BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL MALLIAVIN

Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 181-186
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__181_0>

Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 181 à 186.

CALCUL SYMBOLIQUE ET SOUS-ALGÈBRES DE $L_1(G)$;

PAR

PAUL MALLIAVIN.

(Caen).

I. CALCUL SYMBOLIQUE MAXIMAL.

1. Introduction. — G notera un groupe abélien discret infini, G' le groupe dual de G, $A(G')$ l'algèbre des fonctions réelles, transformées de Fourier de fonctions $\in L_1(G)$. On se propose d'étudier les fonctions définies sur la droite réelle qui opèrent sur un élément fixe $a \in A(G')$ c'est-à-dire des fonctions F telles que $F(a(g')) \in A(G')$. On notera par $[a]$ l'ensemble des fonctions qui opèrent sur a; $[a]$ est une sous-algèbre des fonctions définies et continues sur $a(G')$.

Rappelons quelques définitions classiques sur les classes de fonctions différentiables. Étant donnée une suite M_n de nombres positifs, on considère la classe $\mathcal{C}(M_n, I)$ des fonctions $f(x)$ dont la restriction au segment I vérifie

$$(1.1) \qquad \sup_{n,x} \left| \frac{f^{(n)}(x)}{M_n} \right|^{\frac{1}{n}} < \infty, \qquad x \in I$$

Nous considérerons dans la suite uniquement des classes telles que :

1.2 $\log M_n$ est une suite convexe de n ;

1.3 $\dfrac{\log M_n - \log n!}{n} = e_n + O(1)$,

où e_n est une suite croissante.

Remarquons que 1.3 n'est introduit que pour démontrer la propriété :

1.3.1 Si $f \in \mathcal{C}(M_n, I)$, $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \in \mathcal{C}(M_n, I)$.

Il est loisible dans la suite de remplacer l'hypothèse 1.3 par 1.3.1.

Nous dirons qu'une classe $\mathcal{C}(M_n, I)$ est non quasi-analytique si, posant

$$T(r) = \sup_n [n \log r - \log M_n],$$

$$\int_1^{+\infty} T(r) \frac{dr}{r^2} < \infty. \tag{1.4}$$

On se propose de démontrer le *théorème* suivant :

1.5 *Étant donnés un segment I, symétrique par rapport à l'origine, de longueur $2l$, ε un nombre > 0, une suite de nombres M_n satisfaisant* 1.2, 1.3 *et* (1.4), *on peut trouver $a \in A(G')$ tel que*

$$[a] \subset \mathcal{C}(M_n, I)$$

et tel que la norme de a dans $A(G')$, soit $\| a \|'_1$, vérifie

$$\| a \|'_1 < l + \varepsilon. \tag{1.5.1}$$

Il s'agit d'un énoncé de calcul symbolique individuel, dans le sens qu'on étudie les fonctions opérant sur un élément a, *fixé*, au lieu d'étudier comme Helson, Kahane, Katznelson, Rudin [1], [2], [3] les fonctions qui opèrent sur a quel que soit $a \in A(G')$.

La démonstration de 1.5 sera obtenue en prenant un point de vue dual de celui de [1], [2], [3]. On construira une série lacunaire a convenable sur G', on étudiera l'image par a de la mesure de Haar sur G', et enfin qnelques calculs élémentaires montreront que la classe $\mathcal{C}(M_n, I)$ considérée est, en vertu de 1.2 et 1.3, une algèbre dans laquelle toute fonction, partout différente de zéro, est inversible.

2. Construction de la série lacunaire a. — Posons

$$a(g') = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \operatorname{Im} \langle g_k, g' \rangle, \qquad g_k \in G \tag{1.6}$$

les α_k étant des nombres réels > 0, tels que $\sum_1^{\infty} \alpha_k < \infty$. Posons $N(t) =$ nombre de $\alpha_k \geqq t$. D'une manière générale nous noterons Ψ' la transformée de Fourier de $\Psi(g')$, $\| \Psi \|'_\infty = \| \Psi' \|_\infty$.

On a alors le lemme suivant :

2.1 *Soit $\gamma(u)$ une fonction croissante tendant vers $+\infty$, arbitrairement lentement, soit α_k une suite donnée, soit $\mathrm{N}(t)$ sa fonction de répartition, alors on peut déterminer les g_k de façon convenable de telle sorte que*

$$\log \| \exp(iua(g')) \|'_\infty < -\rho[N(\delta u^{-1}) - N(2\delta u^{-1})] + \gamma(u) \log(8eu + 4),$$

où ρ et δ sont des constantes numériques.

Preuve. — [4], paragraphe 5

Nous prendrons N de telle sorte que

$$(2.1.1)\qquad N(v) - N(u) \geqq \lambda \int_{u^{-1}}^{v^{-1}} T(r)\frac{dr}{r}, \qquad 0 < v < u < 1,$$

où λ désigne une constante numérique déterminée ci-dessous. On a

$$N(\delta u^{-1}) - N(2\delta u^{-1}) > \int_{u(2\delta)^{-1}}^{u\delta^{-1}} T(r)\frac{dr}{r} > \lambda T\left(\frac{u}{2\delta}\right)\log 2.$$

Prenons λ tel que $\lambda\rho\log 2 > 4$ et $\gamma(u)$ tel que $\gamma(u) < \dfrac{T\left(\dfrac{u}{2\delta}\right)}{\log 2\,(u+1)}$ ce qui est possible si $\dfrac{\log T(u)}{\log u} \to \infty$ c'est-à-dire si $M_n < \infty$ pour tout n. On obtient d'après 2.1 :

$$(2.3)\qquad \log \| \exp(iua(g')) \|'_\infty < - T\left(\frac{u}{2\delta}\right).$$

Nous notons par $d\mu$ l'image de la mesure de Haar sur G' par l'application $g' \to a(g')$. La transformée de Fourier de $d\mu(x)$ s'écrit

$$\int e^{iux} d\mu(x) = \int_{G'} e^{iua(g')} dg'.$$

Si (2.3) est satisfait, $d\mu(x) = m(x)dx$, où $m(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable.

2.4 **Proposition.** — *On peut choisir convenablement $N(u)$ et les g_k de telle sorte que $F \in [a]$ entraîne*

$$m(x)F(x) \in \mathcal{C}(M_n, I).$$

Preuve. — Considérons la transformée de Fourier de $F(x)\,m(x)$,

$$\int F(x)m(x)\,e^{iux}dx = \int_{G'} F(a(g'))\,e^{iua(g')}dg'$$

ou, en appliquant Parceval,

$$= \int_G (F(a))'\,(e^{iua})',$$

cette dernière intégrale se majore par $\| F(a) \|'_1 \, \| e^{iua} \|'_\infty$. La transformée de Fourier permet de majorer la dérivée n-ième par

$$\left(1 + \sup_{u>1} \| e^{iua} \|'_\infty u^{n+2}\right) \| F(a) \|'_1.$$

En tenant compte de (2.3), on a

$$(2.4.1)\qquad \sup_{u>1}\left[(n+2)\log u - T\left(\frac{u}{2\delta}\right)\right] = M_{n+2}(2\delta)^{n+2}.$$

Il suffit de poser $M_n^\star = M_{n-2}$ et d'effectuer la construction qui précède avec $M_n^\star$ pour obtenir la proposition 2.4.

3. Image de la mesure de Haar par a. — Pour déduire de 2.4 des renseignements sur $F(x)$, nous devons minorer $m(x)$. Ce sera l'objet du lemme suivant :

3.1 *Soit* α_k *une suite telle que*

$$(3.1.1)\qquad 0 < \alpha_{2k_0+j} < \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \alpha_{2k+j}, \qquad k_0 = 0, 1, \ldots, \qquad j = 0, 1.$$

Soit I *le segment* $[-l, +l]$ *où* $l < \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, *alors on peut choisir la fonction* $\gamma(u)$ *décroissant assez lentement de telle sorte que*

$$(3.1.2)\qquad \sigma = \min_{I} m(x) > 0.$$

Preuve. — D'après [5], paragraphe 5, dont nous allons utiliser les notations, la transformée de Fourier de $m(x)$ s'écrit

$$(3.2)\qquad \prod_{1}^{\infty} P_{r_k,0}(\alpha_k u) + \eta(u),$$

où $\|\eta\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta(u)|\, du$ peut être rendue arbitrairement petite en prenant une fonction $\gamma(u)$ très lentement croissante. Notons par $m^\star(x)$ la fonction qui a pour transformée de Fourier

$$\prod_{k=1}^{\infty} P_{r_k,0}(\alpha_k u).$$

Alors

$$|m(x) - m^\star(x)| > \|\eta\|_1$$

et $m^\star(x)$ s'interprète comme un produit de composition de mesures $d\mu_k$ dont les transformées de Fourier sont $P_{r_k,0}(\alpha_k u)$. Chaque mesure $d\mu_k$ a son support contenu dans $[-\alpha_k, +\alpha_k]$ et dans aucun segment plus petit. Il résulte de (3.1.2) que $m^\star(x)$ ne peut s'annuler identiquement sur aucun intervalle intérieur au segment $[-l, +l]$. De plus $m^\star(x) = m_1 \star m_2$, où la transformée de Fourier de $m_1(x)$ est le produit (3.2) pris pour les valeurs de k paires. $m_1(x)$ et $m_2(x)$ ont, en vertu de (3.1.1), pour support deux segments; par suite

$$m(x_0) = \int m_1(x_0 - t)\, m_2(t)\, dt > 0$$

si x_0 est intérieur au support de m. $m(x) = 0$ seulement si $|x| > l$; soit $\sigma_1 = \min m^*(x)$, $|x| \leq l$.

Prenons η tel que $\|\eta\| < \frac{\sigma_1}{2}$, alors $m(x) > \frac{\sigma_1}{2} > 0$ pour tout x tel $|x| \leq l$,

C. Q. F. D.

4. Étude de l'algèbre $\mathcal{C}(M_n, I)$. — *Si f et $g \in \mathcal{C}(M_n, I)$ alors $fg \in \mathcal{C}(M_n, I)$.*

En effet $(fg)^{(n)} = \sum C_n^p f^{(p)} g^{(n-p)}$.

Utilisons la convexité de $\log M_n$ et le fait que $|f^{(p)}| < \rho^p M_p$, $|g^{(q)}| < \rho_1^q M_q$, on obtient

$$|(fg)^{(n)}| < M_n(\rho + \rho_1)^n, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

4.1 *Supposons que $f \in \mathcal{C}(M_n, I)$ et que $f(x) \neq 0$, $x \in I$; alors $\frac{1}{f(x)} \in \mathcal{C}(M_n, I)$.*

Preuve. — Posons $g(x) = \frac{1}{f(x)}$, $\sigma = \min f(x)$ alors

$$g^{(p)} = f^{-p-1} \sum \delta_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} f^{\alpha_0} f'^{\alpha_1} f''^{\alpha_2} f^{(p)\alpha_p},$$

où les coefficients δ_α sont indépendants de f. Remplaçons dans cette formule f par un polynome Q de degré p dont les p premières dérivées à l'origine coïncident avec $f(x)$, on obtient

$$g^{(p)}(0) = \left(\frac{1}{Q}\right)^{(p)}_{x=0}$$

Si l'on pose

$$h_p(r) = \sigma - \sum_{s=1}^{p} \frac{M_s}{s!} r^s.$$

On a

$$|Q(z)| > h_p(|z|),$$

d'où une majoration de la dérivée p-ième de Q^{-1} en utilisant la formule de Cauchy :

$$|g^{(p)}(0)| < \frac{p!\, r^{-p}}{h_p(r)} \qquad \text{pour tout } r \text{ tel que } h_p(r) > 0.$$

Prenons en particulier $r = \left(\frac{M_p}{p!}\right)^{\frac{1}{p}} \omega$, où ω est une constante, $\omega < 1$, on obtient en vertu de 1.3.

$$h_p(r) > \sigma - \frac{\omega}{1 - \omega} > 0 \qquad \text{pour } \omega \text{ assez petit.}$$

d'où

$$|g^{(p)}(0)| < M_p \omega^{-p},$$

C. Q. F. D.

5. Démonstration de 1.5. — On détermine d'abord la suite α_k de telle sorte que (2.1.1); (3.1.1) et (1.5.1) soient satisfaits. Ceci sera possible si $\int_1^{+\infty} T(r)\frac{dr}{r^2}$ est assez petit, ce qu'on peut toujours obtenir en modifiant un nombre fini de M_n. Une fois que la suite α_k est déterminée, on détermine $\gamma(u)$ pour que (3.1.2) soit satisfait.

En appliquant 2.4 à la fonction $F(x) = 1$, on obtient que $m(x) \in \mathcal{C}(M_n, I)$. Ensuite (3.1.2) et 4.1 donnent $m^{-1} \in \mathcal{C}(M_n, I)$. Comme $mF \in \mathcal{C}(M_n, I)$ (toujours d'après 2.4) il résulte d'après 4 que $F \in \mathcal{C}(M_n, I)$, ce qui achève la démonstration.

6. Remarque. — On peut se poser le problème de passer du résultat de calcul symbolique individuel 1.5 à un résultat collectif. Notons par $\mathfrak{M}$ l'ensemble des classes de fonctions satisfaisant 1.2, 1.3 et 1.4 sur un segment I fixé (resp. $\mathfrak{M}_1$ l'ensemble des classes satisfaisant 1.2, 1.3.1 et 1.4), et par $A(I)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur I. Alors si l'on pouvait démontrer

$$\bigcap_{\{M_n\} \in \mathfrak{M}} \mathcal{C}(M_n, I) = A(I)$$

(resp. le même résultat $\mathfrak{M}$ étant remplacé par $\mathfrak{M}_1$), alors les seules fonctions opérant sur les boules de rayon l de $L_1(G)$ seraient les fonctions analytiques sur l'intervalle $[-l, +l]$ ce qui est le théorème de KATZNELSON [3] dans le cadre du groupe discret infini le plus général. (*A suivre.*)

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

[1] HELSON (Henri) et KAHANE (Jean-Pierre). — *Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 626-628).

[2] KAHANE (Jean-Pierre) et RUDIN (Walter). — *Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes* (*C. R. Acad.* Sc., t. 247, 1958, p. 773-775).

[3] KATZNELSON (Yitzhak). — *Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, p. 404-406).

[4] MALLIAVIN (Paul). — *Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts* (*Institut des Hautes Études scientifiques*, Publication n° 2, 1959, p. 61-68).

(Manuscrit reçu le 17 juin 1959.)

Paul MALLIAVIN,
Prof. Fac. Sc. Caen,
252, rue de Rivoli,
Paris 1er.