MARCEL BERGER

Variétés riemanniennes à courbure positive

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 285-292
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__285_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 285 à 292.

VARIÉTÉS RIEMANNIENNES A COURBURE POSITIVE;

PAR

MARCEL BERGER
(Strasbourg).

On se propose d'exposer quelques résultats sur les variétés riemanniennes à courbure strictement positive. Le problème fondamental : quelles sont les variétés différentiables compactes qui peuvent être munies d'une structure riemannienne à courbure strictement positive, n'étant pas résolu, on se contentera de résultats concernant seulement les variétés pour lesquelles la courbure est comprise entre deux bornes suffisamment rapprochées.

1. Courbure d'une variété riemannienne dans un plan tangent. — Dans toute la suite V désignera une variété différentiable munie d'une structure riemannienne; c'est-à-dire que, si $T(V)$ (resp. T_p) désigne l'espace des vecteurs tangents à V (resp. à V en p), on s'est donné, sur chaque T_p une forme quadratique strictement positive. Quel que soit $p \in V$, si X, $Y \in T_p$, on notera toujours par $\langle X, Y \rangle$ et $\|X\|$ le produit scalaire et la norme correspondants. Dans toute la suite, on supposera, sans préciser les hypothèses exactes, la variété, sa structure riemannienne et les arcs de courbes introduits, suffisamment différentiables.

V peut être munie canoniquement d'une structure d'espace métrique : on notera $d(p, q)$ la distance correspondante de deux points p, $q \in V$. On associe à V son tenseur de courbure qui est, pour chaque $p \in V$, une forme bilinéaire antisymétrique sur T_p à valeurs dans l'espace des endomorphismes de T_p; on notera $R(X, Y)$ un tel endomorphisme, la valeur de cette forme bilinéaire pour X, $Y \in T_p$, et $R(X, Y).Z$ l'image par ce dernier de $Z \in T_p$. On appelle *courbure de* V (sectional curvature, Riemannsche Krümmung) *dans le plan tangent* μ *à* V *en* P, le scalaire

$$\rho(\mu) = \rho(X, Y) = -\frac{\langle R(X, Y).X, Y \rangle}{\|X \wedge Y\|^2},$$

où X, $Y \in T_p$ sont deux vecteurs linéairement indépendants définissant μ. Pour dim $V = 2$, ρ est la courbure totale de la surface V.

On notera $P(V)$ l'ensemble des plans tangents à V. La variété riemannienne V sera dite à courbure strictement positive (resp. négative ou nulle) si l'on a $\rho(\mu) > 0$, (resp. $\leqq 0$), quel que soit $\mu \in P(V)$. Une interprétation géométrique simple de telles hypothèses est le :

THÉORÈME 1 (PREISSMANN [3], TOPONOGOV [6]). — *Soit V une variété riemannienne à courbure positive ou nulle (resp. négative ou nulle) et pqr un triangle géodésique quelconque de sommets p, q, r. Si PQR désigne un triangle du plan euclidien dont les longueurs des côtés sont égales à celles de pqr, alors les angles de pqr sont plus grands ou égaux (resp. plus petits ou égaux) à ceux correspondants de PQR.*

2. Exemples.

a. Si V est à courbure strictement positive (resp. négative ou nulle), tout revêtement W de V, muni de la structure riemannienne image inverse de celle de V par la projection de W sur V, possède la même propriété, puisque cette projection est localement un isomorphisme de structures riemanniennes.

b. Si V est complète, simplement connexe et à courbure négative ou nulle, V est homéomorphe à l'espace euclidien [*voir* la démonstration de ce résultat classique au n° 3 (*a*)].

c. Si S_n est la sphère euclidienne, de rayon r, de R^{n+1}, munie de la structure riemannienne induite par le plongement, on a $\rho(\mu) = 1/r^2$, quel que soit $\mu \in P(S_n)$.

d. Si $P_n(C)$ est l'espace projectif complexe de dimension complexe n, muni de sa structure riemannienne canonique d'espace symétrique (espace de Fubini-Study), on a $\Delta/4 \leqq \rho(u) \leqq \Delta$, quel que soit $\mu \in P(P_n(C))$. Plus précisément, si J désigne l'automorphisme de carré -1 de $T(P_n(C))$ défini par la structure complexe de $P_n(C)$, on a

$$\rho(X, J.X) = \Delta \qquad \text{et} \qquad \rho(X, Y) = \frac{\Delta}{4}$$

quels que soient X et Y tels que

$$\langle J.X, Y \rangle = 0.$$

e. Pour les espaces projectifs quaternioniens $P_n(Q)$ et le plan projectif des espaces de Cayley, munis de leur structure riemannienne canonique d'espace symétrique, on a encore

$$\frac{\Delta}{4} \leqq \rho(u) \leqq \Delta \qquad \text{quel que soit } \mu.$$

f. Soit G/H un espace homogène, où G et H sont des groupes de Lie compacts; si l'on munit G/H d'une structure riemannienne provenant d'une métrique bi-invariante sur G, on a $\rho(\mu) \geqq 0$, quel que soit μ, et, plus précisément, $\rho(X, Y) = 0$ est équivalent à $[X, Y] = 0$ (le crochet étant celui de l'algèbre de Lie de G, après les identifications convenables).

REMARQUE. — Les exemples (c), (d), (e) ci-dessus sont les seuls connus de variétés compactes, simplement connexes, pouvant être munies d'une structure riemannienne à courbure strictement positive. On ne sait pas, par exemple, si le produit $S_2 \times S_2$ peut ou ne peut pas être muni d'une telle structure [noter que la structure riemannienne sur $V \times W$, produit de structures données sur V et W, vérifie toujours $\rho(X, Y) = 0$, quels que soient X tangent à une fibre V_p, et Y tangent à une fibre W_p]. Par contre, si l'on ajoute à la condition, pour V d'être à courbure strictement positive, celle d'être un espace homogène de groupe compact G, muni d'une structure riemannienne provenant d'une métrique bi-invariante sur G, on peut démontrer que V (supposée simplement connexe) est l'un des espaces symétriques des exemples (c), (d), (e).

3. Courbure, transport parallèle et courbes voisines d'une géodésique. — La structure riemannienne de V permet d'y définir le transport parallèle : Θ étant un segment de courbe de V, d'extrémités p, q, et X un élément de T_p, on peut définir canoniquement un élément $Y \in T_q$, dit déduit de X par transport parallèle de p à q le long de Θ. Les géodésiques de V sont, ces deux définitions étant équivalentes : soit les courbes qui réalisent localement le minimum de la distance de l'espace métrique V pour la longueur de courbe définie par la structure riemannienne, soit les courbes pour lesquelles leur vecteur tangent leur reste tangent par transport parallèle le long d'elles mêmes.

Il est essentiel pour la suite d'étudier la longueur des segments de courbe voisins d'un segment géodésique. Fixons des notations : soit $\Gamma = \{\gamma(s)\}$, $(0 \leqq s \leqq L)$, le segment géodésique considéré, paramétré par son arc, d'extrémités $p = \gamma(0)$, $q = \gamma(L)$. Soit $\Theta(v)$ une famille à un paramètre de segments de courbes voisins, définie par la représentation paramétrique Θ : $[0, L] \times [-\varepsilon, +\varepsilon] \to V$, notée $\Theta(s, v)$. On suppose, de plus, que $\Theta(0) = \Gamma$, et que tous les $\Theta(v)$ ont les mêmes extrémités p, q que Γ. Appelons $L(v)$ la longueur de $\Theta(v)$. Puisque Γ est géodésique, on a $L'(0)$. Pour comparer les $L(v)$ à $L = L(0)$, il faut donc calculer $L''(0)$. Pour cela, posons $X(s) = \Theta'_v(s, 0)$. On a $X(s) \in T_{\gamma(s)}$, et l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que $\langle X(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, quel que soit $s \in [0, L]$.

Choisissons, continûment en s, un $N(s) \in \mathrm{T}_{\gamma(s)}$ tel que $X(s) = f(s) N(s)$ et $\| N(s) \| = 1$. Enfin, pour s fixé, appelons $M(s, t)$ le vecteur déduit de $N(s)$ par transport parallèle de $\gamma(t)$ à $\gamma(s)$ le long de Γ. Puisque $M(s, t) \in T_{\gamma(s)}$ quel que soit t, il est loisible de poser $Z(s) = M'_t(s, s)$. On a $Z(s) = 0$

quel que soit s si et seulement si $N(s)$ est, pour tout s, déduit de $N(o)$ par transport parallèle de p à $\gamma(s)$ le long de Γ; sinon, $Z(s)$ mesure le défaut du champ de vecteurs $N(s)$ par rapport à la situation précédente. Avec ces notations, on démontre la formule (*voir* par exemple [3]) :

$$(1)\quad L''(o)=\int_0^L ((f'(s))^2+(f(s))^2[\|Z(s)\|^2-\rho(N(s),\gamma'(s))])\,ds.$$

Si les segments $\Theta(v)$ ne sont plus d'extrémités fixes p, q, la formule (1) reste cependant valable à condition que $\langle \Theta'_s(o, v), \Theta'_v(o, v)\rangle = o$ et $\langle \Theta'_s(L, v), \Theta'_v(L, v)\rangle = o$ pour tout $v\in[-\varepsilon, +\varepsilon]$. Donnons de suite des applications classiques de la formule (1) :

a. V est à courbure négative ou nulle; alors la formule (1) montre que $L''(o) > o$, autrement dit Γ réalise un minimum absolu pour la longueur des segments voisins. Ceci entraîne que, p étant fixé, l'application exponentielle $T_p \to V$ (définie en portant sur la géodésique issue de p et de direction $X\in T_p$ la longueur $\|X\|$) est localement un homéomorphisme. Si V est complète, cette application est surjective (théorème de Hopf-Rinow), donc est un revêtement de V, ce qui démontre le (*b*) du n° 2.

b. V est compacte, orientable, de dimension paire. Montrons que V à courbure strictement positive entraîne V simplement connexe. On sait, en effet, associer à chaque classe d'homotopie non nulle de V au moins une géodésique fermée Γ réalisant le minimum absolu de la longueur pour les courbes voisines. On va montrer que c'est une contradiction. Le vecteur tangent à Γ étant invariant par transport parallèle le long de Γ, il en est de même du sous-espace orthogonal à ce dernier et, $p\in\Gamma$ étant fixé, le transport parallèle de p à p le long de Γ détermine donc une rotation de l'orthogonal U_p de $\gamma'(p)$ dans T_p. Comme $\dim U_p = \dim V - 1$ est impair, il existe un vecteur fixe par cette rotation, ce qui permet de construire le long de Γ un champ de vecteurs $N(s)$ invariant par transport parallèle le long de Γ, et orthogonal à Γ. Prenons une famille $\Theta(v)$ de courbes fermées voisines de Γ, telles que $\Theta'_s(s, o) = X(s) = N(s)$. Avec les notations ci-dessus, on a $f(s) = 1$ et $Z(s) = o$, pour tout s. La formule (1) donne $L''(o) < o$, donc il existerait des courbes $\Theta(v)$ de longueur plus petite que Γ.

c. Pour des dimensions quelconques, on a seulement le :

THÉORÈME 2. — *Soit V une variété riemannienne complète telle que $\rho(\mu) \geq \delta > o$ quel que soit $\mu\in P(V)$. Alors V est de diamètre $\leq \pi/\sqrt{\delta}$, en particulier V est compacte.*

Supposons que p, q soient deux points de V tels que $L = d(p, q) > \pi/\sqrt{\delta}$. Comme V est complète, il existe (théorème de Hopf-Rinow) un segment géodésique $\Gamma = \{\gamma(s)\}$, $(s\in[o, L])$ qui les joint. Soit N un vecteur quelconque de T_p tel que $\langle N, \gamma(0) \rangle = 0$ et soit $N(s)$, $[s \in [0, L], N(0) = N]$, le champ des vecteurs déduits de N par transport parallèle le long de Γ de p à $\gamma(s)$. Posons $X(s) = \sin[(\pi/L)s].N(s)$. De $Z(s) = 0$, $\rho(N(s), \gamma'(s)) \geq \delta > \pi^2/L^2$, et de la formule (1), on déduit $L''(0) < 0$. Ce qui entraîne l'existence de segments de courbes voisins de Γ, d'extrémités p, q et de longueur plus petite que L, ce qui contredit $d(p, q) = L$.

COROLLAIRE. — *Toute variété compacte à courbure strictement positive est à groupe de Poincaré fini.*

Voir en effet l'exemple (a) du n° 2.

4. Variétés riemanniennes α-pincées. Rappel de résultats.

DÉFINITION. — *Une variété riemannienne V est dite α-pincée si l'on a $\alpha\Delta \leq \rho(u) \leq \Delta (\Delta > 0)$ pour tout $\mu \in P(V)$.*

Seule la constante α est bien significative puisque Δ peut être remplacé par 1, par exemple, en multipliant par le facteur constant $1/\Delta$ la structure riemannienne de V, ce qui a pour effet de multiplier toutes les courbures par ce même facteur. Nous allons rappeler dans ce numéro les résultats de RAUCH et KLINGENBERG sur les variétés α-pincées. L'idée de RAUCH est que, si la courbure de V diffère assez peu de celle d'une variété type W, alors V et W sont homéomorphes. En particulier, pour $W = S_n$ qui est à courbure constante [exemple (c) du n° 2], si V est α-pincée pour α suffisamment voisin de 1, alors V doit être homéomorphe à S_n (où $n = \dim V$). Il est classique, d'abord, que V complète, simplement connexe et 1-pincée, entraîne que V est la sphère S_n munie de sa métrique canonique du n° 2. RAUCH a démontré [4], le

THÉORÈME 3. — *Soit V une variété riemannienne complète, simplement connexe et α-pincée. Alors $\alpha = 0{,}75$ entraîne que V est homéomorphe à $S_{\dim V}$.*

La démonstration de Rauch utilise, étant donné $p \in V$, le lieu des premiers conjugués de p (*conjugate locus*), c'est-à-dire lorsque Γ parcourt l'ensemble des géodesiques issues de p, le lieu du dernier point q sur Γ qui est tel que le segment géodésique pq réalise le minimum absolu de la longueur pour les segments de courbes d'extrémités p, q *voisins* de pq.

KLINGENBERG utilise au contraire le lieu résiduel de p (*cut-locus*, *Schnittort*), c'est-à-dire le lieu du point q, sur une géodésique issue de p, qui est le dernier pour lequel le segment géodésique pq réalise le minimum absolu de la longueur pour *tous* les segments de courbes d'extrémités p, q. On notera $C(p)$ le lieu résiduel de p [appellation qui provient du fait que $V - C(p)$ est homéomorphe à une boule ouverte de dimension dim V].

THÉORÈME 4. — (KLINGENBERG [1]). — *Soit V une variété riemannienne complète simplement connexe, de dimension paire, positivement pincée et telle que $\rho(\mu) \leqq \Delta$ pour tout $\mu \in P(V)$. Alors, quels que soient $p \in V$ et $q \in C(p)$, on a $d(p, q) \geqq \pi/\sqrt{\Delta}$.*

De ce théorème, KLINGENBERG déduit le

THÉORÈME 5. — *Soit V une variété riemannienne complète, simplement connexe, de dimension paire et α-pincée. Alors, si $\alpha = 0{,}55$ V est homéomorphe à $S_{\dim V}$.*

Dans les numéros suivants, nous allons montrer que le théorème 4 et la théorie de Morse permettent de démontrer une forme homotopique du théorême 5 pour tout $\alpha > 1/4$ et dim V paire.

5. Rappel sur la théorie de Morse. — Soit $\Gamma = \{\gamma(s)\}$, $(s \in [0, L])$ un segment géodésique d'extrémités p, q et de longueur L. L'ensemble $\mathcal{L}$ des champs de vecteurs $X(s)$, tels que $s \in [0, L]$, $X(0) = X(L) = 0$ et $\langle X(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ pour tout s (ensemble qui se présente naturellement dans le n° 3), est un espace vectoriel sur les réels et la formule (1) définit une forme quadratique $L''(0)$ sur $\mathcal{L}$. On appelle *index* du segment géodésique Γ, et l'on note $\lambda(\Gamma)$, la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ de $\mathcal{L}$ sur lequel $L''(0)$ est strictement négative [on démontre que $\lambda(\Gamma)$ est fini pour tout Γ]. Le segment Γ est dit *dégénéré* s'il existe au moins une paire $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$ de sous-espaces de $\mathcal{L}$ telle que $L''(0)$ soit strictement négative (resp. négative ou nulle) sur $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{K}$ et $\dim \mathcal{H} = \lambda(\Gamma)$, $\dim \mathcal{K} > \dim \mathcal{H}$).

On note $S(p, q)$ l'ensemble des segments géodésiques de V qui ont p, q pour extrémités et l'on dit que $S(p, q)$ est *régulier* si aucun de ses éléments n'est dégénéré. Désignons par a_λ le nombre d'éléments de $S(p, q)$ qui sont d'index λ, par $\Omega(V)$ l'ensemble des éléments des segments de courbe de V qui ont pour extrémités p, q. Alors, on a les

INÉGALITÉS DE MORSE. — *Quel que soit le corps K et les points p, $q \in V$, tels que $S(p, q)$ soit régulier, on a*

$$a_i \geqq \dim H_i(\Omega(V); K).$$

6. Application de la théorie de Morse à l'étude des variétés riemannienne 1/4-pincées de dimension paire.

LEMME. — *Soit V une variété riemannienne complète, de dimension n, telle que $\rho(\mu) \geqq \delta > 0$ pour tout $\mu \in P(V)$. Alors tout segment géodésique de longueur $> \pi/\sqrt{\delta}$ de V est d'index $\geqq (n-1)$.*

Le lemme résulte de la démonstration du théorème 2 et de la définition de l'index, puisque l'ensemble des champs $X(s)$ introduit dans la démonstration forme un espace vectoriel dont la dimension est celle des vecteurs N de T_p tels que $\langle N, \gamma'(0) \rangle = 0$, c'est-à-dire $\dim T_p - 1 = n - 1$.

THÉORÈME 6. — *Soit V une variété riemannienne complète, simplement connexe, de dimension paire et α-pincée. Si $\alpha > 1/4$, les groupes d'homotopie de V vérifient $\pi_i(V) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.*

Démontrons le théorème dans le cas où il existe $p \in V$ tel que $S(p, p)$ soit régulier [dans le cas où il n'en est pas ainsi, on procède de façon analogue en remplaçant $S(p, p)$ par $S(p, q)$ où q est un point suffisamment voisin de p et tel que $S(p, q)$ soit régulier]. Soit $\Gamma \in S(p, p)$, de longueur L; le milieu q de Γ est un point de V qui est joint à p par deux segments géodésiques distincts, de même longueur; c'est donc que chacun de ces segments rencontre le lieu résiduel de p (éventuellement en q); d'après le théorème 4 on a donc $L \geqq 2\pi/\sqrt{\Delta}$. Comme $\alpha > 1/4$, on a $L > \pi/\sqrt{\alpha\Delta}$ d'où, d'après le lemme, pour l'index de Γ : $\lambda(\Gamma) \geqq n - 1$. Et ceci, pour tout $\Gamma \in S(p, p)$, ce qui implique $a_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Les inégalités de Morse entraînent $H_i(\Omega(V); K) = 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, n-2$ et pour tout corps K. En particulier, pour l'homologie entière de $\Omega(V)$:$H_i(\Omega(V); Z) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n-2)$. Comme $\pi_i(\Omega(V)) = \pi_{i+1}(V)$, le théorème est démontré.

REMARQUES.

a. D'après les exemples (*c*), (*d*), (*e*) du n° 2, la borne $1/4$ est bien la meilleure possible pour α. On peut d'ailleurs préciser ce qui se passe pour les variétés $1/4$-pincées qui ne sont pas des sphères homotopiques, et démontrer qu'une telle variété (toujours simplement connexe, complète et de dimension paire) est celle de l'un des exemples (*d*), (*e*) du n° 2 munie de sa structure riemannienne canonique d'espace symétrique.

b. Il est loisible de conjecturer qu'il existe une constante r $(0 \leqq r < 1/4)$, et un théorème du type : si V vérifie les hypothèses du théorème 6 pour $\alpha > r$, alors : soit V est une sphère homotopique, soit V a une homotopie (ou une homologie) comparable à celle de l'un des exemples (*d*), (*e*) du n° 2.

c. Le théorème 6 affirme seulement que V est une sphère homotopique, contrairement à ceux de RAUCH et KLINGENBERG qui affirment un homéomorphisme. Dans cet ordre d'idées, on peut se demander quel est le meilleur pincement possible pour une structure riemannienne sur une sphère S_7 de Milnor.

7. Application de la théorie de Bochner-Lichnerowicz. — La méthode du n° 6 ne s'applique pas en dimension impaire; mais on peut obtenir des résultats en toutes dimensions, en utilisant la technique de Bochner-Lichnerowicz relative aux formes harmoniques (on atteint évidemment ainsi seulement la cohomologie *réelle* de V). Nous ne donnerons qu'un résultat sur $H^2(V, R)$, ceux relatifs à $H^i(V, R)$ pour $i > 2$ n'étant pas encore satisfaisants.

Théorème 7. — *Pour une variété riemannienne compacte et α-pincée telle que* $\dim V = 2m$ (*resp.* $\dim V = 2m+1$) *et* $\alpha > 1/4$ [resp. $\alpha > 2(m-1)/$] $(8m-5)$ *on a* $H^2(V, R) = 0$.

Corollaire. — *Une variété riemannienne compacte, de dimension* 5 *et α-pincée avec $\alpha > 2/11$, vérifie $H^i(V, R) = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.*

La démonstration du théorème 7 utilise la formule fondamentale de [2], et une majoration du tenseur de courbure des variétés riemanniennes α-pincées avec $\alpha > 0$. On peut démontrer, par cette technique, d'autres résultats encore incomplets. Par exemple : si V est une variété kählerienne compacte, de dimension 4 et à courbure strictement positive, alors $\dim H^2(V, R) = 1$ (en particulier, $S_2 \times S_2$ ne peut pas être muni d'une telle structure). Rauch avait déjà donné dans [5] un analogue kählérien du théorème 3, où la variété type était le projectif complexe et pour un rapport de courbure entre V et le projectif complexe plus grand que 0,95.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Klingenberg (W.). — *On the structure of compact Riemannian manifolds* (*Proc. nat. Acad. Sc.*, t. 44, 1958, p. 586-588).

[2] Lichnerowicz (André). — *Courbure, nombres de Betti et espaces symétriques* (*Proc. intern. Congr. Math.* [11, 1950, Cambridge (Mass.)], vol. 2, Providence, American mathematical Society, 1952, p. 216-223).

[3] Preissmann (A.). — *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann* (*Comment. Math. Helv.*, t. 15, 1492-1943, p. 175-216).

[4] Rauch (H. E.). — *A contribution to differential geometry in the large* (*Ann. Math.*, t. 54, 1951, p. 38-55).

[5] Rauch (H. E.). — *Geodesics, symmetric spaces and differential geometry in the large* (*Comment. Math. Helv.*, t. 27, 1953, p. 294-320).

[6] Toponogov (V. A.). — *Sur la convexité des espaces de Riemann de courbure positive* (*Doklady, Akad. Nauk S. S. S. R.*, nouv. série, t. 115, 1957, p. 674-676).

Marcel Berger,
M. Conf. Fac. Sc. Strasbourg,
16. rue de l'Argonne,
Strasbourg (Bas-Rhin).