BULLETIN DE LA S. M. F.

ARISTIDE DELEANU

Théorie des points fixes : sur les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 235-243

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__235_0>

Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 235 à 243.

THÉORIE DES POINTS FIXES : SUR LES RÉTRACTES DE VOISINAGE DES ESPACES CONVEXOÏDES;

PAR

ARISTIDE DELEANU
(Bucarest).

Ce travail fait suite au Mémoire de Jean LERAY sur les équations et les transformations [7], qui contient une théorie des points fixes pour la classe des espaces convexoïdes.

On a remarqué que la classe des espaces convexoïdes ne contient pas la classe des rétractes absolus de voisinage; néanmoins, la théorie des points fixes construite par Jean LERAY s'applique aux rétractes absolus de voisinage et c'est précisément l'objet de ce travail de l'expliquer en détail. De cette manière, la théorie des points fixes de S. LEFSCHETZ [4], [5] sera généralisée dans deux directions :

1° Elle pourra être appliquée à des espaces qui ne sont pas des rétractes absolus de voisinage;

2° Elle étudiera non seulement les points fixes de l'espace tout entier, mais, plus généralement, les points fixes qui se trouvent dans une partie ouverte de l'espace considéré.

L'auteur exprime sa vive reconnaissance à J. LERAY pour les utiles suggestions reçues pendant la préparation de cet article.

1. Rétractes des espaces convexoïdes.

Dans ce qui suit, nous conservons la terminologie de [6]. Un espace topologique est dit *simple*, quand ses groupes de cohomologie, dans le sens de ČECH-ALEXANDER, à coefficients rationnels, sont ceux d'un espace réduit à un point.

Un espace topologique E est dit *convexoïde* s'il est compact, connexe et s'il possède un recouvrement $\mathfrak{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ tel que :

a. Les parties U_α sont fermées et simples;

b. L'intersection d'un nombre fini d'ensembles U_α, ou bien est vide, ou bien appartient à la famille $\mathfrak{U}$;

c. Pour chaque point $x \in E$ et chaque voisinage V de x, il existe un nombre fini d'ensembles (U_{α_i}) $(i = 1, \ldots, p)$ tels que

$$x \in \operatorname{int}\left(\bigcup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}\right) \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i} \subset V.$$

LEMME 1. — *La réunion d'un nombre fini d'ensembles U_α est convexoïde, si elle est connexe.*

En effet, considérons l'ensemble $X = \bigcup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}$. L'ensemble X est compact, et l'on peut prendre comme famille $\mathfrak{U}$ la famille de toutes les parties non vides de la forme $U_{\alpha_i} \cap U_\beta$ $(i = 1, \ldots, p;\ \beta \in A)$. On vérifie aisément les propriétés intervenant dans la définition ci-dessus.

Soit, maintenant, C un espace compact, qui est rétracte d'espace convexoïde. Il existe donc un espace convexoïde E et une rétraction r de E sur C.

Soit ξ une application continue de C en lui-même et O une partie ouverte de C; on supposera que la frontière $\dot{O} = \bar{O} - O$ de O ne contient aucun point fixe de ξ. Dans ces conditions, on va définir un « *indice total des solutions intérieures à O de l'équation $x = \xi(x)$* », noté $i\{x = \xi(x) \in O\}$ ou, plus brièvement, $i_\xi(O)$. Pour cela, on considère l'application r de E sur C et l'on applique [7], (chap. 6, § 4, p. 223) à l'équation $x = r[\xi(x)]$, en posant, par définition,

$$i_\xi(O) = i\{x = \xi(x) \in O\} = i\{t = \xi\, r(t) \in \overset{-1}{r}(O)\},$$

où le dernier indice est celui défini dans l'espace convexoïde E (p. 212 de [7]).

LEMME 2. — *$i\{x = \xi(x) \in O\}$ est indépendant du choix de E.*

PREUVE. — Soit E' un deuxième espace convexoïde et r' une rétraction de E' sur C. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "r"] & & E' \arrow[dl, "r'"] \\ & C \arrow[ul, "\xi"] & \end{tikzcd}$$

et appliquons la formule terminant la remarque de [7], p. 224, à l'équation $x = r'[r(\xi(x))]$

$$i\{t' = r\xi\, r'(t') \in \overset{-1}{r'}(O)\} = i\{t = \xi r'\, r(t) \in \overset{-1}{r}\ \overset{-1}{r'}(O)\},$$

c'est-à-dire, puisque $r\xi = \xi$ et $r'r = r$,

$$i\{t' = \xi r'(t') \in \overset{-1}{r'}(O)\} = i\{t = \xi r(t) \in \overset{-1}{r}(O)\}.$$

C. Q. F. D.

LEMME 3. — *Soient C un rétracte d'espace convexoïde et K un rétracte de C; soit O un ouvert de C contenu dans K et ξ une application continue de C en lui-même, telle que $\xi(K) \subset K$. Si l'on pose $\xi \mid K = \eta$, on a*

$$i_\xi(O) = i_\eta(O),$$

c'est-à-dire qu'il est équivalent de calculer l'indice des solutions intérieures à O en considérant O comme partie de C ou comme partie de K.

PREUVE. — Soit r une rétraction d'un espace convexoïde E sur C et ρ une rétraction de C sur K. ρr est alors une rétraction de E sur K. Conformément à la définition, il s'agit de prouver que

$$(1) \qquad i\{t = \xi r(t) \in \overset{-1}{r}(O)\} = i\{t = \xi\rho r(t) \in \overset{-1}{r}\overset{-1}{\rho}(O)\},$$

les indices étant calculés dans E.

Démontrons l'égalité

$$r\left(\overline{\overset{-1}{r}(O)}\right) = \overline{r\overset{-1}{r}(O)}.$$

Soit $x \in \overline{r\overset{-1}{r}(O)}$; pour chaque voisinage V de x il existe alors un $y \in E$, tel que $r(y) \in O$ et $r(y) \in V$, donc $x \in \bar{O} \subset C$, donc $r(x) = x$; d'autre part, on a $\bar{O} \subset \overline{\overset{-1}{r}(O)}$, donc $x \in \overline{\overset{-1}{r}(O)}$ et, par suite, $x = r(x) \in r\left(\overline{\overset{-1}{r}(O)}\right)$. Il en résulte que $\overline{r\overset{-1}{r}(O)} \subset r\left(\overline{\overset{-1}{r}(O)}\right)$; l'inclusion réciproque résulte de la continuité de r.

Les applications ξr et $\xi\rho r$ coïncident sur l'ensemble $\overline{\overset{-1}{r}(O)}$, car $x \in \overline{\overset{-1}{r}(O)}$ entraîne

$$r(x) \in r\left(\overline{\overset{-1}{r}(O)}\right) = \overline{r\overset{-1}{r}(O)} = \bar{O} \subset K,$$

donc $\rho r(x) = r(x)$. En appliquant la remarque 2 de [7], p. 212, on en déduit

$$(2) \qquad i_{\xi r}\left(\overset{-1}{r}(O)\right) = i_{\xi\rho r}\left(\overset{-1}{r}(O)\right).$$

D'autre part, l'ensemble $\overline{\overset{-1}{r}\overset{-1}{\rho}(O)} - \overset{-1}{r}(O)$ ne contient aucun point fixe de l'application $\xi\rho r$. En effet, supposons que

$$x \in \overline{\overset{-1}{r}\overset{-1}{\rho}(O)} - \overset{-1}{r}(O) \qquad \text{et} \qquad \xi\rho r(x) = x;$$

il s'ensuit, d'une part, que $\rho\, r(x) \in \overline{O}$ et $r(x) \notin O$, et d'autre part, que $x \in K$, donc

$$\rho\, r(x) = r(x) = x, \qquad \text{donc} \quad \xi(x) = x.$$

Comme $\dot{O}$ ne contient aucun point fixe de ξ, on arrive à la contradiction

$$r(x) \in O \qquad \text{et} \qquad r(x) \notin O.$$

Vu la dernière affirmation du théorème 22 de [7], p. 212, on en déduit

$$(3) \qquad i_{\xi\rho r}\big(\overset{-1}{r}(O)\big) = i_{\xi\rho r}\big(\overset{-1}{r}\,\overset{-1}{\rho}(O)\big).$$

Les relations (2) et (3) entraînent (1).

C. Q. F. D.

Le théorème D de [8] a pour conséquence immédiate que la proposition suivante s'applique à tout *rétracte C d'espace convexoïde* :

Théorème 1. — *Soit ξ une application continue de C en lui-même et O une partie ouverte de C. Considérons la restriction $\xi_1 = \xi \mid \overline{O}$; $\big(\overset{n}{\xi}_1(\overline{O})\big)_{n>0}$ est une suite décroissante de compacts,*

$$k = \bigcap_{n>0} \overset{n}{\xi}_1(\overline{O}) = \lim_{n \to +\infty} \overset{n}{\xi}_1(\overline{O})$$

est compact et $\xi_1(k) = k$.

Supposons $k \subset O$; alors $i_\xi(O)$ et le nombre de Lefschetz $\Lambda_\xi(k)$ sont définis et

$$i_\xi(O) = \Lambda_\xi(k),$$

et, plus généralement, si K est un compact tel que

$$k \subset \xi(K) \subset K \subset O,$$

$\Lambda_\xi(K)$ est défini et

$$i_\xi(O) = \Lambda_\xi(K).$$

Note. — Dans cet énoncé, il s'agit de la définition plus générale du nombre de Lefschetz qu'introduit [8].

Lemme 4. — *Si $C - O$ ne contient aucun point fixe de ξ, alors $i_\xi(O)$ est le nombre de Lefschetz $\Lambda_\xi(C)$ de l'application ξ de C en lui-même.*

Preuve. — Puisque $C - O$ ne contient aucun point fixe de $\xi = r\xi$, le théorème 22 *bis* de [7], p. 224, donne

$$i_\xi(O) = i_\xi(C).$$

Or, en prenant $O=K=C$ dans le théorème 1 ci-dessus, on voit que $\Lambda_\xi(C)$ est défini et que

$$i_\xi(C)=\Lambda_\xi(C).$$

REMARQUE. — Le nombre de Lefschetz $\Lambda_\xi(C)$ peut être défini classiquement, puisque tout rétracte d'un espace normal ayant son groupe de cohomologie de type fini possède la même propriété, vu le théorème 18 de [6], p. 176.

2. Rétractes de voisinage des espaces convexoïdes.

Cette classe d'espaces contient les rétractes absolus de voisinage (ANR), puisque le cube fondamental de Hilbert est convexoïde, comme toute partie convexe et compacte d'un espace vectoriel topologique localement convexe ([7], p. 248).

LEMME 5. — *Si C est un rétracte de voisinage d'espace convexoïde, alors toute composante connexe de C est ouverte dans C.*

PREUVE. — Par hypothèse, il existe un espace convexoïde E, une partie ouverte G de E et une rétraction r de G sur C. Soit K une composante connexe quelconque de C et $x\in K$; il existe une famille finie (U_{α_i}) $(i=1, \ldots, p)$ telle que

$$x\in D\subset \bigcup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}\subset G,$$

où D est un ouvert de E. En outre, on peut s'arranger pour que chaque U_{α_i} contienne le point x; il en résulte immédiatement que $\bigcup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}$ est un ensemble connexe, compte tenu du fait que chaque U_{α_i} est simple, donc connexe. $r\left(\bigcup U_{\alpha_i}\right)$ est aussi connexe, comme image d'un ensemble connexe par une application continue. Il s'ensuit que

$$x\in D\cap C\subset\left(\bigcup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}\right)\cap C\subset r\left(\bigcup_{i=1}^{p} U_{\alpha_i}\right)\subset K.$$

Or, $D\cap C$ est un ouvert de C, donc, le point $x\in K$ étant arbitraire, la composante K est ouverte dans C.

C. Q. F. D.

THÉORÈME 2. — *Si un rétracte de voisinage d'espace convexoïde est compact, alors il a un nombre fini de composantes connexes.*

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme 5.

THÉORÈME 3. — *Tout rétracte de voisinage d'espace convexoïde qui est compact et connexe est un rétracte d'espace convexoïde.*

PREUVE. — Soit C un rétracte de voisinage d'espace convexoïde, qui est compact et connexe; il existe alors un espace convexoïde E, un ouvert G de E et une rétraction r de G sur C.

Soit $x \in C$; il existe des parties $U_1^x, \ldots, U_{n(x)}^x$ de E appartenant à la famille $\mathfrak{U}$, telles que, si l'on pose $W_x = \operatorname{int}\left(\bigcup_{i=1}^{n(x)} U_i^x\right)$, on a

$$x \in W_x \subset \bigcup_{i=1}^{n(x)} U_i^x \subset G.$$

En outre, on peut s'arranger pour que chaque $U_i^x [i = 1, \ldots, n(x)]$ contienne le point x. On extrait du recouvrement ouvert $(W_x)_{x \in C}$ du compact C un recouvrement fini (W_{x_j}) $(j = 1, \ldots, q)$; il résulte que

$$C \subset \bigcup_{j=1}^{q} W_{x_j} \subset \bigcup_{j=1}^{q} \bigcup_{i=1}^{n(x_j)} U_i^{x_j} \subset G.$$

Or, les parties $U_i^{x_j}$ sont simples, donc connexes; puisque chacun des termes de la réunion $F = \bigcup_{i,j} U_i^{x_j}$ a des points communs avec l'ensemble connexe C, il s'ensuit que F est connexe et donc, en vertu de lemme 1 un espace convexoïde. En outre, $r \mid F$ est une rétraction de F sur C. C. Q. F. D.

Soit, maintenant, C un rétracte de voisinage d'espace convexoïde qui est compact; vu le théorème 2, C a un nombre fini de composantes connexes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Soient ξ une application continue de C en lui-même et O une partie ouverte de C, telle que $\dot{O}$ ne contient aucun point fixe de ξ. On va définir l'indice total $i\{x = \xi(x) \in O\}$. Chaque C_j $(j = 1, \ldots, n)$ est un rétracte de voisinage d'espace convexoïde compact et connexe, donc, compte tenu du théorème 3, un rétracte d'espace convexoïde. Pour chaque $j\, (1 \leqq j \leqq n)$, soit $\tau(j)$ l'indice bien déterminé par la propriété $\xi(C_j) \subset C_{\tau(j)}$, et soit $\xi_j = \xi \mid C_j$. Nous posons alors, par définition,

$$i_\xi(O) = i\{x = \xi(x) \in O\} = \sum_{\ell = \tau(\ell)} i\{x = \xi_\ell(x) \in O \cap C_\ell\},$$

l'indice figurant au second membre étant celui défini au paragraphe 1 pour les rétractes des espaces convexoïdes. S'il n'existe aucun indice ℓ tel que $\ell = \tau(\ell)$, alors nous posons, par définition, $i_\xi(O) = 0$.

Du théorème 22 *bis* de [7], p. 224, du lemme 4 ci-dessus, et du fait que $\Lambda_\xi(C) = \sum_{\ell=\tau(\ell)} \Lambda_{\xi_\ell}(C_\ell)$ on déduit le

THÉORÈME 4. — *Dans un rétracte de voisinage d'espace convexoïde compact C, l'indice total $i_\xi(O)$ est un entier positif, négatif ou nul, qui est défini chaque fois que $\dot{O}$ ne contient aucun point fixe de ξ.*

Il vérifie le théorème 1.

Si ξ et η sont deux applications de C en lui-même telles que $\xi \mid \overline{O} = \eta \mid \overline{O}$, alors $i_\xi(O) = i_\eta(O)$. Si ξ et η sont deux applications homotopes de C en lui-même, alors $i_\xi(O) = i_\eta(O)$, si tous les deux sont définis. Si (O_j) $(j = 1, \ldots, m)$ sont des ouverts de C deux à deux disjoints et tel que $O_j \subset O$ $(j = 1, \ldots, m)$ et que $\overline{O} - \bigcup_{j=1}^{m} O_j$ ne contient aucun point fixe de ξ, alors $i_\xi(O) = \sum_{j=1}^{m} i_\xi(O_j)$; en particulier, si $i_\xi(O) \neq 0$, alors O contient au moins un point fixe de ξ. Si $C - O$ ne contient aucun point fixe de ξ, alors $i_\xi(O) = \Lambda_\xi(C)$.

Cas particulier : Si C est un rétracte absolu de voisinage et si $O = C$, on obtient le théorème de point fixe de LEFSCHETZ [4], [5].

REMARQUES. — *a*. Il y a même des espaces convexoïdes simples qui ne sont pas rétractes absolus de voisinage; en effet, on sait [9] que la boule unitaire dans un espace de Hilbert convenable, muni de la topologie faible, n'est pas rétracte absolu de voisinage; d'autre part, elle est convexoïde et simple, puisqu'elle est compacte et homotope en elle-même à un point.

b. Si C est un espace compact qui est rétracte d'une partie ouverte G d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et *complet*, alors C est rétracte de voisinage d'espace convexoïde. En effet, soit $\hat{C}$ l'enveloppe fermée convexe de C; on sait ([1], chap. 2, § 4, n° 1, p. 81), que dans un espace localement convexe complet l'enveloppe fermée d'un ensemble compact est un ensemble compact. $\hat{C}$ est donc un espace convexoïde, $G \cap \hat{C}$ est un ouvert de $\hat{C}$ et, r étant une rétraction de G sur C, $r \mid G \cap \hat{C}$ est une rétraction de $G \cap \hat{C}$ sur C.

3. Applications.

THÉORÈME 5. — *Si C est rétracte d'espace convexoïde et si C est simple, alors $i\{x = \xi(x) \in C\} = 1$, quelle que soit l'application ξ de C en lui-même.*

Le théorème est une conséquence immédiate du lemme 4, puisque, C étant simple, $\Lambda_\xi(C)=1$. C est simple, par exemple s'il est rétracte d'un espace convexoïde simple, ce qui résulte du théorème 18 de [6], p. 176.

Corollaire. — *Toute application en lui-même d'un rétracte d'espace convexoïde qui est simple possède au moins un point fixe.*

Théorème 6. — *Soient C un rétracte d'espace convexoïde et ξ une application de C en lui-même; s'il existe un entier $p>0$ tel que $\overset{p}{\xi}$ soit homotope dans C à une application constante, alors*

$$\Lambda_\xi(C)=1.$$

Preuve. — Soit $\overset{-1}{\xi_r}$ la restriction de $\overset{-1}{\xi}$ à $\mathcal{E}^r$ (notations de l'introduction de [8]) et $T(\mathcal{E}^r)$ la trace de cette restriction. Compte tenu du corollaire 5_1 de [6], p. 125, on voit que $\overset{-1}{\xi_r}$ est nilpotent pour $r>0$; en vertu de la proposition b de [8], il résulte que

$$T(\mathcal{E}^r)=0 \qquad (r>0).$$

D'autre part, $T(\mathcal{E}^0)=1$ à cause de la connexion de C, donc

$$\Lambda_\xi(C)=\sum_{r\geq 0}(-1)^r\,T(\mathcal{E}^r)=1.$$

Corollaire. — *Toute application ξ en lui-même d'un rétracte d'espace convexoïde telle qu'une de ses itérées $\overset{p}{\xi}$ est homotope à une application constante possède au moins un point fixe.*

Théorème 6. — *Si C est rétracte d'espace convexoïde, si C est simple, si (D_i) $(i=1,\ldots,n)$ sont des ouverts de C deux à deux disjoints et si chaque $\overline{D}_i$ est rétracte de C, alors*

$$i_\xi\left(C-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{D}_i\right)=1-n,$$

quelle que soit l'application ξ de C en lui-même possédant les propriétés suivantes : 1° $\xi(\overline{D}_i)\subset\overline{D}_i$ $(i=1,\ldots,n)$; 2° $\bigcup_{i=1}^{n}\dot{D}_i$ *ne contient aucun point fixe de ξ.*

Preuve. — Compte tenu du théorème 4, on a

$$i_\xi\left(C-\bigcup_{i=1}^{n}\overline{D}_i\right)=i_\xi(C)-\sum_{i=1}^{n}i_\xi(D_i);$$

d'autre part, on remarque que tout rétracte d'un espace compact simple est simple; cela résulte encore du théorème 18 de [6], p. 176. Compte tenu des lemmes 3 et 4 ci-dessus, il s'ensuit que $i_\xi(D_i) = \Lambda_\xi(\overline{D}_i) = 1$, pour chaque i, et que $i_\xi(C) = 1$.

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — *Si $n \neq 1$, toute application satisfaisant à la condition 1° possède au moins un point fixe dans l'ensemble* $C - \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Une forme plus particulière de ce dernier résultat a été démontrée directement dans [3]; elle englobe le théorème de point fixe démontré dans [2].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (Nicolas). — *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 1 et 2, Paris, Hermann, 1953 (*Act. scient. et ind.*, n° 1189).
[2] BOURGIN (D. G.). — *Fixed points on neighborhood retracts* (*Rev. Math. pures et appl.*, Acad. Rép. pop. Roumaine, t. 2, 1957, p. 371-374).
[3] DELEANU (Aristide). — *Un théorème de point fixe pour les rétractes des espaces convexoïdes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 1950-1952).
[4] LEFSCHETZ (S.). — *On locally connected and related sets* (*Ann. Math.*, t. 35, 1934, p. 118-129).
[5] LEFSCHETZ (S.). — *On the fixed point formula* (*Ann. Math.*, t. 38, 1937, p. 819-822).
[6] LERAY (Jean). — *Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 24, 1945, p. 169-199).
[7] LERAY (Jean). — *Sur les équations et les transformations* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. 24, 1945, p. 201-248).
[8] LERAY (Jean). — *Théorie des points fixes : indice total et nombre de Lefschetz* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 87, 1959, p. 221-233).
[9] MICHAEL (Ernest). — *Some extension theorems for continuous functions* (*Pacific J. Math.*, t. 3, 1953, p. 789-805).

(Manuscrit reçu le 15 février 1959,
complété par l'addition du théorème 1,
le 5 septembre 1959.)

Aristide DELEANU,
Institutul de Matematică,
Str. Mihail Eminescu, 47,
Bucuresti 3 (Roumanie).