BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN LERAY

**Théorie des points fixes : indice total et nombre de Lefschetz**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 87 (1959), p. 221-233

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__221_0>

*Bull. Soc. math. France*,
87, 1959, p. 221 à 233.

# THÉORIE DES POINTS FIXES : INDICE TOTAL ET NOMBRE DE LEFSCHETZ;

PAR

JEAN LERAY
(Paris).

## Introduction.

Soit $E$ un espace topologique; soit $\xi$ une application d'une partie de $E$ dans $E$; on nomme *points fixes de* $\xi$ les points $x$ de $E$ tels que

$$x = \xi(x).$$

Nous noterons $O$ une partie ouverte de $E$, $\dot{O}$ sa frontière, $\bar{O}$ son adhérence.

1. **L'indice total $i(O)$ des points fixes de $\xi$ appartenant à $O$** a été défini par [3], puis, sous les hypothèses plus générales que voici, par [2] : on suppose

$$\xi(x) = \varphi(\tau(x)),$$

$\tau$ étant une application continue d'une partie fermée de $E$ dans un espace convexoïde $T$ et $\varphi$ une application continue de $T$ dans $E$.

Rappelons ([2], n° 76, p. 211; théorème 6, n° 21, p. 126) qu'un espace *convexoïde* est un espace connexe et compact (1), possédant un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ ayant les propriétés suivantes :

*a*. Chaque $U_\alpha$ est une partie fermée de $E$, ayant même homologie qu'un point;

*b*. L'intersection d'un nombre fini de $U_\alpha$, ou bien est vide, ou bien est un élément de $\mathfrak{U}$;

*c*. Tout point de $E$ possède des voisinages arbitrairement petits, dont chacun est la réunion d'un nombre fini de $U_\alpha$.

(1) [2] dit « bicompact ».

Rappelons les propriétés de $i(O)$ ([2], théorème 22 *bis*, n° 82, p. 224) :

THÉORÈME. — $i(O)$ est un entier positif, négatif ou nul, qui est défini quand $\tau(x)$ est défini sur $\overline{O}\cap\varphi(T)$ et que $\dot{O}$ est étranger à l'ensemble des points fixes de $\xi$ — cet ensemble est compact — ; $i(O)$ ne dépend pas des valeurs prises par $\tau(x)$ hors de $\overline{O}$ — et même hors de $\dot{O}$, si $T$ a même homologie qu'un point. Quand on diminue $T$, quand on modifie continûment $\varphi$ et $\tau$ sans que $i(O)$ cesse d'être défini, alors $i(O)$ reste constant. Soient $O_\alpha$ des parties ouvertes, deux à deux disjointes, de $O$; si $\overline{O}-\bigcup\limits_\alpha O_\alpha$ ne contient pas de point fixe de $\xi$ et si $\tau(x)$ est défini sur $\overline{O}\cap\varphi(T)$, alors

$$i(O)=\sum_\alpha i(O_\alpha).$$

**2. L'indice total $i(O)$ est égal, dans certains cas, à un nombre de Lefschetz.** — La fin du théorème 22 *bis* et le théorème 25 *bis* (n° 82, p. 225) de [2] le montrent. L'objet du présent article est de simplifier ces deux énoncés et d'obtenir le suivant :

THÉORÈME D. — *Remplaçons* $\xi$ *par sa restriction au compact* $\overline{O}\cap\varphi(T)$; *notons* $\overset{n}{\xi}$ *les itérés de* $\xi$; $\overset{n}{\xi}(\overline{O})$ *est une suite décroissante de compacts*;

$$k=\lim_{n\to+\infty}\overset{n}{\xi}(\overline{O})=\bigcap_{n>0}\overset{n}{\xi}(\overline{O})$$

*est compact et*

$$\xi(k)=k.$$

*Supposons* $k\subset O$; *alors* $i(O)$ *et le nombre de Lefschetz* $\Lambda_\xi(k)$ *sont définis et égaux :*

$$i(O)=\Lambda_\xi(k);$$

*et, plus généralement, si* $K$ *est un compact tel que*

$$k\subset\xi(K)\subset K\subset\overline{O},$$

$\Lambda_\xi(K)$ *est défini et*

$$i(O)=\Lambda_\xi(K).$$

*En particulier, si* $\tau$ *est défini sur* $\varphi(T)$, *alors*

$$i(E)=\Lambda_\xi(\varphi(T)).$$

Rappelons la définition du *nombre de Lefschetz* $\Lambda_\xi(\mathrm{E})$ : l'homomorphisme réciproque d'une application continue $\xi$ de $E$ en lui-même est un endomorphisme $\overset{-1}{\xi}$ de son groupe de cohomologie [2] $\mathcal{E}$, à coefficients rationnels; soit $T(\mathcal{E}^p)$ la trace de la restriction de cet endomorphisme à $\mathcal{E}^p$, groupe de cohomologie de dimension $p$; si $\mathrm{T}(\mathcal{E}^p)$ est défini quel que soit $p$, et nul quand $p$ est grand, alors $\Lambda_\xi(E)$ est défini et vaut

$$\Lambda_\xi(E) = \sum_{p \geqq 0} (-1)^p\, T(\mathcal{E}^p).$$

[2] emploie la définition classique de la trace : la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel est définie quand la dimension de cet espace est finie et seulement dans ce cas. Le théorème D ne vaut que si *l'on emploie une définition de la trace plus générale*, quoique bien banale. Le § 1 l'énonce et l'étudie. Le § 2 l'emploie à simplifier et compléter les théorèmes 20, 25 et 25 *bis* de [2] : il les transforme en des théorèmes A, B, C, dont il déduit aisément le théorème D.

A. Deleanu [1] étend ces résultats aux rétractes d'espaces convexoïdes; c'est pour répondre à ses questions que j'ai rédigé le présent article [3].

## § 1. La trace.

**3. Sommaire du § 1.** — Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathcal{K}$; soit $\Theta$ un endomorphisme de $\mathcal{E}$; soient $\overset{1}{\Theta} = \Theta$, $\overset{2}{\Theta}$, $\overset{3}{\Theta}$, ..., ses itérés; $\overset{-1}{\Theta}$, $\overset{-2}{\Theta}$, ..., leurs inverses, qui sont en général multivoques.

La trace $T_\Theta(\mathcal{E})$ est définie *classiquement* quand $\dim \mathcal{E} < +\infty$ : si $\mathcal{E}$ a pour base $e_1, \ldots, e_l$ et si

$$\Theta e_p = \sum_{q=1}^{l} k_p^q e_q \qquad (k_p^q \in \mathcal{K}),$$

alors

$$T_\Theta(\mathcal{E}) = \sum_{p=1}^{l} k_p^p.$$

Définition. — Notons $\mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E})$ le plus petit sous-espace vectoriel $\mathcal{E}'$ de $\mathcal{E}$ tel que

$$\overset{-1}{\Theta}(\mathcal{E}') = \mathcal{E}';$$

évidemment

$$\mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E}) = \bigcup_{p \geqq 1} \overset{-p}{\Theta}(0) = \lim_{p \to +\infty} \overset{-p}{\Theta}(0).$$

---

[2] [2] dit « homologie » au lieu de cohomologie; $\overset{-1}{\xi}$ est généralement noté $\xi^*$.

[3] Cet article précise la remarque qui suit le théorème 20 de [2] (n° 55, p. 179).

Quand

$$\dim[\mathcal{E}/\mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E})] < +\infty,$$

nous définissons la trace $T_\Theta(\mathcal{E})$ par la relation

$$(1) \qquad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta[\mathcal{E}/\mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E})],$$

où le second membre a le sens classique.

*La justification* de cette définition est donnée par le n° 4 : il prouve que (1) a lieu quand $\dim \mathcal{E} < +\infty$.

*Les propriétés* de la trace que nous venons de définir sont les suivantes :

Proposition *a*. — Soit $\mathcal{E}'$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$, stable par $\Theta$ : $\Theta\mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'$; $\Theta$ opère donc sur $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}/\mathcal{E}'$. Supposons :

— ou bien $T_\Theta(\mathcal{E})$ défini;
— ou bien $T_\Theta(\mathcal{E}')$ et $T_\Theta(\mathcal{E}'')$ définis.

Alors les trois traces $T_\Theta(\mathcal{E})$, $T_\Theta(\mathcal{E}')$ et $T_\Theta(\mathcal{E}'')$ sont définies; elles sont liées par la relation

$$(2) \qquad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta(\mathcal{E}') + T_\Theta(\mathcal{E}'').$$

Preuve. — *Voir* le n° 5.

Note. — Cette proposition *a* s'applique à la trace classique.

Proposition *b*. — Soit $\mathcal{E}'' = \mathcal{E}/\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}'$ étant un sous-espace de $\mathcal{E}$, stable par $\Theta$. Supposons qu'à tout élément $e$ de $\mathcal{E}$ corresponde un entier $p \geq 0$, fonction de $e$, tel que

$$\overset{p}{\Theta} e = 0.$$

Alors les trois traces $T_\Theta(\mathcal{E})$, $T_\Theta(\mathcal{E}')$, $T_\Theta(\mathcal{E}'')$ sont définies et nulles :

$$(3) \qquad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta(\mathcal{E}') = T_\Theta(\mathcal{E}'') = 0.$$

Preuve. — Le n° 6 prouvera cette proposition, presque évidente.

Note. — La trace classique vérifie seulement cette proposition *b*, alourdie de l'hypothèse :

$$T_\Theta(\mathcal{E}) \text{ est défini}; \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \dim\mathcal{E} < +\infty.$$

Proposition *c*. — Soit $\mathcal{F}$ un second espace vectoriel sur $\mathcal{K}$; soient deux homomorphismes

$$\mu : \ \mathcal{E} \to \mathcal{F}; \qquad \nu : \ \mathcal{F} \to \mathcal{E}.$$

Si $T_{\nu\mu}(\mathcal{E})$ est défini, alors $T_{\mu\nu}(\mathcal{F})$ est défini et

$$(4) \qquad T_{\nu\mu}(\mathcal{E}) = T_{\mu\nu}(\mathcal{F}).$$

PREUVE. — *Voir* le n° 7.

NOTE. — La trace classique vérifie seulement cette proposition alourdie de l'hypothèse :

$$T_{\mu\nu}(\mathcal{F}) \text{ est défini}; \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \dim \mathcal{F} < +\infty.$$

4. **Justification de la définition** (1). — NOTATIONS. — On emploie la définition classique de la trace; on suppose

$$\dim \mathcal{E} < +\infty.$$

Il s'agit de prouver que (1) a lieu. Or la proposition $a$ vaut. Il s'agit donc de prouver que

$$T_\Theta[\mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E})] = 0.$$

En d'autres termes, il s'agit de prouver le

LEMME. — Si $\mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, alors $T_\Theta(\mathcal{E}) = 0$.

PREUVE. — Par hypothèse,

$$\lim_{p \to +\infty} \overset{-p}{\Theta}(0) = \mathcal{E}, \qquad \dim \mathcal{E} < +\infty;$$

donc, à condition de choisir $p$ assez grand,

$$\overset{-p}{\Theta}(0) = \mathcal{E}, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad \overset{p}{\Theta}\mathcal{E} = 0;$$

donc, vu la proposition $a$,

$$(4.1) \quad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta(\mathcal{E}/\Theta\mathcal{E}) + T_\Theta\left(\Theta\mathcal{E}/\overset{2}{\Theta}\mathcal{E}\right) + \ldots + T_\Theta\left(\overset{p-1}{\Theta}\mathcal{E}/\overset{p}{\Theta}\mathcal{E}\right).$$

Mais $\Theta = 0$ sur $\mathcal{E}/\Theta\mathcal{E}$, $\Theta\mathcal{E}/\overset{2}{\Theta}\mathcal{E}$, $\ldots$, $\overset{p-1}{\Theta}\mathcal{E}/\overset{p}{\Theta}\mathcal{E}$; or $T_\Theta = 0$ quand $\Theta = 0$; donc

$$T_\Theta(\mathcal{E}/\Theta\mathcal{E}) = T_\Theta\left(\Theta\mathcal{E}/\overset{2}{\Theta}\mathcal{E}\right) = \ldots = T_\Theta\left(\overset{p-1}{\Theta}\mathcal{E}/\overset{p}{\Theta}\mathcal{E}\right) = 0.$$

Donc (4.1) se réduit à

$$T_\Theta(\mathcal{E}) = 0.$$

5. **Preuve de la proposition** $a$. — NOTATIONS. — Notons

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E}), \qquad \mathcal{N}' = \mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E}'), \qquad \mathcal{N}'' = \mathcal{N}_\Theta(\mathcal{E}''),$$

$$\mathcal{N}^* = \bigcup_{p=1}^{+\infty} \overset{-p}{\Theta}(\mathcal{E}').$$

$\mathcal{N} + \mathcal{E}'$ désigne le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ contenant $\mathcal{N}$ et $\mathcal{E}'$.

**Propriétés de** $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$, $\mathcal{N}^*$. — Soit $e \in \mathcal{E}$; pour que $e \in \mathcal{N}$, il faut et suffit que $\overset{p}{\Theta} e = 0$ quand $p$ est supérieur à un nombre fonction de $e$. Donc

$$\overset{\pm p}{\Theta} \mathcal{N} \subset \mathcal{N}, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cap \mathcal{E}'. \tag{5.2}$$

De (5.2) résulte l'isomorphisme

$$\mathcal{E}'/\mathcal{N}' \simeq (\mathcal{N} + \mathcal{E}')/\mathcal{N}. \tag{5.3}$$

Évidemment,

$$\mathcal{N} + \mathcal{E}' \subset \mathcal{N}^*, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{N}'' = \mathcal{N}^*/\mathcal{E}'. \tag{5.5}$$

De (5.5) résulte l'isomorphisme

$$\mathcal{E}''/\mathcal{N}'' \simeq \mathcal{E}/\mathcal{N}^*. \tag{5.6}$$

**Lemme 5.1.** — Si $\dim \mathcal{E}/\mathcal{N}' < +\infty$, alors

$$\dim \mathcal{E}'/\mathcal{N}' < +\infty \qquad \text{et} \qquad \dim \mathcal{E}''/\mathcal{N}'' < +\infty.$$

**Preuve que** $\dim \mathcal{E}'/\mathcal{N}' < +\infty$. — Vu (5.3),

$$\mathcal{E}'/\mathcal{N}' \simeq (\mathcal{N} + \mathcal{E}')/\mathcal{N} \subset \mathcal{E}/\mathcal{N};$$

donc

$$\dim \mathcal{E}'/\mathcal{N}' \leqq \dim \mathcal{E}/\mathcal{N} < +\infty.$$

**Preuve que** $\dim \mathcal{E}''/\mathcal{N}'' < +\infty$. — (5.4) et (5.6) donnent un homomorphisme de $\mathcal{E}/(\mathcal{N} + \mathcal{E}')$ *sur* $\mathcal{E}''/\mathcal{N}''$; il existe un homomorphisme naturel de $\mathcal{E}/\mathcal{N}$ *sur* $\mathcal{E}/(\mathcal{N} + \mathcal{E}')$; en composant ces deux homomorphismes, on obtient un homomorphisme de $\mathcal{E}/\mathcal{N}$ *sur* $\mathcal{E}''/\mathcal{N}''$; donc

$$\dim \mathcal{E}''/\mathcal{N}'' \leqq \dim \mathcal{E}/\mathcal{N} < +\infty.$$

**Lemme 5.2.** — Si $\dim \mathcal{E}'/\mathcal{N}' < +\infty$, alors

$$\mathcal{N} + \mathcal{E}' = \mathcal{N}^*. \tag{5.7}$$

**Preuve.** — Vu (5.3),

$$\dim (\mathcal{N} + \mathcal{E}')/\mathcal{N} < +\infty;$$

il existe donc un entier $q \geqq 0$ tel que $\Theta^p[(\mathcal{N} + \mathcal{E}')/\mathcal{N}]$ est indépendant de $p$, si $p \geqq q$; c'est-à-dire

$$\mathcal{N} + \overset{p}{\Theta} \mathcal{E}' = \mathcal{N} + \overset{q}{\Theta} \mathcal{E}' \qquad \text{si} \quad p \geqq q. \tag{5.8}$$

Soit $e \in \mathcal{N}^\star$ : il existe un entier $n \geqq 0$, fonction de $e$, tel que

$$\overset{n}{\Theta}\, e \in \mathcal{E}' ;$$

d'où, vu (5.8),

$$\overset{n+q}{\Theta}\, e \in \overset{q}{\Theta} \mathcal{E}' \subset \mathcal{N} + \overset{n+q}{\Theta}\, \mathcal{E}' ;$$

il existe donc $e' \in \mathcal{E}'$ tel que

$$\overset{n+q}{\Theta}\,(e - e') \in \mathcal{N} ;$$

d'où, vu (5.1),

$$e - e' \in \mathcal{N} ; \qquad \text{c'est-à-dire} \quad e \in \mathcal{N} + \mathcal{E}'.$$

Donc

$$\mathcal{N}^\star \subset \mathcal{N} + \mathcal{E}',$$

ce qui, joint à (5.4), prouve (5.7).

Lemme 5.3. — Supposons $\dim \mathcal{E}'/\mathcal{N}' < +\infty$ et $\dim \mathcal{E}''/\mathcal{N}'' < +\infty$; alors $\dim \mathcal{E}/\mathcal{N} < +\infty$ et

$$(2) \qquad T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta(\mathcal{E}') + T_\Theta(\mathcal{E}'').$$

Preuve. — Vu (5.3), on a

$$(5.9) \qquad \dim(\mathcal{N} + \mathcal{E}')/\mathcal{N} < +\infty$$

et, vu la définition (1),

$$(5.10) \qquad T_\Theta(\mathcal{E}') = T_\Theta[(\mathcal{N} + \mathcal{E}')/\mathcal{N}].$$

Vu (5.6) et (5.7) on a

$$\mathcal{E}''/\mathcal{N}'' \simeq \mathcal{E}/(\mathcal{N} + \mathcal{E}') ;$$

d'où

$$(5.11) \qquad \dim \mathcal{E}/(\mathcal{N} + \mathcal{E}') < +\infty$$

et, vu la définition (1),

$$(5.12) \qquad T_\Theta(\mathcal{E}'') = T_\Theta[\mathcal{E}/(\mathcal{N} + \mathcal{E}')].$$

De (5.9) et (5.11) résulte

$$\dim \mathcal{E}/\mathcal{N} < +\infty ;$$

donc, vu la définition (1), $T_\Theta(\mathcal{E})$ est défini et vaut

$$T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta[\mathcal{E}/\mathcal{N}] ;$$

d'où (2), vu (5.10), (5.12) et la validité de la proposition $a$ quand $\dim \mathcal{E} < +\infty$.

Les lemmes 5.1 et 5.3 prouvent la proposition $a$.

6. **Preuve de la proposition** $b$. — Par hypothèse, à tout $e \in \mathcal{E}$ correspond un entier $p > 0$ tel que

$$\overset{p}{\Theta} e = 0.$$

Cela signifie que

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}.$$

Donc, vu (5.2),

$$\mathcal{N}' = \mathcal{E}'.$$

Donc, vu la définition (1), $T_\Theta(\mathcal{E})$ et $T_\Theta(\mathcal{E}')$ sont définis et nuls

$$T_\Theta(\mathcal{E}) = T_\Theta(\mathcal{E}') = 0.$$

Donc, vu la proposition $a$, $T_\Theta(\mathcal{E}'')$ est défini et nul

$$T_\Theta(\mathcal{E}'') = 0.$$

7. **Preuve de la proposition** $c$. — Notations. — Notons

$$\mathcal{M} = \mathcal{N}_{\nu\mu}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}, \qquad \mathcal{N} = \mathcal{N}_{\nu\mu}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}.$$

Commençons par ne pas supposer $T_{\nu\mu}(\mathcal{E})$ défini :

Lemme 7.1. — On a $\mathcal{M} = \overset{-1}{\mu}\mathcal{N}$.

Preuve. — Soit $e \in \mathcal{M}$ : il existe un entier $p \geqq 0$ tel que

$$(\nu\mu)^p e = 0,$$

d'où

$$\mu(\nu\mu)^p e = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\mu\nu)^p \mu e = 0, \qquad \mu e \in \mathcal{N}, \qquad e \in \overset{-1}{\mu}\mathcal{N},$$

donc

$$\mathcal{M} \subset \overset{-1}{\mu}\mathcal{N}. \tag{7.1}$$

Soit maintenant $e \in \overset{-1}{\mu}\mathcal{N}$ ; on a

$$\mu e \in \mathcal{N},$$

il existe donc un entier $p \geqq 0$ tel que

$$(\nu\mu)^p \mu e = 0,$$

d'où

$$\nu(\mu\nu)^p \mu e = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\nu\mu)^{p+1} e = 0, \qquad e \in \mathcal{M};$$

donc

$$\overset{-1}{\mu}\,\mathcal{N} \subset \mathcal{M}. \tag{7.2}$$

(7.1) et (7.2) prouvent le lemme.

Ce lemme 7.1 entraîne évidemment la relation

$$\mu\,\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \tag{7.3}$$

et le lemme suivant :

LEMME 7.2. — $\mu$ induit un *isomorphisme* de $\mathcal{E}/\mathcal{M}$ *dans* $\mathcal{F}/\mathcal{N}$ (c'est-à-dire sur un sous-espace de $\mathcal{F}/\mathcal{N}$).

De ce lemme résulte que

$$\dim \mathcal{E}/\mathcal{M} \leqq \dim \mathcal{F}/\mathcal{N},$$

d'où, en permutant les rôles de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ :

LEMME 7.3. — $\dim \mathcal{E}/\mathcal{M} = \dim \mathcal{F}/\mathcal{N}$.

PREUVE DE LA PROPOSITION $c$. — Supposons $T_{\nu\mu}(\mathcal{E})$ défini, c'est-à-dire $\dim \mathcal{E}/\mathcal{M} < +\infty$; donc, vu le lemme précédent, $\dim \mathcal{F}/\mathcal{N} < +\infty$ : $T_{\nu\mu}(\mathcal{F})$ est défini. D'après la définition (1),

$$T_{\nu\mu}(\mathcal{E}) = T_{\nu\mu}(\mathcal{E}/\mathcal{M}), \qquad T_{\mu\nu}(\mathcal{F}) = T_{\mu\nu}(\mathcal{F}/\mathcal{N}),$$

Or la proposition $c$ est classique pour les homomorphismes

$$\mu : \quad \mathcal{E}/\mathcal{M} \to \mathcal{F}/\mathcal{N}; \qquad \nu : \quad \mathcal{F}/\mathcal{N} \to \mathcal{E}/\mathcal{M}.$$

d'espaces vectoriels de dimensions finies; elle donne

$$T_{\nu\mu}(\mathcal{E}/\mathcal{M}) = T_{\nu\mu}(\mathcal{E}/\mathcal{N}).$$

D'où (4).

## § 2. Le nombre de Lefschetz.

Exposons maintenant les simplifications qu'apporte à [2] la définition de la trace qui précède.

**8. Comparaison des nombres de Lefschetz de $E$ et $F$.** — Reprenons le n° 55 de [2], p. 177. On y considère : un espace topologique normal $E$; une partie fermée $F$ de $E$; son complémentaire $O = E - F$; les groupes de cohomologie à supports fermés et coefficients rationnels, de dimension $p$ : $\mathcal{E}^p$, $\mathcal{F}^p$, $\mathcal{O}^p$ de $E$, $F$, $O$; enfin la suite exacte, aujourd'hui classique

$$\to \mathcal{E}^p \to \mathcal{F}^p \to \mathcal{O}^{p+1} \to \mathcal{E}^{p+1} \to$$

c'est-à-dire les trois isomorphismes ([2], n° 45, p. 171)

$$\mathcal{E}^p/\mathcal{E}^p_0 \simeq \mathcal{F}^p_{\mathrm{E}}, \qquad \mathcal{F}^p/\mathcal{F}^p_{\mathrm{E}} \simeq \mathcal{G}^{p+1}, \qquad \mathcal{O}^p/\mathcal{G}^p \simeq \mathcal{E}^p_0. \tag{8.1}$$

On considère une application continue $\xi$ de $E$ en lui-même, telle que $\xi(F) \subset F$ et les endomorphismes réciproques $\overset{-1}{\xi}$ de

$$\mathcal{E}^p, \quad \mathcal{F}^p, \quad \mathcal{O}^p, \quad \mathcal{E}^p_0, \quad \mathcal{F}^p_{\mathrm{E}}, \quad \mathcal{G}^p;$$

on note leurs itérés $\overset{-n}{\xi}$ et leurs traces, si elles existent :

$$T(\mathcal{E}^p), \quad T(\mathcal{F}^p), \quad T(\mathcal{O}^p), \quad T(\mathcal{E}^p_0), \quad T(\mathcal{F}^p_{\mathrm{E}}), \quad T(\mathcal{G}^p).$$

Si $T(\mathcal{E}^p)$ et $T(\mathcal{F}^p)$ existent quel que soit $p$, alors, vu (8.1) et la proposition $a$, toutes ces traces existent et vérifient les relations

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{E}^p_0) + T(\mathcal{F}^p_{\mathrm{E}}), \qquad T(\mathcal{F}^p) = T(\mathcal{F}^p_{\mathrm{E}}) + T(\mathcal{G}^{p+1})$$
$$T(\mathcal{O}^p) = T(\mathcal{G}^p) + T(\mathcal{E}^p_0).$$

*Supposons E compact*, notons

$$f = \bigcap_n \overset{n}{\xi}(E) = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}(F)$$

et supposons $f \subset F$. Alors on voit, comme dans [2], n° 55, p. 178, qu'à tout cocycle à support compact ([4]) $Z^p$ de $O$ correspond un entier $n \geqq 0$ tel que $\overset{-n}{\xi}(Z^p) \sim 0$. Donc, vu (8.1) et la proposition $b$,

$$T(\mathcal{O}^p) = T(\mathcal{G}^p) = T(\mathcal{E}^p_0) = 0 \quad \text{quel que soit } p \geqq 0.$$

D'où vu (8.1) et la proposition $a$,

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{F}^p_{\mathrm{E}}) = T(\mathcal{F}^p)$$

sous *la seule* hypothèse que $T(\mathcal{E}^p)$ *ou* $T(\mathcal{F}^p)$ existe : l'hypothèse du théorème 20 de [2] que les anneaux d'homologie de *E et F* aient *tous deux* des bases finies devient donc superflue; ce théorème 20 de [2] devient le

Théorème A. — *Soit un espace compact E; soit $\xi(x)$ une application de E en lui-même; soit*

$$f = \bigcap_{n \geqq 0} \overset{n}{\xi}(E) = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}(E);$$

*f est compact et* ([5]) $\xi(f) = f$. *Soit F une partie compacte de E telle que*

$$f \subset \xi(F) \subset F \qquad \text{(par exemple : } F = f\text{)}.$$

*Soient* $T(\mathcal{E}^p)$ *et* $T(\mathcal{F}^p)$ *les traces des endomorphismes de* $\mathcal{E}^p$ *et de* $\mathcal{F}^p$

([4]) [2] dit « cycle ».

([5]) [2] affirme à tort que $\overset{-1}{\xi}(f) = f$.

*réciproques de $\xi$; si* L'UNE *de ces traces est définie, l'autre est définie et lui est égale :*

$$T(\mathcal{E}^p) = T(\mathcal{F}^p).$$

*Soient $\Lambda_\xi(E)$ et $\Lambda_\xi(F)$ les nombres de Lefschetz de $\xi$ et de sa restriction à $F$; si* L'UN *de ces nombres de Lefschetz est défini, l'autre est défini et lui est égal:*

$$\Lambda_\xi(E) = \Lambda_\xi(F).$$

**9. Points fixes d'une application en lui-même d'un espace convexoïde.** — Le théorème 20 sert à prouver le théorème 25 de [2] (nº 78, p. 216). Remplaçons le théorème 20 par le théorème A : l'hypothèse suivante du théorème 25 devient superflue :

(14) L'anneau d'homologie de $F$ a une base finie.

Ce théorème 25 devient le cas particulier suivant du théorème D :

THÉORÈME B. — *Soit $O$ une partie ouverte d'un espace convexoïde $E$. Soit $\xi$ une application de $\overline{O}$ dans $E$. Soit $i(O)$ l'indice total des points fixes de $\xi$ intérieurs à $O$. Soit*

$$f = \bigcap_{n>0} \overset{n}{\xi}(\overline{O}) = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}(\overline{O});$$

*$f$ est compact et $\xi(f) = f$. Supposons $f \subset O$; alors $i(O)$ et $\Lambda_\xi(f)$ sont définis et égaux :*

$$i(O) = \Lambda_\xi(f);$$

*et, plus généralement, si $E$ est un compact tel que*

$$f \subset \xi(F) \subset F \subset \overline{O},$$

*alors $\Lambda_\xi(F)$ est défini et*

$$i(O) = \Lambda_\xi(F).$$

**10. Points fixes d'une application.** — $\xi(x) = \varphi(\tau(x))$. — Le théorème 25 sert à prouver le théorème 25 *bis* de [2] (nº 82, p. 225). Remplaçons le théorème 25 par le théorème B; l'hypothèse suivante du théorème 25 *bis* devient superflue :

$F$ a une base d'homologie finie.

Ce théorème peut alors s'énoncer comme suit :

THÉORÈME C. — *Soient un espace topologique $E$, une partie ouverte $O$ de $E$, un espace convexoïde $T$, une application continue $\varphi$ de $T$ dans $E$ et une application continue $\tau$ de $\overline{O}$ dans $T$. Soit $i(O)$ l'indice total des points* *fixes de $\xi(x)=\varphi(\tau(x))$ intérieurs à $O$. Après avoir remplacé $\tau$ par sa restriction à $\overline{O}\cap\varphi(T)$, définissons*

$$f=\lim \tau\varphi\tau\ \ldots\ \varphi\tau(\overline{O});$$

*$f$ est compact et $\tau(\varphi(f))=f$. Supposons $f\subset\overset{-1}{\varphi}(O)$, alors $i(O)$ et $\Lambda_{\tau\varphi}(f)$ sont définis et*

$$i(O)=\Lambda_{\tau\varphi}(f);$$

*et, plus généralement, si $F$ est une partie compacte de $T$ telle que*

$$f\subset\tau(\varphi(F))\subset F\subset\overset{-1}{\varphi}(\overline{O}),$$

*alors $\Lambda_{\tau\varphi}(F)$ est défini et*

$$i(O)=\Lambda_{\tau\varphi}(f).$$

Ce théorème C affirme que, dans certains cas, l'indice total des points fixes de $\xi=\varphi\tau$ est un nombre de Lefschetz de $\tau\varphi$. La proposition $c$ permet d'en déduire aisément le théorème D, qui affirme que cet indice est alors un nombre de Lefschetz de $\xi$ elle-même.

Preuve du théorème D. — Conservons les hypothèses du théorème C; définissons

$$k=\varphi(f);$$

évidemment

$$f=\tau(k).$$

Appliquons la proposition $c$ aux homomorphismes $\overset{-1}{\varphi}$ et $\overset{-1}{\tau}$, des groupes de cohomologie de $f$ et $k$, réciproques des applications $\varphi$ et $\tau$; nous voyons que, puisque $\Lambda_{\tau\varphi}(f)$ est défini, $\Lambda_{\varphi\tau}(k)$, c'est-à-dire $\Lambda_{\xi}(k)$, est défini et lui est égal

$$\Lambda_{\xi}(k)=\Lambda_{\tau\varphi}(f).$$

D'où, d'après le théorème C,

$$i(O)=\Lambda_{\xi}(k).$$

Plus généralement, vu le théorème A, $\Lambda_{\xi}(K)$ est donc défini et

$$i(O)=\Lambda_{\xi}(K)$$

quand $K$ vérifie les hypothèses qu'énonce le théorème D.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] Deleanu (Aristide). — *Théorie des points fixes sur les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 87, 1959, p. 235-243).

[2] LERAY (Jean). — *Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 24, 1945, p. 169-199); *Sur les équations et les transformations* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 24, 1945, p. 201-248).

[3] LERAY (J.) et SCHAUDER (J.). — *Topologie et équations fonctionnelles* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 51, 1934, p. 45-78).

(Manuscrit reçu le 16 août 1959.)

Jean LERAY, 12 rue Pierre Curie, Sceaux (Seine).