

# BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL MALLIAVIN

## Calcul symbolique et sous-algèbres de $L_1(G)$ (suite)

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 87 (1959), p. 187-190

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1959\\_\\_87\\_\\_187\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__187_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CALCUL SYMBOLIQUE ET SOUS-ALGÈBRES DE  $L_1(G)$  (suite);

PAR

PAUL MALLIAVIN

(Caen).

II. CALCUL SYMBOLIQUE MINIMAL.

1. — Soit  $b \in A(G')$ , on considère la plus petite sous-algèbre fermée contenant  $b$  soit  $B_b$ . Un élément  $c \in B_b$  est limite d'une suite de polynômes  $P_n(b)$ . En particulier  $P_n(x)$  converge quel que soit  $x \in b(G')$ . Ceci permet d'associer à  $c$  la fonction continue définie sur  $b(G')$  par  $\lim P_n(x)$ . On identifie ainsi  $B_b$  à une algèbre de fonctions continues sur  $b(G')$ , on note par  $(b)$  cette algèbre.  $(b)$  est une sous-algèbre fermée de  $[b]$ .

Il est facile de voir que cette inclusion peut être stricte; soit en effet  $a$  un élément satisfaisant à I.1.5, alors la dérivée de la mesure de Dirac à l'origine est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{C}(M_n, I)$  par suite sur  $[a]$ ; cette forme linéaire est nulle sur  $(a^3)$ , d'autre part  $[a^3] = [a]$  et cette forme prend la valeur 1 sur  $a$ , d'où  $(a^3) \neq [a^3]$ .

Soit  $A_1(G')$  les fonctions

$$b(g') = \sum_{k=1}^{+\infty} (\beta_k \operatorname{Re} \langle g_k, g' \rangle + \delta_k \operatorname{Im} \langle g_k, g' \rangle),$$

telles que

$$-\sum |\beta_k| \log |\beta_k| + |\delta_k| \log |\delta_k| < \infty.$$

2. — THÉORÈME. — *Étant donné  $b \in A_1(G')$ , on peut trouver une suite  $M_n$  satisfaisant I.1.2 et I.1.4 telle que pour tout ouvert  $O \supset b(G')$ , on ait*

$$\mathcal{C}(M_n, O) \subset (b).$$

PREUVE. — Soit

$$q(u) = \|\exp(iub(g'))\|'_1.$$

On a, si

$N(t) =$  nombre de  $\beta_k$  ou de  $\delta_k$  tels que  $|\beta_k| > t$  ou  $|\delta_k| > t$ ,

$$\log q(u) < - \int_0^{+\infty} \log(1 + Bt|u|) dN(t) = T_1(u);$$

ceci résulte du fait, démontré en I [5], formule 5.5, que

$$\|\exp(i\nu \operatorname{Re} \langle g_k, g' \rangle)\|'_1 < 1 + B|\nu|,$$

où  $B$  est une constante numérique.

D'autre part le théorème de Fubini donne que

$$\int_1^{+\infty} T_1(u) \frac{du}{u^2} = O\left(\int_0^{+\infty} t \log t dN(t)\right) < +\infty$$

Le théorème des trois cercles d'Hadamard donne que  $T_1(e^t)$  est une fonction convexe de  $t$ . Posons

$$T(u) = T_1(uk(u)),$$

où  $k(u)$  est une fonction tendant vers l'infini assez lentement pour que I.1.4 soit vérifié et que  $T(e^t)$  soit convexe. Définissons  $M_n$  par

$$M_n = \sup_{r>1} r^{n-2} \exp(-T(r)),$$

alors  $\log M_n$  est une suite convexe. Soit  $f \in \mathcal{C}(M_n, (-\infty, +\infty))$ ,  $f$  étant à support compact de mesure  $B_1$ , alors la transformée de Fourier  $\hat{f}$  de  $f$  vérifiera ([2], p. 22)

$$2.2. \quad |\hat{f}(u)| < B_1 \inf_n \rho^n M_n u^{-n} = B_1 u^{-2} \exp\left(-T\left(\frac{u}{\rho}\right)\right).$$

On aura quel que soit  $g' \in G'$ ,

$$2.3. \quad f(b(g')) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iub(g')) \hat{f}(u) du,$$

d'où en intégrant les deux membres sur  $G'$ , et en intervertissant l'ordre des intégrations

$$\|f(b(g'))\|'_1 < \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(u)| q(|u|) du,$$

d'où utilisant 2.2 on obtient  $f \in [b]$ .

On peut éliminer l'hypothèse que  $f$  est à support compact en multipliant  $f$  par une fonction  $F_0 \in \mathcal{C}(M_n, (-\infty, +\infty))$  nulle en dehors de  $O$  et égale à 1

sur  $b(G')$ ; finalement on a démontré que

$$\mathcal{C}(M_n, O) \subset [b].$$

Pour remplacer  $[b]$  par  $(b)$ , on peut remarquer que la norme

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in O, n} \frac{|f^{(n)}(x)|}{\rho^n M_n}$$

définit une topologie plus fine que celle induite par la norme de  $[b]$  (ceci résulte de 2.3) et que les polynômes en  $x$  sont denses dans l'espace de Banach des fonctions  $f$  telles que  $\|f\|_\rho < +\infty$ .

**3. — COROLLAIRE —** *L'algèbre  $(a)$  est régulière.*

En effet d'après I.1.4, il existe dans  $\mathcal{C}(M_n, O)$  des partitions de l'unité arbitrairement fines.

### III. EXTENSION A $m$ ÉLÉMENTS.

**4. —** Soient  $a_1, \dots, a_m, m$  éléments de  $A(G')$ ; on note par  $s(a_1, \dots, a_m)$  la partie de  $R_m$  image de  $G'$  par l'application  $g' \rightarrow \{a_p(g')\}$ .  $[a_1, \dots, a_m]$  notera toujours l'algèbre des fonctions  $F$  définies sur  $s$  telles que

$$F(a_1, \dots, a_m) \in A(G');$$

$(a_1, \dots, a_m)$  les fonctions  $F \in [a_1, \dots, a_m]$  qui sont limites de polynômes pour la norme de  $A(G')$ . D'après [1] et [3] on sait que  $(a_1, \dots, a_m)$  contient les fonctions analytiques dans un voisinage de  $s$  soit  $\mathcal{A}(s)$ . On a les inclusions

$$\mathcal{A}(s) \subset (a_1, \dots, a_m) \subset [a_1, \dots, a_m] \subset C(s),$$

où  $C(s)$  désigne les fonctions continues sur  $s$ . Les deux énoncés qui suivent ont pour but de préciser les deux termes extrêmes de ces inclusions.

On dit que la fonction  $f$  définie sur l'ouvert  $\Omega$  de  $R_m$  appartient à la classe  $\mathcal{C}(M_n, \Omega)$  si

$$\sup_{n, 0^n, x} \left| \frac{D^n f(x)}{M_n} \right|^{1/n} < +\infty,$$

où

$$D^n = \frac{\partial^{n_1}}{\partial x_1^{n_1}} \dots \frac{\partial^{n_m}}{\partial x_m^{n_m}} \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_m = n).$$

On a alors les théorèmes correspondant à I.1.5 et à II.2.

**5. —** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $R_m, M_n$  une suite satisfaisant I.1.2, I.1.3, I.1.4, alors on peut construire  $a_1, \dots, a_m \in A(G')$  de telle sorte que

$$[a_1, \dots, a_m] \subset \mathcal{C}(M_n, \Omega).$$

6. — Soient  $b_1, \dots, b_m$ ,  $m$  éléments donnés de  $A_1(G')$ , alors on peut trouver  $M_n$  satisfaisant I.1.2 et I.1.4 de telle sorte que pour tout ouvert  $O \supset s(b_1, \dots, b_m)$  on ait

$$\mathcal{C}(M_n, O) \subset (b_1, \dots, b_m).$$

La preuve de 5 s'obtient en construisant des  $a_p$  de telle sorte que

$$\left\| \exp \left( i \sum_{p=1}^m u_p a_p \right) \right\|_z < e^{-T(|u|)},$$

où

$$|u| = \left( \sum u_p^2 \right)^{1/2}.$$

On peut construire les  $a_p$  à partir de la série I.1.6 en posant

$$a_p = \sum_{k \equiv p} \alpha_k \operatorname{Im} \langle g_k, g' \rangle$$

la congruence  $k \equiv p$  étant prise modulo  $m$ .

On aura au préalable déterminé les  $\alpha_k$  de telle sorte que les coefficients de chacune des séries  $a_p$  satisfassent I.3.1.1.

La démonstration de 6 s'obtient en montrant comme en II que

$$\log \left\| \exp i \sum u_p a_p \right\|_1 < \int_0^{+\infty} \log(1 + Bt |u|) dN(t),$$

où

$$N(t) = \text{nombre de } \beta_{k,p} \text{ et de } \delta_{k,p} \text{ tel que } |\beta_{k,p}| > t$$

ou

$$|\delta_{k,p}| > t \quad (k = 1, 2, \dots; p = 1, \dots, m).$$

Remarquons pour terminer que si  $G'$  est le cercle alors les fonctions  $a_p$  construites en 5 définissent une courbe de Peano contenant l'ouvert  $\Omega$  de  $R_m$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] ARENS (R.) and CALDERÓN (A. P.). — *Analytic functions of several Banach algebra elements*, (*Ann. Math.*, t. 62, 1955, p. 204-216).  
 [2] MANDELBROJT (S.). — *Séries adhérentes, régularisation des suites, applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1952.  
 [3] WAELEBROECK (L.). — *Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives*, (*J. Math. pures et appl.*, 9<sup>e</sup> série, t. 33, 1954, p. 147-186).

(Manuscrit reçu le 24 septembre 1959).

Paul MALLIAVIN,  
 Prof. Fac. Sc. Caen,  
 252 rue de Rivoli,  
 Paris (1<sup>er</sup>)