tag{3.3}$$

Définition 3.1. — Le *transformé de Laplace* de $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ est l'opérateur d'ordre $m + n$:

$$A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right) = A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_0}, \ldots, -\frac{\partial}{\partial \xi_l}, \xi\right). \tag{3.4}$$

Note. — Cette définition est en accord avec la définition usuelle de la transformation de Laplace, quand $a\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ est homogène en $\dfrac{\partial}{\partial x}$ et à coefficients constants. Elle sera en accord avec le prolongement de la transformation de Laplace que définira [IV].

Voici les propriétés du transformé de Laplace d'un opérateur différentiel :

Théorème. — Transformer les coordonnées de X par une transformation affine n'altère pas la correspondance

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \to A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right).$$

THÉORÈME. — Le transformé de Laplace de $a\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right)$ est $A\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial \xi}\right)$.

Bien entendu

$$A(\xi, x_0, \ldots, x_l) = x_0^n a\left(x_0 \xi, \frac{x}{x_0}\right).$$

PREUVE. — Le transformé de Laplace de l'opérateur de commutation

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j \ldots) - x_j \frac{\partial}{\partial x_i} = 1 \quad (i = j), \qquad = 0 \quad (i \neq j)$$

est l'opérateur de commutation

$$-\xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{\partial}{\partial \xi_j}(\xi_i \ldots) = 1 \quad (i = j), \qquad = 0 \quad (i \neq j);$$

il en résulte que, si $a\left(\frac{\partial}{\partial x}, x\right) = b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, alors

$$A\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = B\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right).$$

THÉORÈME. — L'opérateur $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ est *homogène* de degré $-n$. C'est-à-dire : il transforme une fonction homogène en une fonction homogène; il diminue de n le degré d'homogénéité.

THÉORÈME 2. — *La transformation de contact de Legendre transforme les caractéristiques de l'opérateur* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *en les caractéristiques coniques, de sommet* O, *de son transformé de Laplace* $A\left(-\frac{\partial}{\partial x}, \xi\right)$.

Le n° 8 donnera l'énoncé détaillé et la preuve de ce théorème 2.

THÉORÈME 3. — *L'opérateur* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *et son transformé de Laplace* $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ *ont mêmes bicaractéristiques.*

Ce théorème 3 sera établi au n° 8.

DÉFINITION 3.2. — Soit un entier r. Si $r \leqq 0$, notons $U_r(\xi, y)$ la solution du problème de Cauchy :

$$(3.5)\qquad \begin{cases} a\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) U_r(\xi, y) = \dfrac{(-\xi . y)^{-r}}{(-r)!}, \\ U_r(\xi, y) \text{ s'annule } m \text{ fois pour } \xi . y = 0. \end{cases}$$

Évidemment

$$(3.6)\qquad U_r(\xi, y) \text{ s'annule } m - r \text{ fois pour } \xi . y = 0;$$

donc

$$(3.7)\qquad -\frac{\partial}{\partial \xi_0} U_r(\xi, y) = U_{r+1}(\xi, y).$$

Définissons U_r pour $r > 0$ par (3.7) : (3.6) vaut tant que $m - r \geqq 0$;

$$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_r(\xi, y) = 0 \qquad \text{si} \quad r > 0.$$

$U_0(\xi, y) = U(\xi, y)$ est la solution unitaire de $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Définissons de même $U_r^\star(\xi, y)$ à partir de $a^\star\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, x\right)$.

Voici le *théorème de réciprocité*, dont le théorème 3 est une conséquence aisée :

THÉORÈME 4. — *$U_{-n}^\star(\xi, y)$ est la solution unitaire homogène de $A\left(-\dfrac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$, c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy d'ordre $m + n$:*

$$(3.8)\qquad \begin{cases} A\left(-\dfrac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right) U_{-n}^\star(\xi, y) = 1, \\ U_{-n}^\star(\xi, y) \textit{ s'annule } m + n \textit{ fois pour } \xi . y = 0. \end{cases}$$

Puisque $A(x_0, \ldots, x_l, \xi)$ est indépendant de ξ_0, ce théorème a pour corollaire immédiat :

COROLLAIRE 4. — *Si $r + n > 0$,*

$$(3.9)\qquad A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right) U_r^\star(\xi, y) = 0.$$

Si $r + n \leqq 0$, $U_r^\star(\xi, y)$ est la solution du problème de Cauchy .

$$(3.10)\qquad A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right) U_r^\star(\xi, y) = \frac{(-\xi . y)^{-r-n}}{(-r-n)!},$$

$U_r^\star(\xi, y)$ s'annule $m + n$ fois [6] *pour $\xi . y = 0$.*

Ce théorème 4 et ce corrollaire seront établis au n° **9**.

---

[6] Donc $m - r$ fois.

4. Détermination explicite de U_m et $U_m^\star$ quand $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ est linéaire en x et homogène en $\dfrac{\partial}{\partial x}$. — De préférence à U et $U^\star$, [IV] et [V] emploieront U_m et $U_m^\star$, dont les expressions, que voici, sont particulièrement simples :

THÉORÈME 5. — *Soit*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = h_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_1 h_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + x_l h_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

les h_i étant homogènes d'ordre m. La projection caractéristique $\xi(t, \eta)$ est la solution du système

$$d\xi_i = - h_i(\xi)\, dt \qquad (i = 0, 1, \ldots, l)$$

issue de $\xi(0, \eta) = \eta$; rappellons que $\eta . y = 0$.

U_{m-1}, U_m et $U_m^\star$ sont définis, sur un voisinage caractéristique Φ de Q, par les formules

$$U_{m-1}[t, \eta, y] = (-1)^m t,$$

$$U_m[t, \eta, y] = \frac{(-1)^m}{a(y, \eta)},$$

$$U_m^\star[t, \eta, y] = - \frac{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l, y_1, \ldots, y_l)}{D(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l, y_1, \ldots, y_l)}.$$

NOTE. — L'hyperplan $\xi^\star(t, \eta)$ de X enveloppe évidemment, quand t varie, l'hypersurface développable qui est une caractéristique de $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ et qui touche $\eta^\star$.

Ce théorème 5 sera établi au n° 10.

La solution unitaire de l'opérateur $h\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, homogène et indépendant de x, celle de l'opérateur $x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_l \dfrac{\partial}{\partial x_l}$ et celle de son adjoint sont évidentes : *voir* n^{os} 12 et 13. Le n° 14 (corollaire 5) déduit du théorème 5 la solution unitaire de *l'opérateur différentiel de Tricomi* : c'est une *fonction algébrique*.

Ces trois opérateurs fournissent des exemples très simples de toutes les propriétés et exceptions qu'énonce le théorème 1.

CHAPITRE 1. — Uniformisation de la solution unitaire.

Ce chapitre 1 démontre le théorème 1 (n° 2), après avoir rappelé la démonstration, bien classique, des propriétés du système d'Hamilton.

5. Les propriétés du système d'Hamilton. — Quand le système d'Hamilton (2.1) est vérifié, les différentielles des fonctions (2.2) sont nulles, car d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes

$$\sum_j \xi_j h_{\xi_j} = mh;$$

ces fonctions (2.2) sont donc des *intégrales premières* du système d'Hamilton.

Comme au n° 22 de [I], appliquons la théorie des invariants intégraux d'É. Cartan à la forme différentielle

$$\omega = (d\xi).x + h(x, \xi)\, dt. \tag{2.3}$$

On a

$$d\omega = \sum_j dx_j \wedge d\xi_j + \sum_j h_{x_j} dx_j \wedge dt + \sum_j h_{\xi_j} d\xi_j \wedge dt;$$

en annulant ω et les dérivées de $d\omega$ par rapport à dx_j, $d\xi_j$, dt, on obtient le système caractéristique de ω :

$$\omega = 0, \qquad d\xi_j + h_{x_j} dt = 0, \qquad dx_j - h_{\xi_j} dt = 0, \qquad dh = 0;$$

ce système caractéristique de ω équivaut au système d'Hamilton. Donc le système d'Hamilton admet la *forme invariante* ω et est le seul système différentiel qui l'admette.

6. Uniformisation de $U(\xi, y)$ valable quand $\xi_1, \ldots, \xi_l$ sont fixés. — La solution unitaire $U(\xi, y)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est définie par un problème de Cauchy. Nous envisagerons ce problème dans l'espace des points (ξ, y), c'est-à-dire dans l'espace produit $\Xi \times X$: car nous voulons savoir comment U dépend de ξ; et il est plus aisé de construire un voisinage caractéristique de la quadrique

$$Q: \quad \xi.y = 0$$

que de l'hyperplan ξ^*. Rappelons l'énoncé de ce problème de Cauchy :

$$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U(\xi, y) = 1; \qquad U(\xi, y) \text{ s'annule } m \text{ fois sur } Q. \tag{6.1}$$

Appliquons-lui les conclusions de [I], en remplaçant les notations de [I] :

$$X \qquad x \qquad p \qquad S \qquad s(x) \qquad t$$

par

$$\Xi \times X \qquad (\xi, y) \qquad (\varpi, q) \qquad Q \qquad \xi.y \qquad \tau;$$

le covecteur (ϖ, q) de $\Xi \times X$ est constitué par un covecteur ϖ de Ξ et un covecteur q de X.

Comme l'exige le n° 1 de [I], Q n'est pas une variété caractéristique, car $h(y, \xi)$ n'est pas identiquement nulle.

Choisissons

$$b\left(\xi, y, \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_0};$$

comme l'exige le n° 1 de [I], pour b, Q n'est caractéristique en aucun de ses points, car

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0}(\xi . y) = 1.$$

En suivant le n° 4 de [I], construisons un voisinage caractéristique Φ de Q; choisissons

$$g(\xi, y, \varpi, q) = h(y, q)\,[b(\xi, y, \varpi, q]^{1-m},$$

c'est-à-dire

$$g(\xi, y, \varpi, q) = \varpi_0^{1-m}\, h(y, q).$$

L'équation différentielle de la projection caractéristique est

$$d\xi = g_\varpi\, d\tau, \qquad dy = g_q\, d\tau, \qquad d\varpi = -g_\xi\, d\tau, \qquad dq = -g_y\, d\tau,$$

donc ($i = 0, 1, \ldots, l, \; j = 1, \ldots, l$) :

$$(6.2) \qquad \begin{cases} d\xi_0 = (1-m)\varpi_0^{-m}\, h(y, q)\, d\tau, \\ d\xi_j = 0, \qquad dy_j = \varpi_0^{1-m}\, h_{q_j}(y, q)\, d\tau, \\ d\varpi_i = 0, \qquad dq_j = -\varpi_0^{1-m}\, h_{y_j}(y, q)\, d\tau. \end{cases}$$

Notons

$$\xi(\tau, p, x), \quad y(\tau, p, x) \quad \varpi(\tau, p, x), \quad q(\tau, p, x)$$

la solution de ce système (6.2) issue de l'élément de contact de Q :

$$(6.3) \qquad \begin{cases} (\xi, x, \chi, p), \qquad \text{où } \xi . x = 0, \qquad \chi = (1, x_1, \ldots, x_l), \\ \qquad\qquad p = (\xi_1, \ldots, \xi_l); \end{cases}$$

on choisit pour paramètres de cet élément de contact (p, x).

Par définition, l'ensemble des points (τ, p, x) tels que

$$|\tau| < \rho(p, x) \qquad (\rho : \text{fonction continue} > 0)$$

constitue, quand ρ est assez petit, *un voisinage caractéristique* Φ de Q; l'équation de Q est

$$Q : \quad \tau = 0;$$

$$\xi(\tau, p, x), \quad y(\tau, p, x)$$

est la projection caractéristique de Φ dans $\Xi \times X$.

La définition, qui précède, de cette projection se simplifie aisément : (6.2) et (6.3) donnent

$$\varpi_0 = 1, \qquad \xi_1 = p_1, \qquad \ldots, \qquad \xi_l = p_l;$$

d'où

$$dy = h_q(y, q)\, d\tau, \qquad dq = -h_y(y, q)\, d\tau;$$

d'où

$$h(y, q) = h(x, p);$$

d'où

$$\xi_0 = (1 - m)\tau\, h(x, p) - \xi_1 x_1 - \ldots - \xi_l x_l.$$

D'où finalement :

Définition 6. — *La projection caractéristique*

$$\xi(\tau, p, x), \quad y(\tau, p, x)$$

de Φ dans $\Xi \times X$ se construit comme suit : $\xi(\tau, p, x)$ est donné par les relations

(6.4) $\xi_1 = p_1, \qquad \ldots, \qquad \xi_l = p_l, \qquad \xi.x + (m-1)\tau\, h(x, p) = 0;$

$y(\tau, p, x)$ est la solution, issue de (x, p), du système différentiel

(6.5) $$dy = h_q(y, q)\, d\tau, \qquad dq = -h_y(y, q)\, d\tau.$$

Rappelons les conclusions de [I] :

Lemme 6.1. — $U(\xi, y)$ et ses dérivées d'ordre $< m$ sont holomorphes sur Φ.

Preuve. — [I], n° 4, théorème 1.

Lemme 6.2. — Le déterminant fonctionnel de la projection caractéristique est le produit de $h(x, p)$ par une fonction holomorphe, ne s'annulant pas. La variété Δ de Φ où s'annule ce déterminant a donc pour équation

(6.6) $$\Delta : \quad h(x, p) = 0.$$

Preuve. — [I], n° 4, théorème 2.

Lemme 6.3. — Soit K la projection caractéristique de Δ; la condition $(\xi, y) \in K$ équivaut à la suivante : dans l'espace X, il existe deux éléments de contact d'une même bicaractéristique de $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ qui appartiennent l'un au point y, l'autre à l'hyperplan ξ^*.

Preuve. — Vu l'équation (6.6) de Δ et la définition 6 de la projection caractéristique, la condition

$$(\xi, y) \in K$$

signifie ceci : il existe p, $x \in X$ et une valeur de τ tels que

$$h(x, p) = 0, \qquad \xi_1 = p_1, \qquad \ldots, \qquad \xi_l = p_l,$$
$$\xi.x = 0, \qquad y = y(\tau, p, x).$$

Or, dans X, la courbe bicaractéristique issue d'un élément de contact caractéristique (x, p) est le lieu que décrit $y(\tau, p, x)$, quand τ varie. Les conditions :

$$\text{il existe } \tau \text{ tel que} \quad y = y(\tau, p, x), \qquad h(x, p) = 0,$$

équivalent donc à la suivante :

y est sur la courbe bicaractéristique issue de (x, p).

D'autre part les conditions

$$\xi_1 = p_1, \qquad \ldots, \qquad \xi_l = p_l, \qquad \xi . x = 0$$

expriment que (x, p) est un élément de contact de l'hyperplan ξ^*.

Lemme 6.4. — Près d'un point de Q non exceptionnel :

K est un ensemble analytique de dimension $2l$;
Φ est un revêtement fini de X, ramifié au-dessus de K;
$U(\xi, y)$ est une fonction algébroïde se ramifiant sur K.

Le degré de cette ramification est 2, et K est une variété régulière en un point

$$(-p_1 x_1 - \ldots - p_l x_l, p_1, \ldots, p_l; x_1, \ldots, x_l) \in Q,$$

où

$$h(x, p) = 0, \qquad p_x . h_p \neq 0.$$

Preuve. — [I], n° 6, théorème 4 et n° 7, théorème 5.

Reportons-nous à *la définition des points exceptionnels* qu'énonce le n° 6 de [I], dont nous reprenons un instant les notations; supposons $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ indépendant de $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$; alors le long de la bicaractéristique issue de (y, q), $x_1 = y_1$, $(x_2, \ldots, x_l, p_1 - q_1, p_2, \ldots, p_l)$ sont indépendants de q_1; un point y de S est donc exceptionnel pour $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ si et seulement s'il est exceptionnel après qu'on ait remplacé X et S par leurs intersections par l'hyperplan $x_1 = y_1$ et $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ par sa restriction à cet hyperplan. Appliquons cela à $\Xi \times X$, Q, $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$; il vient : le point (ξ, y) de Q est exceptionnel si et seulement si, dans X, le point y de ξ^* est exceptionnel. Cela justifie la définition 2.2.

Les parties 1°, 3° et 4° *du théorème* 1 ont été établies par les lemmes 6.1, 6.3 et 6.4. Le n° 7 va prouver le 2° de ce théorème 1 et justifier la définition 2.1 du voisinage caractéristique et de la projection caractéristique.

7. Uniformisation de $U(\xi, y)$ valable quand y est fixé. — Il suffit d'effectuer sur Φ un changement de coordonnées.

Notons pour un instant

$$(7.1) \qquad \xi = f[t, \eta, y], \qquad x = g[t, \eta, y]$$

la solution du système d'Hamilton (2.1) issue de (η, y); f et g sont holomorphes quand t est petit; (7.1) équivaut à

$$(7.2) \qquad \eta = f[-t, \xi, x], \qquad y = g[-t, \xi, x].$$

Notons φ un point de Φ; le n° 6 a défini sur Φ les fonctions holomorphes suivantes, qui vérifient (6.4) :

$$\tau(\varphi), \quad p(\varphi), \quad x(\varphi), \quad \xi(\varphi), \quad y(\varphi);$$

$\tau(\varphi)$, $p(\varphi)$, $x(\varphi)$ constituent un système de coordonnées analytiques; l'équation de Q est

$$Q : \tau(\varphi) = 0;$$

la projection caractéristique de φ est

$$\xi(\varphi), \quad y(\varphi).$$

La définition 6 de $y(\varphi)$ s'énonce

$$y(\varphi) = g[\tau(\varphi), \xi(\varphi), x(\varphi)];$$

définissons

$$\eta(\varphi) = f[\tau(\varphi), \xi(\varphi), x(\varphi)] \qquad t(\varphi) = -\tau(\varphi), \qquad h(\varphi) = h(x(\varphi), p(\varphi)).$$

Les relations (6.4) et l'équivalence de (7.1) et (7.2) donnent

$$\xi(\varphi) = f[t(\varphi), \eta(\varphi), y(\varphi)], \qquad x(\varphi) = g[t(\varphi), \eta(\varphi), y(\varphi)],$$
$$\xi(\varphi).x(\varphi) + (1-m)\, t(\varphi)\, h(x(\varphi), \xi(\varphi)) = 0;$$

d'où, puisque le système d'Hamilton admet les intégrales premières (2.2) :

$$\eta(\varphi).y(\varphi) = 0, \qquad h(\varphi) = h(y(\varphi), \eta(\varphi)).$$

Ainsi $(\eta(\varphi), y(\varphi)) \in Q$ et les coordonnées $\tau(\varphi)$, $p(\varphi)$, $x(\varphi)$ sont des fonctions holomorphes des valeurs de $\tau(\varphi)$, $\eta(\varphi)$, $y(\varphi)$:

$$\tau = -t, \qquad p_j = f_j[t, \eta, y], \qquad x = g[t, \eta, y].$$

On peut donc utiliser sur Φ les coordonnées

$$t(\varphi), \quad \eta(\varphi), \quad y(\varphi), \quad \text{qui vérifient } (\eta, y) \in Q.$$

On obtient ainsi *la définition 2.1 de Φ et de la projection caractéristique.*

Puisque $h(x(\varphi), p(\varphi)) = h(y(\varphi), \eta(\varphi))$, le lemme 6.2 établit *la partie 2° du théorème 1.*

CHAPITRE 2. — Transformé de Laplace de a; Réciprocité de la solution unitaire de a.

8. Relation entre les caractéristiques de a et celles de son transformé de Laplace. — Donnons l'énoncé explicite du théorème 2 :

THÉORÈME 2. — *Soit* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux; soit* $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ *son transformé de Laplace* (définition 3.1); *définissons* $h(x, \xi)$ *par* (1.3); *rappelons que les caractéristiques de* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *sont les variétés, d'équation* $u(x) = 0$, *solution de*

$$h(x, u_x) = 0. \tag{8.1}$$

1° *Les caractéristiques de* $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ *sont les variétés, d'équation* $\xi_0 + v(\xi_1, \ldots \xi_l) = 0$, *solutions de*

$$h(v_\xi, \xi) = 0. \tag{8.2}$$

2° *Soit une caractéristique de* $a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, *d'équation* $u(x) = 0$: (8.1) *vaut pour* $u(x) = 0$.

L'élimination de x entre les relations

$$u(x) = 0,$$
$$\frac{\xi_1}{u_{x_1}} = \ldots = \frac{\xi_l}{u_{x_l}} = \frac{v}{\sum_j x_j u_{x_j}} \qquad (j = 1, \ldots, l) \tag{8.3}$$

définit une fonction $v(\xi_1, \ldots, \xi_l)$, *homogène de degré* 1 ; *on a*

$$x_1 = v_{\xi_1}, \qquad \ldots, \qquad x_l = v_{\xi_l}. \tag{8.4}$$

La variété d'équation

$$\xi_0 + v(\xi_1, \ldots, \xi_l) = 0$$

est donc une caractéristique conique, de sommet O, *de* $A\left(-\frac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$.

3° *Réciproquement soit une telle caractéristique, d'équation*

$$\xi_0 + v(\xi_1, \ldots \xi_l) = 0 :$$

la fonction $v(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ *est homogène de degré* 1 *et vérifie* (8.2). *L'élimination de* $\xi_1, \ldots, \xi_l$ *entre les relations* (8.4), *qui sont homogènes en* ξ *de degré* 0, *définit une relation* $u(x) = 0$; (8.3) *a lieu.*

La variété d'équation $u(x) = 0$ *est donc une caractéristique de* $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Note. — *La transformation de contact* ainsi établie entre les *caractéristiques de* $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ et *les caractéristiques coniques*, *de sommet* O, *du transformé de Laplace A de a est une transformation de Legendre.*

Preuve de 1°. — Le polynome

$$A(x_0, \ldots, x_l, \xi) = x_0^n a\left(\frac{x}{x_0}, x_0 \xi\right)$$

a même partie principale en $x_0, \ldots, x_l$ qu'en ξ; c'est

$$x_0^{n+m} h\left(\frac{x}{x_0}, \xi\right);$$

la variété d'équation

$$\xi_0 + v(\xi_1, \ldots, \xi_l) = 0$$

est donc caractéristique pour $A\left(-\dfrac{\partial}{\partial \xi}, \xi\right)$ quand $h(v_\xi, \xi) = 0$.

Preuve de 2°. — Supposons que x appartienne à la variété d'équation $u(x) = 0$, solution de (8.1); (8.3) donne

$$\sum_j \xi_j \, dx_j = 0, \qquad \sum_j \xi_j x_j = v;$$

d'où

$$dv = \sum_j x_j \, d\xi_j;$$

d'où (8.4); (8.1), (8.3) et (8.4) entraînent (8.2).

Preuve de 3°. — Réciproquement, soit $v(\xi_1, \ldots, \xi_l)$ une solution de (8.2), homogène de degré 1; l'élimination de $\xi_1, \ldots, \xi_l$ entre les relations (8.4), qui sont homogènes de degré 0, donne une relation

$$u(x) = 0.$$

De (8.4) résulte

$$\sum_j \xi_j \, dx_j = d\left(\sum_j \xi_j x_j\right) - \sum_j x_j \, d\xi_j = d\left(\sum_j \xi_j v_{\xi_j}\right) - dv = 0,$$

car

$$\sum_j \xi_j v_{\xi_j} = v \tag{8.5}$$

puisque v est homogène de degré 1. Or

$$\sum_j \xi_j \, dx_j = 0$$

signifie

(8.6) $$\frac{\xi_1}{u_{x_1}} = \ldots = \frac{\xi_l}{u_{x_l}};$$

d'autre part (8.4) et (8.5) donnent

(8.7) $$v = \sum_j \xi_j x_j;$$

de (8.6) et (8.7) résulte (8.3); (8.2), (8.3) et (8.4) entraînent (8.1).

Preuve du Théorème 3 (n° 3). — Les équations du premier ordre (8.1) et (8.2) ont évidemment les mêmes caractéristiques.

9. Preuve du théorème de réciprocité. — Nous utilisons les notations du n° 3 et nous notons $U[f(\xi, y)]$ la solution $u(\xi, y)$ du problème de Cauchy :

(9.1) $$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) u(\xi, y) = f(\xi, y); \qquad u(\xi, y) \text{ s'annule } m \text{ fois pour } \xi.y = 0.$$

Par exemple, si $r \geqq 0$,

(9.2) $$U_{-r}(\xi, y) = U\left[\frac{(-\xi.y)^r}{r!}\right].$$

Supposons $f(x, y) = 0$ pour $\xi.y = 0$: évidemment la solution $u(\xi, y)$ de (9.1) s'annule $m+1$ fois pour $\xi.y = 0$; U_{ξ_k} est donc solution du problème de Cauchy :

$$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{\xi_k}(\xi, y) = f_{\xi_k}(\xi, y); \qquad U_{\xi_k} \text{ s'annule } m \text{ fois pour } \xi.y = 0.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial \xi_k} U[f(\xi, y)] = U\left[\frac{\partial}{\partial \xi_k} f(\xi, y)\right] \qquad \text{si} \quad f(\xi, y) = 0 \quad \text{pour } \xi.y = 0.$$

En particulier, si $r > 0$,

(9.3) $$-\frac{\partial}{\partial \xi_k} U\left[\frac{(-\xi.y)^r}{r!} f(y)\right] = U\left[\frac{(-\xi.y)^{r-1}}{(r-1)!} y_k f(y)\right] \qquad (y_0 = 1).$$

Décomposons $a(y, \xi)$ en une somme de polynomes homogènes en ξ :

(9.4) $$a(y, \xi) = h_m(y, \xi) + \ldots + h_0(y),$$

où

$$\text{degré } h_m = m, \qquad \ldots, \qquad \text{degré } h_0 = 0 \quad \text{relativement à } \xi.$$

Définissons

$$A^\star(\xi, x_0, \ldots, x_l) = x_0^n a\left(\frac{x}{x_0}, -x_0\xi\right)$$

et $H_m^\star, \ldots H_0^\star$ de même; on a

$$A^\star\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial\xi}\right) = H_m^\star\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \ldots + H_0^\star\left(-\frac{\partial}{\partial\xi}\right),$$

les $H_i^\star$ étant homogènes en $\frac{\partial}{\partial\xi}$, d'ordres respectifs

$$m+n, \quad \ldots, \quad n$$

D'où, vu (9.3), pour $r \geqq m+n$,

$$(9.5) \quad A^\star\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial\xi}\right) U\left[\frac{(-\xi.y)^r}{r!}\right]$$
$$= U\left[h_m(y, -\xi)\frac{(-\xi.y)^{r-m-n}}{(r-m-n)!} + \ldots + h_0(y)\frac{(-\xi.y)^{r-n}}{(r-n)!}\right].$$

D'autre part (9.4) donne immédiatement

$$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{(-\xi.y)^{r-n}}{(r-n)!} = h_m(y, -\xi)\frac{(-\xi.y)^{r-m-n}}{(r-m-n)!} + \ldots + h_0(y)\frac{(-\xi.y)^{r-n}}{(r-n)!};$$

donc

$$(9.6) \quad U\left[h_m(y, -\xi)\frac{(-\xi.y)^{r-m-n}}{(r-m-n)!} + \ldots + h_0(y)\frac{(-\xi.y)^{r-n}}{(r-n)!}\right] = \frac{(-\xi.y)^{r-n}}{(r-n)!}.$$

En portant (9.2) et (9.6) dans (9.5), il vient

$$(9.7) \qquad A^\star\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial\xi}\right) U_{-r}(\xi, y) = \frac{(-\xi.y)^{r-n}}{(r-n)!}.$$

Appliquons à cette relation l'opérateur $\frac{\partial}{\partial\xi_0}$; cet opérateur commute avec $A^\star\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$, puisque $A^\star(\xi, x_0, \ldots, x_l)$ est indépendant de ξ_0; vu (3.7), nous constatons que (9.7) vaut pour tout $r \geqq n$ et que, pour $r < n$,

$$(9.8) \qquad A^\star\left(\xi, -\frac{\partial}{\partial\xi}\right) U_{-r}(\xi, y) = 0.$$

De ces deux relations (9.7) et (9.8) et de (3.6) résulte tout ce qu'énoncent le théorème 4 et le corollaire 4, à condition de remplacer a par $a^\star$, donc $A^\star$ par A et U par $U^\star$.

CHAPITRE 3. — Détermination U_m et $U_m^\star$ quand $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est linéaire en x et homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$.

Soit

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = h_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_1 h_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + x_l h_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

les h_i étant homogènes d'ordre m.

10. Détermination de U_{m-1} et U_m. — La définition 2.1 de la projection caractéristique se réduit à ceci : soit $\xi(t, \eta)$ la solution issue de $\eta \in \Xi$ du système différentiel

$$(\mathbf{10.1}) \qquad d\xi_i = - h_i(\xi)\, dt \qquad (i = 0, 1, \ldots, l);$$

la projection caractéristique de

$$(t, \eta, y) \in \Phi, \qquad \text{où} \quad (\eta, y) \in Q,$$

est

$$(\xi\,(t, \eta), y) \in \Xi \times X.$$

D'après le théorème 4, U_{m-1} est la solution du problème de Cauchy :

$$(\mathbf{10.2}) \quad (-1)^{m-1} \sum_i h_i(\xi) \frac{\partial U_{m-1}(\xi, y)}{\partial \xi_i} = 1, \qquad U_{m-1} = 0 \quad \text{pour} \quad \xi . y = 0.$$

U_{m-1} a donc, près de $\xi . y = 0$, le développement limité

$$U_{m-1}(\xi, y) = (-1)^{m-1} \frac{\xi . y}{a(y, \xi)} + \ldots;$$

donc, puisque les $h_i(\xi)$ sont indépendants de ξ_0, $U_m = - \dfrac{\partial U_{m-1}}{\partial \xi_0}$ est solution du problème de Cauchy :

$$(\mathbf{10.3}) \quad \sum_i h_i(\xi) \frac{\partial U_m(\xi, y)}{\partial \xi_i} = 0, \qquad U_m = \frac{(-1)^m}{a(y, \xi)} \quad \text{pour} \quad \xi . y = 0.$$

Étudions ces deux problèmes de Cauchy sur Φ, c'est-à-dire faisons le changement de variable $\xi(t, y)$; vu (10.1) il vient

$$(\mathbf{10.4}) \qquad \frac{\partial U_{m-1}}{\partial t} = (-1)^m, \qquad U_{m-1} = 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0;$$

$$(\mathbf{10.5}) \qquad \frac{\partial U_m}{\partial t} = 0, \qquad U_m = \frac{(-1)}{a(y, \eta)} \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

D'où les deux formules qu'énonce le théorème 5 :

$$(10.6) \qquad U_{m-1} = (-1)^m t, \qquad U_m = \frac{(-1)^m}{a(y, \eta)}.$$

11. Détermination de $U_m^\star$. — $U_{m-1}^\star$ et $U_m^\star$ sont déterminés de même par les problèmes de Cauchy :

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}[h_i(\xi) U_{m-1}^\star(\xi, y)] = 1, \qquad U_{m-1}^\star = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi . y = 0;$$

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}[h_i(\xi) U_m^\star(\xi, y)] = 0, \qquad U_m^\star = \frac{1}{a(y, \xi)} \qquad \text{pour} \quad \xi . y = 0.$$

Ce dernier s'énonce sur Φ :

$$(11.1) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \log U_m^\star = \sum_i \frac{\partial h_i(\xi)}{\partial \xi_i}, \qquad U_m^\star = \frac{1}{a(y, \eta)} \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

Fixons y; posons $\eta_0 = -\eta_1 y_1 - \ldots - \eta_l y_l$; d'après un théorème classique, qui s'obtient en appliquant aux équations aux variations (Goursat, *Traité d'Analyse*, t. III, chap. XXIII, § I) du système (10.1) le théorème sur le déterminant de $l+1$ solutions d'un système d'équations linéaires, d'ordre 1, à $l+1$ inconnues (*ibid.*, t. II, chap. XX, § IV) :

$$(11.2) \qquad \frac{\partial}{\partial t} \log \frac{D(\xi)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l)} = -\sum_i \frac{\partial h_i(\xi)}{\partial \xi_i};$$

d'autre part un calcul aisé donne

$$(11.3) \qquad \frac{D(\xi)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l)} = -a(y, \eta) \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

De (11.1), (11.2) et (11.3) résulte la formule qu'énonce le théorème 5 :

$$(11.4) \qquad U_m^\star = -\frac{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l)}{D(\xi)}.$$

12. Équation à coefficients constants, homogène en $\frac{\partial}{\partial x}$. — Supposons

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = h\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

h étant homogène, d'ordre m. Évidemment

$$U(\xi, y) = (-1)^m U^\star(\xi, y) = \frac{1}{m!} \frac{(\xi . y)^m}{h(\xi)}.$$

Tous les points caractéristiques de Q sont exceptionnels.

13. Équation des fonctions homogènes. — Supposons

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + x_l \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

On a

$$U(\xi, y) = \log \frac{-\xi_1 y_1 - \ldots - \xi_l y_l}{\xi_0}, \qquad U^\star(\xi, y) = \frac{1}{l}\left(\frac{-\xi_0}{\xi_1 y_1 + \ldots + \xi_l y_l}\right)^l - \frac{1}{l}.$$

Tous les points caractéristiques de Q sont exceptionnels.

14. Équation de Tricomi. — Corollaire 5. — *Soient* $l = 2$,

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{14.1}$$

Définissons la fonction algébrique $t(\xi, y)$ *par l'équation*

$$\frac{1}{3}\xi_1^4 t^3 + \xi_1^2 \xi_2 t^2 + (\xi_1^2 y_2 + \xi_2^2) t + \xi . y = 0. \tag{14.2}$$

On a

$$U_1(\xi, y) = U_1^\star(\xi, y) = t, \tag{14.3}$$

$$U(\xi, y) = U^\star(\xi, y) = \frac{1}{12} t^2 [3\xi_1^4 t^2 + 8\xi_1^2 \xi_2 t + 6(\xi_1^2 y_2 + \xi_2^2)]. \tag{14.4}$$

Note. — Tous les points caractéristiques de Q sont ordinaires. Q a des points caractéristiques *irréguliers :* ceux où

$$\eta_2 = y_2 = 0.$$

Note. — L'équation (14.2) se met sous la forme

$$(t + \xi_2)^3 + 3y_2(t + \xi_2) + 3\xi_0 + 3y_1 - \xi_2^3 = 0 \qquad \text{pour} \quad \xi_1 = 1; \tag{14.5}$$

son discriminant s'annule pour

$$4y_2^3 + (3y_1 + 3\xi_0 - \xi_2^3)^2 = 0; \tag{14.6}$$

conformément au théorème 1, cette relation exprime que y est sur la caractéristique tangente à la droite $\xi^\star$ de coordonnées $(\xi_0, 1, \xi_2)$.

Preuve. — Puisque a est self-adjoint, $U = U^\star$. Appliquons le théorème 5; faisons $\eta_1 = 1$; la projection caractéristique est

$$\xi_1(t, \eta) = 1, \quad \xi_2(t, \eta) = \eta_2 - t, \quad \xi_0(t, \eta) = \frac{1}{3}(\eta_2 - t)^3 + \eta_0 - \frac{1}{3}\eta_2^3;$$
$$\eta . y = 0.$$

En éliminant η entre ces relations, on obtient (14.5). D'où, vu que $t(\xi, y) = U_1(\xi, y)$ est homogène en ξ de degré -1, (14.2) et (14.3).

Vu (3.7), on a, pour $d\xi_1 = d\xi_2 = 0$,

$$dU(\xi, y) = -U_1(\xi, y)\, d\xi_0;$$

d'après (14.5),

$$-d\xi_0 = [(t+\xi_2)^2 + y_2]\, dt \qquad \text{pour} \quad \xi_1 = 1, \qquad d\xi_2 = 0;$$

donc

$$dU = [t^3 + 2\xi_2 t^2 + (y_2 + \xi_2^2)t]\, dt \qquad \text{pour} \quad \xi_1 = 1, \qquad d\xi_2 = 0;$$

d'où, puisque U = 0 pour $t = 0$,

$$U(\xi, y) = \frac{1}{4} t^4 + \frac{2}{3} \xi_2 t^3 + \frac{1}{2} (y_2 + \xi_2^2) t^2 \qquad \text{pour} \quad \xi_1 = 1;$$

d'où (14.4), puisque $U(\xi, y)$ est homogène de degré 0 en ξ.

(Manuscrit reçu le 6 février 1958.)

Jean LERAY, Membre de l'Institut, 12, rue Pierre-Curie, Sceaux (Seine).

152841. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins, Paris (6e).
Dépôt légal, Imprimeur, 1958, n° 1294. — Dépôt légal, Éditeur, 1958, n° 797.
Achevé d'imprimer le 5 décembre 1958. Imprimé en France.