

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN LERAY

## **Théorie des points fixes : indice total et nombre de Lefschetz**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 87 (1959), p. 221-233

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1959\\_\\_87\\_\\_221\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__221_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THÉORIE DES POINTS FIXES :  
INDICE TOTAL ET NOMBRE DE LEFSCHETZ;**

PAR

JEAN LERAY

(Paris).

---

**Introduction.**

Soit  $E$  un espace topologique; soit  $\xi$  une application d'une partie de  $E$  dans  $E$ ; on nomme *points fixes de  $\xi$*  les points  $x$  de  $E$  tels que

$$x = \xi(x).$$

Nous noterons  $O$  une partie ouverte de  $E$ ,  $\bar{O}$  sa frontière,  $\bar{O}$  son adhérence.

1. L'indice total  $i(O)$  des points fixes de  $\xi$  appartenant à  $O$  a été défini par [3], puis, sous les hypothèses plus générales que voici, par [2] : on suppose

$$\xi(x) = \varphi(\tau(x)),$$

$\tau$  étant une application continue d'une partie fermée de  $E$  dans un espace convexe  $T$  et  $\varphi$  une application continue de  $T$  dans  $E$ .

Rappelons ([2], n° 76, p. 211; théorème 6, n° 21, p. 126) qu'un espace *convexe* est un espace connexe et compact <sup>(1)</sup>, possédant un recouvrement  $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  ayant les propriétés suivantes :

- a. Chaque  $U_\alpha$  est une partie fermée de  $E$ , ayant même homologie qu'un point;
- b. L'intersection d'un nombre fini de  $U_\alpha$ , ou bien est vide, ou bien est un élément de  $\mathcal{U}$ ;
- c. Tout point de  $E$  possède des voisinages arbitrairement petits, dont chacun est la réunion d'un nombre fini de  $U_\alpha$ .

---

<sup>(1)</sup> [2] dit « bicompat ».

Rappelons les propriétés de  $i(O)$  ([2], théorème 22 bis, n° 82, p. 224) :

**THÉORÈME.** —  $i(O)$  est un entier positif, négatif ou nul, qui est défini quand  $\tau(x)$  est défini sur  $\bar{O} \cap \varphi(T)$  et que  $\dot{O}$  est étranger à l'ensemble des points fixes de  $\xi$  — cet ensemble est compact — ;  $i(O)$  ne dépend pas des valeurs prises par  $\tau(x)$  hors de  $\bar{O}$  — et même hors de  $\dot{O}$ , si  $T$  a même homologie qu'un point. Quand on diminue  $T$ , quand on modifie continûment  $\varphi$  et  $\tau$  sans que  $i(O)$  cesse d'être défini, alors  $i(O)$  reste constant. Soient  $O_\alpha$  des parties ouvertes, deux à deux disjointes, de  $O$ ; si  $\bar{O} - \bigcup_{\alpha} O_\alpha$  ne contient pas de point fixe de  $\xi$  et si  $\tau(x)$  est défini sur  $\bar{O} \cap \varphi(T)$ , alors

$$i(O) = \sum_{\alpha} i(O_{\alpha}).$$

**2. L'indice total  $i(O)$  est égal, dans certains cas, à un nombre de Lefschetz.** — La fin du théorème 22 bis et le théorème 25 bis (n° 82, p. 225) de [2] le montrent. L'objet du présent article est de simplifier ces deux énoncés et d'obtenir le suivant :

**THÉORÈME D.** — Remplaçons  $\xi$  par sa restriction au compact  $\bar{O} \cap \varphi(T)$ ; notons  $\xi^n$  les itérés de  $\xi$ ;  $\xi^n(\bar{O})$  est une suite décroissante de compacts;

$$k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi^n(\bar{O}) = \bigcap_{n > 0} \xi^n(\bar{O})$$

est compact et

$$\xi(k) = k.$$

Supposons  $k \subset O$ ; alors  $i(O)$  et le nombre de Lefschetz  $\Lambda_{\xi}(k)$  sont définis et égaux :

$$i(O) = \Lambda_{\xi}(k);$$

et, plus généralement, si  $K$  est un compact tel que

$$k \subset \xi(K) \subset K \subset \bar{O},$$

$\Lambda_{\xi}(K)$  est défini et

$$i(O) = \Lambda_{\xi}(K).$$

En particulier, si  $\tau$  est défini sur  $\varphi(T)$ , alors

$$i(E) = \Lambda_{\xi}(\varphi(T)).$$

Rappelons la définition du nombre de Lefschetz  $\Lambda_{\xi}(E)$  : l'homomorphisme réciproque d'une application continue  $\xi$  de  $E$  en lui-même est un endo-

morphisme  $\xi^{-1}$  de son groupe de cohomologie  $(^2) \mathcal{E}$ , à coefficients rationnels; soit  $T(\mathcal{E}^p)$  la trace de la restriction de cet endomorphisme à  $\mathcal{E}^p$ , groupe de cohomologie de dimension  $p$ ; si  $T(\mathcal{E}^p)$  est défini quel que soit  $p$ , et nul quand  $p$  est grand, alors  $\Lambda_\xi(E)$  est défini et vaut

$$\Lambda_\xi(E) = \sum_{p \geq 0} (-1)^p T(\mathcal{E}^p).$$

[2] emploie la définition classique de la trace : la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel est définie quand la dimension de cet espace est finie et seulement dans ce cas. Le théorème D ne vaut que si l'on emploie une définition de la trace plus générale, quoique bien banale. Le § 1 l'énonce et l'étudie. Le § 2 l'emploie à simplifier et compléter les théorèmes 20, 23 et 25 bis de [2] : il les transforme en des théorèmes A, B, C, dont il déduit aisément le théorème D.

A. DELEANU [1] étend ces résultats aux rétractes d'espaces convexoïdes; c'est pour répondre à ses questions que j'ai rédigé le présent article  $(^3)$ .

### § 1. La trace.

**3. Sommaire du § 1.** — Soit  $\mathcal{E}$  un espace vectoriel sur un corps  $\mathcal{K}$ ; soit  $\Theta$  un endomorphisme de  $\mathcal{E}$ ; soient  $\overset{1}{\Theta} = \Theta, \overset{2}{\Theta}, \overset{3}{\Theta}, \dots$ , ses itérés;  $\overset{-1}{\Theta}, \overset{-2}{\Theta}, \dots$ , leurs inverses, qui sont en général multivoques.

La trace  $T_\Theta(\mathcal{E})$  est définie *classiquement* quand  $\dim \mathcal{E} < +\infty$  : si  $\mathcal{E}$  a pour base  $e_1, \dots, e_l$  et si

$$\Theta e_p = \sum_{q=1}^l k_p^q e_q \quad (k_p^q \in \mathcal{K}),$$

alors

$$T_\Theta(\mathcal{E}) = \sum_{p=1}^l k_p^p.$$

**DÉFINITION.** — Notons  $\mathcal{X}_\Theta(\mathcal{E})$  le plus petit sous-espace vectoriel  $\mathcal{E}'$  de  $\mathcal{E}$  tel que

$$\overset{-1}{\Theta}(\mathcal{E}') = \mathcal{E}';$$

évidemment

$$\mathcal{X}_\Theta(\mathcal{E}) = \bigcup_{p \geq 1} \overset{-p}{\Theta}(o) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \overset{-p}{\Theta}(o).$$

$(^2)$  [2] dit « homologie » au lieu de cohomologie;  $\xi^{-1}$  est généralement noté  $\xi^*$ .

$(^3)$  Cet article précise la remarque qui suit le théorème 20 de [2] (n° 55, p. 179).

Quand

$$\dim[\mathcal{E}/\mathcal{R}_\Theta(\mathcal{E})] < +\infty,$$

nous définissons la trace  $T_\Theta(\mathcal{E})$  par la relation

$$(1) \quad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta[\mathcal{E}/\mathcal{R}_\Theta(\mathcal{E})],$$

où le second membre a le sens classique.

*La justification* de cette définition est donnée par le n° 4 : il prouve que (1) a lieu quand  $\dim \mathcal{E} < +\infty$ .

*Les propriétés* de la trace que nous venons de définir sont les suivantes :

**PROPOSITION a.** — Soit  $\mathcal{E}'$  un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$ , stable par  $\Theta$  :  $\Theta \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$ ;  $\Theta$  opère donc sur  $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}/\mathcal{E}'$ . Supposons :

- ou bien  $T_\Theta(\mathcal{E})$  défini;
- ou bien  $T_\Theta(\mathcal{E}')$  et  $T_\Theta(\mathcal{E}'')$  définis.

Alors les trois traces  $T_\Theta(\mathcal{E})$ ,  $T_\Theta(\mathcal{E}')$  et  $T_\Theta(\mathcal{E}'')$  sont définies; elles sont liées par la relation

$$(2) \quad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta(\mathcal{E}') + T_\Theta(\mathcal{E}'').$$

**PREUVE.** — Voir le n° 5.

**NOTE.** — Cette proposition a s'applique à la trace classique.

**PROPOSITION b.** — Soit  $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}/\mathcal{E}'$ ,  $\mathcal{E}'$  étant un sous-espace de  $\mathcal{E}$ , stable par  $\Theta$ . Supposons qu'à tout élément  $e$  de  $\mathcal{E}$  corresponde un entier  $p \geq 0$ , fonction de  $e$ , tel que

$$\Theta^p e = 0.$$

Alors les trois traces  $T_\Theta(\mathcal{E})$ ,  $T_\Theta(\mathcal{E}')$ ,  $T_\Theta(\mathcal{E}'')$  sont définies et nulles :

$$(3) \quad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta(\mathcal{E}') = T_\Theta(\mathcal{E}'') = 0.$$

**PREUVE.** — Le n° 6 prouvera cette proposition, presque évidente.

**NOTE.** — La trace classique vérifie seulement cette proposition b, alourdie de l'hypothèse :

$$T_\Theta(\mathcal{E}) \text{ est défini; } \quad \text{c'est-à-dire } \dim \mathcal{E} < +\infty.$$

**PROPOSITION c.** — Soit  $\mathcal{F}$  un second espace vectoriel sur  $\mathcal{K}$ ; soient deux homomorphismes

$$\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}; \quad \nu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Si  $T_{\nu\mu}(\mathcal{E})$  est défini, alors  $T_{\mu\nu}(\mathcal{F})$  est défini et

$$(4) \quad T_{\nu\mu}(\mathcal{E}) = T_{\mu\nu}(\mathcal{F}).$$

PREUVE. — Voir le n° 7.

NOTE. — La trace classique vérifie seulement cette proposition alourdie de l'hypothèse :

$$T_{\mu, \nu}(\mathcal{F}) \text{ est défini; } \quad \text{c'est-à-dire } \dim \mathcal{F} < +\infty.$$

4. Justification de la définition (1). — NOTATIONS. — On emploie la définition classique de la trace; on suppose

$$\dim \mathcal{E} < +\infty.$$

Il s'agit de prouver que (1) a lieu. Or la proposition  $\alpha$  vaut. Il s'agit donc de prouver que

$$T_{\Theta}[\mathcal{X}_{\Theta}(\mathcal{E})] = 0.$$

En d'autres termes, il s'agit de prouver le

LEMME. — Si  $\mathcal{X}_{\Theta}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ , alors  $T_{\Theta}(\mathcal{E}) = 0$ .

PREUVE. — Par hypothèse,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \overset{-p}{\Theta}(0) = \mathcal{E}, \quad \dim \mathcal{E} < +\infty;$$

donc, à condition de choisir  $p$  assez grand,

$$\overset{-p}{\Theta}(0) = \mathcal{E}, \quad \text{c'est-à-dire } \overset{p}{\Theta} \mathcal{E} = 0;$$

donc, vu la proposition  $\alpha$ ,

$$(4.1) \quad T_{\Theta}(\mathcal{E}) = T_{\Theta}(\mathcal{E}/\Theta \mathcal{E}) + T_{\Theta}(\Theta \mathcal{E}/\overset{2}{\Theta} \mathcal{E}) + \dots + T_{\Theta}(\overset{p-1}{\Theta} \mathcal{E}/\overset{p}{\Theta} \mathcal{E}).$$

Mais  $\Theta = 0$  sur  $\mathcal{E}/\Theta \mathcal{E}$ ,  $\Theta \mathcal{E}/\overset{2}{\Theta} \mathcal{E}$ , ...,  $\overset{p-1}{\Theta} \mathcal{E}/\overset{p}{\Theta} \mathcal{E}$ ; or  $T_{\Theta} = 0$  quand  $\Theta = 0$ ; donc

$$T_{\Theta}(\mathcal{E}/\Theta \mathcal{E}) = T_{\Theta}(\Theta \mathcal{E}/\overset{2}{\Theta} \mathcal{E}) = \dots = T_{\Theta}(\overset{p-1}{\Theta} \mathcal{E}/\overset{p}{\Theta} \mathcal{E}) = 0.$$

Donc (4.1) se réduit à

$$T_{\Theta}(\mathcal{E}) = 0.$$

5. Preuve de la proposition  $\alpha$ . — NOTATIONS. — Notons

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\Theta}(\mathcal{E}), \quad \mathcal{X}' = \mathcal{X}_{\Theta}(\mathcal{E}'), \quad \mathcal{X}'' = \mathcal{X}_{\Theta}(\mathcal{E}''),$$

$$\mathcal{X}^* = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \overset{-p}{\Theta}(\mathcal{E}').$$

$\mathcal{X} + \mathcal{E}'$  désigne le plus petit sous-espace vectoriel de  $\mathcal{E}$  contenant  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{E}'$ .

PROPRIÉTÉS DE  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{X}''$ ,  $\mathcal{X}^*$ . — Soit  $e \in \mathcal{E}$ ; pour que  $e \in \mathcal{X}$ , il faut et suffit que  $\Theta^p e = 0$  quand  $p$  est supérieur à un nombre fonction de  $e$ . Donc

$$(5.1) \quad \Theta^{+p} \mathcal{X} \subset \mathcal{X},$$

$$(5.2) \quad \mathcal{X}' = \mathcal{X} \cap \mathcal{E}'.$$

De (5.2) résulte l'isomorphisme

$$(5.3) \quad \mathcal{E}'/\mathcal{X}' \simeq (\mathcal{X} + \mathcal{E}')/\mathcal{X}.$$

Évidemment,

$$(5.4) \quad \mathcal{X} + \mathcal{E}' \subset \mathcal{X}^*,$$

$$(5.5) \quad \mathcal{X}'' = \mathcal{X}^* \cap \mathcal{E}'.$$

De (5.5) résulte l'isomorphisme

$$(5.6) \quad \mathcal{E}''/\mathcal{X}'' \simeq \mathcal{E}/\mathcal{X}^*.$$

LEMME 5.1. — Si  $\dim \mathcal{E}/\mathcal{X}' < +\infty$ , alors

$$\dim \mathcal{E}'/\mathcal{X}' < +\infty \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{E}''/\mathcal{X}'' < +\infty.$$

PREUVE QUE  $\dim \mathcal{E}'/\mathcal{X}' < +\infty$ . — Vu (5.3),

$$\mathcal{E}'/\mathcal{X}' \simeq (\mathcal{X} + \mathcal{E}')/\mathcal{X} \subset \mathcal{E}/\mathcal{X};$$

donc

$$\dim \mathcal{E}'/\mathcal{X}' \leq \dim \mathcal{E}/\mathcal{X} < +\infty.$$

PREUVE QUE  $\dim \mathcal{E}''/\mathcal{X}'' < +\infty$ . — (5.4) et (5.6) donnent un homomorphisme de  $\mathcal{E}/(\mathcal{X} + \mathcal{E}')$  sur  $\mathcal{E}''/\mathcal{X}''$ ; il existe un homomorphisme naturel de  $\mathcal{E}/\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{E}/(\mathcal{X} + \mathcal{E}')$ ; en composant ces deux homomorphismes, on obtient un homomorphisme de  $\mathcal{E}/\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{E}''/\mathcal{X}''$ ; donc

$$\dim \mathcal{E}''/\mathcal{X}'' \leq \dim \mathcal{E}/\mathcal{X} < +\infty.$$

LEMME 5.2. — Si  $\dim \mathcal{E}'/\mathcal{X}' < +\infty$ , alors

$$(5.7) \quad \mathcal{X} + \mathcal{E}' = \mathcal{X}^*.$$

PREUVE. — Vu (5.3),

$$\dim (\mathcal{X} + \mathcal{E}')/\mathcal{X} < +\infty;$$

il existe donc un entier  $q \geq 0$  tel que  $\Theta^p[(\mathcal{X} + \mathcal{E}')/\mathcal{X}]$  est indépendant de  $p$ , si  $p \geq q$ ; c'est-à-dire

$$(5.8) \quad \mathcal{X} + \Theta^p \mathcal{E}' = \mathcal{X} + \Theta^q \mathcal{E}' \quad \text{si} \quad p \geq q.$$

Soit  $e \in \mathcal{E}^*$  : il existe un entier  $n \geq 0$ , fonction de  $e$ , tel que

$$\overset{n}{\Theta} e \in \mathcal{E}';$$

d'où, vu (3.8),

$$\overset{n+\eta}{\Theta} e \in \overset{\eta}{\Theta} \mathcal{E}' \subset \mathcal{X} + \overset{n+\eta}{\Theta} \mathcal{E}';$$

il existe donc  $e' \in \mathcal{E}'$  tel que

$$\overset{n+\eta}{\Theta} (e - e') \in \mathcal{X};$$

d'où, vu (3.1),

$$e - e' \in \mathcal{X}; \quad \text{c'est-à-dire} \quad e \in \mathcal{X} + \mathcal{E}'.$$

Donc

$$\mathcal{E}^* \subset \mathcal{X} + \mathcal{E}',$$

ce qui, joint à (3.4), prouve (3.7).

LEMME 3.3. — Supposons  $\dim \mathcal{E}'/\mathcal{X}' < +\infty$  et  $\dim \mathcal{E}''/\mathcal{X}'' < +\infty$ ; alors  $\dim \mathcal{E}/\mathcal{X} < +\infty$  et

$$(2) \quad T_{\Theta}(\mathcal{E}) = T_{\Theta}(\mathcal{E}') + T_{\Theta}(\mathcal{E}'').$$

PREUVE. — Vu (3.3), on a

$$(3.9) \quad \dim(\mathcal{X} + \mathcal{E}')/\mathcal{X} < +\infty$$

et, vu la définition (1),

$$(3.10) \quad T_{\Theta}(\mathcal{E}') = T_{\Theta}[(\mathcal{X} + \mathcal{E}')/\mathcal{X}].$$

Vu (3.6) et (3.7) on a

$$\mathcal{E}''/\mathcal{X}'' \simeq \mathcal{E}/(\mathcal{X} + \mathcal{E}');$$

d'où

$$(3.11) \quad \dim \mathcal{E}/(\mathcal{X} + \mathcal{E}') < +\infty$$

et, vu la définition (1),

$$(3.12) \quad T_{\Theta}(\mathcal{E}'') = T_{\Theta}[\mathcal{E}/(\mathcal{X} + \mathcal{E}')].$$

De (3.9) et (3.11) résulte

$$\dim \mathcal{E}/\mathcal{X} < +\infty;$$

donc, vu la définition (1),  $T_{\Theta}(\mathcal{E})$  est défini et vaut

$$T_{\Theta}(\mathcal{E}) = T_{\Theta}[\mathcal{E}/\mathcal{X}];$$

d'où (2), vu (3.10), (3.12) et la validité de la proposition *a* quand  $\dim \mathcal{E} < +\infty$ .

Les lemmes 3.1 et 3.3 prouvent la proposition *a*.



**6. Preuve de la proposition b.** — Par hypothèse, à tout  $e \in \mathcal{E}$  correspond un entier  $p > 0$  tel que

$$\Theta^p e = 0.$$

Cela signifie que

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}.$$

Donc, vu (5.2),

$$\mathcal{N}' = \mathcal{E}'.$$

Donc, vu la définition (1),  $T_{\Theta}(\mathcal{E})$  et  $T_{\Theta}(\mathcal{E}')$  sont définis et nuls

$$T_{\Theta}(\mathcal{E}) = T_{\Theta}(\mathcal{E}') = 0.$$

Donc, vu la proposition a,  $T_{\Theta}(\mathcal{E}'')$  est défini et nul

$$T_{\Theta}(\mathcal{E}'') = 0.$$

**7. Preuve de la proposition c.** — NOTATIONS. — Notons

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\nu\mu}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}, \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_{\nu\mu}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}.$$

Commençons par ne pas supposer  $T_{\nu\mu}(\mathcal{E})$  défini :

LEMME 7.1. — On a  $\mathcal{N} = \overset{-1}{\mu}\mathcal{N}$ .

PREUVE. — Soit  $e \in \mathcal{N}$  : il existe un entier  $p \geq 0$  tel que

$$(\nu\mu)^p e = 0,$$

d'où

$$\mu(\nu\mu)^p e = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\mu\nu)^p \mu e = 0, \quad \mu e \in \mathcal{N}, \quad e \in \overset{-1}{\mu}\mathcal{N},$$

donc

$$(7.1) \quad \mathcal{N} \subset \overset{-1}{\mu}\mathcal{N}.$$

Soit maintenant  $e \in \overset{-1}{\mu}\mathcal{N}$ ; on a

$$\mu e \in \mathcal{N},$$

il existe donc un entier  $p \geq 0$  tel que

$$(\nu\mu)^p \mu e = 0,$$

d'où

$$\nu(\mu\nu)^p \mu e = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\nu\mu)^{p+1} e = 0, \quad e \in \mathcal{N};$$

donc

$$(7.2) \quad \mu^{-1} \mathcal{N} \subset \mathcal{M}.$$

(7.1) et (7.2) prouvent le lemme.

Ce lemme 7.1 entraîne évidemment la relation

$$(7.3) \quad \mu \mathcal{M} \subset \mathcal{N}$$

et le lemme suivant :

LEMME 7.2. —  $\mu$  induit un isomorphisme de  $\mathcal{E}/\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{F}/\mathcal{N}$  (c'est-à-dire sur un sous-espace de  $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ ).

De ce lemme résulte que

$$\dim \mathcal{E}/\mathcal{M} \leq \dim \mathcal{F}/\mathcal{N},$$

d'où, en permutant les rôles de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  :

$$\text{LEMME 7.3. — } \dim \mathcal{E}/\mathcal{M} = \dim \mathcal{F}/\mathcal{N}.$$

PREUVE DE LA PROPOSITION c. — Supposons  $T_{\nu\mu}(\mathcal{E})$  défini, c'est-à-dire  $\dim \mathcal{E}/\mathcal{M} < +\infty$ ; donc, vu le lemme précédent,  $\dim \mathcal{F}/\mathcal{N} < +\infty$ :  $T_{\nu\mu}(\mathcal{F})$  est défini. D'après la définition (1),

$$T_{\nu\mu}(\mathcal{E}) = T_{\nu\mu}(\mathcal{E}/\mathcal{M}), \quad T_{\mu\nu}(\mathcal{F}) = T_{\mu\nu}(\mathcal{F}/\mathcal{N}),$$

Or la proposition c est classique pour les homomorphismes

$$\mu: \mathcal{E}/\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{N}; \quad \nu: \mathcal{F}/\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{M}.$$

d'espaces vectoriels de dimensions finies; elle donne

$$T_{\nu\mu}(\mathcal{E}/\mathcal{M}) = T_{\nu\mu}(\mathcal{E}/\mathcal{N}).$$

D'où (4).

## § 2. Le nombre de Lefschetz.

Exposons maintenant les simplifications qu'apporte à [2] la définition de la trace qui précède.

8. Comparaison des nombres de Lefschetz de  $E$  et  $F$ . — Reprenons le n° 55 de [2], p. 177. On y considère : un espace topologique normal  $E$ ; une partie fermée  $F$  de  $E$ ; son complémentaire  $O = E - F$ ; les groupes de cohomologie à supports fermés et coefficients rationnels, de dimension  $p$  :  $\mathcal{E}^p$ ,  $\mathcal{F}^p$ ,  $\mathcal{O}^p$  de  $E$ ,  $F$ ,  $O$ ; enfin la suite exacte, aujourd'hui classique

$$\rightarrow \mathcal{E}^p \rightarrow \mathcal{F}^p \rightarrow \mathcal{O}^{p+1} \rightarrow \mathcal{E}^{p+1} \rightarrow$$

c'est-à-dire les trois isomorphismes ([2], n° 45, p. 171)

$$(8.1) \quad \mathcal{E}^p/\mathcal{E}_0^p \simeq \mathcal{F}_E^p, \quad \mathcal{F}^p/\mathcal{F}_E^p \simeq \mathcal{G}^{p+1}, \quad \mathcal{O}^p/\mathcal{G}^p \simeq \mathcal{E}_0^p.$$

On considère une application continue  $\xi$  de  $E$  en lui-même, telle que  $\xi(F) \subset F$  et les endomorphismes réciproques  $\bar{\xi}^{-1}$  de

$$\mathcal{E}^p, \mathcal{F}^p, \mathcal{O}^p, \mathcal{E}_0^p, \mathcal{F}_E^p, \mathcal{G}^p;$$

on note leurs itérés  $\bar{\xi}^{-n}$  et leurs traces, si elles existent :

$$T(\mathcal{E}^p), T(\mathcal{F}^p), T(\mathcal{O}^p), T(\mathcal{E}_0^p), T(\mathcal{F}_E^p), T(\mathcal{G}^p).$$

Si  $T(\mathcal{E}^p)$  et  $T(\mathcal{F}^p)$  existent quel que soit  $p$ , alors, vu (8.1) et la proposition  $a$ , toutes ces traces existent et vérifient les relations

$$\begin{aligned} T(\mathcal{E}^p) &= T(\mathcal{E}_0^p) + T(\mathcal{F}_E^p), & T(\mathcal{F}^p) &= T(\mathcal{F}_E^p) + T(\mathcal{G}^{p+1}) \\ T(\mathcal{O}^p) &= T(\mathcal{G}^p) + T(\mathcal{E}_0^p). \end{aligned}$$

Supposons  $E$  compact, notons

$$f = \bigcap_n \bar{\xi}^n(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\xi}^n(E)$$

et supposons  $f \subset F$ . Alors on voit, comme dans [2], n° 55, p. 178, qu'à tout cocycle à support compact  $(^4) Z^p$  de  $O$  correspond un entier  $n \geq 0$  tel que  $\bar{\xi}^n(Z^p) \sim 0$ . Donc, vu (8.1) et la proposition  $b$ ,

$$T(\mathcal{O}^p) = T(\mathcal{G}^p) = T(\mathcal{E}_0^p) = 0 \quad \text{quel que soit } p \geq 0.$$

D'où vu (8.1) et la proposition  $a$ ,

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{F}_E^p) = T(\mathcal{F}^p)$$

sous la seule hypothèse que  $T(\mathcal{E}^p)$  ou  $T(\mathcal{F}^p)$  existe : l'hypothèse du théorème 20 de [2] que les anneaux d'homologie de  $E$  et  $F$  aient tous deux des bases finies devient donc superflue; ce théorème 20 de [2] devient le

**THÉORÈME A.** — Soit un espace compact  $E$ ; soit  $\xi(x)$  une application de  $E$  en lui-même; soit

$$f = \bigcap_{n \geq 0} \bar{\xi}^n(E) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bar{\xi}^n(E);$$

$f$  est compact et  $(^5) \xi(f) = f$ . Soit  $F$  une partie compacte de  $E$  telle que

$$f \subset \bar{\xi}(F) \subset F \quad (\text{par exemple : } F = f).$$

Soient  $T(\mathcal{E}^p)$  et  $T(\mathcal{F}^p)$  les traces des endomorphismes de  $\mathcal{E}^p$  et de  $\mathcal{F}^p$

(<sup>4</sup>) [2] dit « cycle ».

(<sup>5</sup>) [2] affirme à tort que  $\bar{\xi}^{-1}(f) = f$ .

réciproques de  $\xi$ ; si l'une de ces traces est définie, l'autre est définie et lui est égale :

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{F}^p).$$

Soient  $\Lambda_\xi(E)$  et  $\Lambda_\xi(F)$  les nombres de Lefschetz de  $\xi$  et de sa restriction à  $F$ ; si l'un de ces nombres de Lefschetz est défini, l'autre est défini et lui est égal:

$$\Lambda_\xi(E) = \Lambda_\xi(F).$$

### 9. Points fixes d'une application en lui-même d'un espace convexoïde.

— Le théorème 20 sert à prouver le théorème 25 de [2] (n° 78, p. 216). Remplaçons le théorème 20 par le théorème A : l'hypothèse suivante du théorème 25 devient superflue :

(14) L'anneau d'homologie de  $F$  a une base finie.

Ce théorème 25 devient le cas particulier suivant du théorème D :

THÉORÈME B. — Soit  $O$  une partie ouverte d'un espace convexoïde  $E$ . Soit  $\xi$  une application de  $\bar{O}$  dans  $E$ . Soit  $i(O)$  l'indice total des points fixes de  $\xi$  intérieurs à  $O$ . Soit

$$f = \bigcap_{n>0} \xi^n(\bar{O}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \xi^n(\bar{O});$$

$f$  est compact et  $\xi(f) = f$ . Supposons  $f \subset O$ ; alors  $i(O)$  et  $\Lambda_\xi(f)$  sont définis et égaux :

$$i(O) = \Lambda_\xi(f);$$

et, plus généralement, si  $E$  est un compact tel que

$$f \subset \xi(F) \subset F \subset \bar{O},$$

alors  $\Lambda_\xi(F)$  est défini et

$$i(O) = \Lambda_\xi(F).$$

10. Points fixes d'une application. —  $\xi(x) = \varphi(\tau(x))$ . — Le théorème 25 sert à prouver le théorème 25 bis de [2] (n° 82, p. 225). Remplaçons le théorème 25 par le théorème B; l'hypothèse suivante du théorème 25 bis devient superflue :

$F$  a une base d'homologie finie.

Ce théorème peut alors s'énoncer comme suit :

THÉORÈME C. — Soient un espace topologique  $E$ , une partie ouverte  $O$  de  $E$ , un espace convexoïde  $T$ , une application continue  $\varphi$  de  $T$  dans  $E$  et une application continue  $\tau$  de  $\bar{O}$  dans  $T$ . Soit  $i(O)$  l'indice total des points

fixes de  $\xi(x) = \varphi(\tau(x))$  intérieurs à  $O$ . Après avoir remplacé  $\tau$  par sa restriction à  $\overline{O} \cap \varphi(T)$ , définissons

$$f = \lim \tau \varphi \tau \dots \varphi \tau(\overline{O});$$

$f$  est compact et  $\tau(\varphi(f)) = f$ . Supposons  $f \subset \varphi^{-1}(O)$ , alors  $i(O)$  et  $\Lambda_{\tau\varphi}(f)$  sont définis et

$$i(O) = \Lambda_{\tau\varphi}(f);$$

et, plus généralement, si  $F$  est une partie compacte de  $T$  telle que

$$f \subset \tau(\varphi(F)) \subset F \subset \varphi^{-1}(\overline{O}),$$

alors  $\Lambda_{\tau\varphi}(F)$  est défini et

$$i(O) = \Lambda_{\tau\varphi}(f).$$

Ce théorème C affirme que, dans certains cas, l'indice total des points fixes de  $\xi = \varphi\tau$  est un nombre de Lefschetz de  $\tau\varphi$ . La proposition c permet d'en déduire aisément le théorème D, qui affirme que cet indice est alors un nombre de Lefschetz de  $\xi$  elle-même.

PREUVE DU THÉORÈME D. — Conservons les hypothèses du théorème C; définissons

$$k = \varphi(f);$$

évidemment

$$f = \tau(k).$$

Appliquons la proposition c aux homomorphismes  $\varphi^{-1}$  et  $\tau^{-1}$ , des groupes de cohomologie de  $f$  et  $k$ , réciproques des applications  $\varphi$  et  $\tau$ ; nous voyons que, puisque  $\Lambda_{\tau\varphi}(f)$  est défini,  $\Lambda_{\varphi\tau}(k)$ , c'est-à-dire  $\Lambda_{\xi}(k)$ , est défini et lui est égal

$$\Lambda_{\xi}(k) = \Lambda_{\tau\varphi}(f).$$

D'où, d'après le théorème C,

$$i(O) = \Lambda_{\xi}(k).$$

Plus généralement, vu le théorème A,  $\Lambda_{\xi}(K)$  est donc défini et

$$i(O) = \Lambda_{\xi}(K)$$

quand  $K$  vérifie les hypothèses qu'énonce le théorème D.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] DELEANU (Aristide). — *Théorie des points fixes sur les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes* (Bull. Soc. math. Fr., t. 87, 1959, p. 235-243).

- [2] LERAY (Jean). — *Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique* (*J. Math. pures et appl.*, 9<sup>e</sup> série, t. 24, 1945, p. 169-199); *Sur les équations et les transformations* (*J. Math. pures et appl.*, 9<sup>e</sup> série, t. 24, 1945, p. 201-248).
- [3] LERAY (J.) et SCHAUDER (J.). — *Topologie et équations fonctionnelles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. 51, 1934, p. 45-78).

(Manuscrit reçu le 16 août 1959.)

Jean LERAY, 12 rue Pierre Curie, Sceaux (Seine).

