BULLETIN DE LA S. M. F.

A. HAEFLIGER

# Sur les self-intersections des applications différentiables

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 87 (1959), p. 351-359
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__351_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
*Bull. Soc. math. France*,
87, 1959, p. 351 à 359.

# SUR LES SELF-INTERSECTIONS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES;

PAR

ANDRÉ HAEFLIGER.

INTRODUCTION. — On se propose d'étudier d'une manière générale les self-intersections d'une application différentiable $f$ d'une variété $V$ dans une variété $M$. Par exemple un point double de $f$ est un couple $(x_1, x_2)$ de points de $V$ tels que $f(x_1)=f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$ ; il est naturel d'identifier les deux couples $(x_1, x_2)$ et $(x_2, x_1)$, c'est-à-dire de considérer les points doubles comme des points du carré symétrique de $V$ privé de la diagonale. C'était l'idée de WHITNEY dans [7] et [8] par exemple. Plus généralement les points $p$-uples de $f$ seront des points du quotient du sous-espace $V_0^p$ de $V^p$ formé des suites de $p$ points distincts de $V$ par l'action du groupe $S(p)$ des permutations des $p$ facteurs de $V^p$. On est aussi conduit à définir d'autres types de self-intersection, par exemple les points doubles de la restriction de $f$ aux points singuliers de $f$. Génériquement, les points de self-intersection d'un certain type de $f$ forment une sous-variété du quotient $V_\pi$ de $V_0^p$ par un sous-groupe $\pi$ de $S(p)$; cette sous-variété représente une classe d'homologie qu'il s'agira d'évaluer (1).

Nous nous placerons dans le cadre de la théorie des jets infinitésimaux de C. EHRESMANN (*cf.* [1]) et nous utiliserons les méthodes et les idées fondamentales développées par THOM et WHITNEY dans leurs études des singularités des applications différentiables.

## I. Géométrie des self-intersections.

**1. Symétrisé d'un fibré.** — Soit $E$ un fibré de base $V$, fibre $F$ et groupe structural $G$. Un sous-groupe $\pi$ du groupe $S(p)$ des permutations de $p$ objets

(1) L'auteur se propose de revenir ailleurs sur ce sujet et de compléter cet exposé sur plusieurs points.

agit sur les produits $E^p$ et $V^p$ par permutation des facteurs. Le groupe $\pi$ transforme en eux-mêmes le sous-espace $V_0^p$ de $V^p$ formé des suites de $p$ points de $V$ tous distincts et le sous-espace $E_0^p$ de $E^p$ se projetant sur $V_0^p$. Désignons par $E_\pi$ et $V_\pi$ les quotients de $E_0^p$ et $V_0^p$ par la relation d'équivalence associée à l'action de $\pi$.

Proposition. — *$E_\pi$ est un fibré de base $V_\pi$, de fibre $F^p$; son groupe structural $G_\pi$ est l'extension du groupe-produit $G^p$ par $\pi$ agissant naturellement sur $G^p$.*

Autrement dit $G_\pi$ est formé des couples $(g, \alpha)$, où $g \in G^p$ et $\alpha \in \pi$, avec la loi de composition $(g, \alpha)(g', \alpha') = (g.\alpha(g'), \alpha\alpha')$, où $\alpha(g')$ désigne l'élément de $G^p$ obtenu à partir de $g'$ après la permutation $\alpha$ de ses composantes. On a donc la suite exacte

$$e \to G^p \to G_\pi \to \pi \to e.$$

Toute section de $E$ définit canoniquement une section de $E_\pi$.

Dans ce qui suit, $V$ sera une variété différentiable de dimension $n$ et $E$ sera le fibré $E^r$ sur $V$ des jets d'ordre $r$ de $V$ dans une variété différentiable $M$ de dimension $m$ (*cf.* [1]); sa fibre est donc la variété $T_n^r(M)$ des $n$-vitesses d'ordre $r$ de $M$ et son groupe structural le groupe $L_n^r$ des jets d'ordre $r$ à l'origine $O$ de $R^n$ des automorphismes différentiables de $R^n$ laissant fixe $O$. Soit $f$ une application différentiable de $V$ dans $M$; elle se prolonge suivant une section différentiable $f^r$ de $E^r$ (celle qui associe à tout point de $V$ le jet d'ordre $r$ de $f$ en ce point); elle définit donc une section différentiable $f_\pi^r$ du fibré différentiable $E_\pi^r$.

On désignera par $V^p/\pi$ le quotient de $V^p$ par l'action de $\pi$; $V_\pi$ est une variété ouverte dans $V^p/\pi$; son complémentaire sera appelé la sous-variété de ramification de $V^p/\pi$.

Il est probable qu'une partie de la théorie puisse s'appliquer à des espaces plus généraux que les variétés (*cf.* Wu [10], [11], [12]).

**2. Le type d'une self-intersection d'une application.** — Pour donner une définition du type invariante par les changements de coordonnées dans $V$ et dans $M$, il faut d'une part considérer dans la fibre $[T_n^r(M)]^p$ de $E_\pi^r$ un sous-ensemble $S$ invariant par le groupe structural $(L_n^r)_\pi$. D'autre part, soit $\Gamma$ le pseudo-groupe des automorphismes locaux différentiables de $M$; considérons sur $M^p$ le pseudo-groupe $\Gamma_\pi$ engendré par les éléments de la forme $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$, où $\gamma_i \in \Gamma$, invariants par $\pi$, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in \pi$, on a $\alpha\gamma(z) = \gamma\alpha(z)$ partout où les deux membres sont définis; $\Gamma_\pi$ se prolonge naturellement suivant un pseudo-groupe d'automorphismes locaux de $[T_n^r(M)]^p$ désigné encore par $\Gamma_\pi$. On supposera alors de plus que $S$ est invariant par $\Gamma_\pi$ (ce qui exprime l'invariance de la définition pour les changements de coordonnées de $M$).

Soit $E_S$ l'espace fibré associé à $E_\pi^r$ de fibre $S$; il s'identifie canoniquement à un sous-fibré de $E_\pi^r$.

DÉFINITION. — *On dira qu'une application différentiable $f$ présente au point $x$ de $V_\pi$ une self-intersection de type $S$ si $f_\pi^r(x)$ appartient au sous-fibré $E_S$.*

EXEMPLES. — *Cas $r=0$.* — Alors $T_n^0(M)=M$, et $E^0$ n'est autre que le fibré trivial $V\times M$; $E_\pi^0$ est le fibré de fibre $M^p$ associé au revêtement $V_0^p$ de $V_\pi$ (*cf.* 1). Tout sous-espace de $M^p$ invariant par $\Gamma_\pi$ est réunion (invariante par $\pi$) de sous-espaces définis en égalant entre elles certaines coordonnées $y_i$ de $y=(y_1, \ldots, y_p)\in M^p$; par exemple l'ensemble des points dont au moins $q\leq p$ coordonnées sont égales. Si $y_1=\ldots=y_p$, on obtient la diagonale de $M^p$; le type de self-intersection qu'elle détermine dans $V_{S(p)}$ est le *point p-uple.*

*Cas $r=1$.* — $E^1$ est le fibré des applications linéaires des espaces tangents aux points de $V$ dans les espaces tangents aux points de $M$. Supposons $p=2$, $\pi=Z_2$; on peut prendre par exemple pour $S\subset T_n^1(M)\times T_n^1(M)$ les couples formés de deux $n$-vitesses dégénérées en un même point de $M$; le type de self-intersection ainsi défini correspond au point double du sous-ensemble des points singuliers de $f$.

3. **Transversalité.** — Dorénavant nous supposerons que $S$ est une sous-variété fermée différentiable de la fibre $[T_n^r(M)]^p$. Le plus souvent, on doit admettre que $S$ présente des singularités; nous supposerons alors que $S$ est une collection de sous-variétés différentiables (*cf.* [2], exposé 7); il en sera alors de même pour $E_S$; on dira que $f_\pi^r$ est transverse sur $E_S$, si $f_\pi^r$ est transverse au sens de THOM sur chaque sous-variété de la décomposition (*cf.* [2]).

Le lemme de transversalité de THOM (*cf.* [4]) peut s'étendre aux self-intersections. Il entraîne en particulier le

THÉORÈME DE TRANSVERSALITÉ. — *Toute application différentiable de $V$ dans $M$ peut être approchée à l'ordre $q>r$ par une application différentiable $f$ telle que $f_\pi^r$ soit transverse sur la sous-variété $E_S$ de $E_\pi^r$ en tout point d'un compact donné $K$ de $V_\pi$.*

On dira que $f$ présente sous forme régulière sur $K$ la self-intersection de type $S$.

REMARQUE. — Il serait intéressant de savoir si l'on peut remplacer $K$ par $V_\pi$ tout entier, comme cela peut se vérifier dans un grand nombre de cas particuliers. Mais de toute façon, on peut remplacer K par un ouvert $U$ de $V_\pi$ dont le complémentaire dans $V^p/\pi$ soit un voisinage de la sous-variété de ramification de $V^p/\pi$; on peut même s'arranger pour que $U$ soit difféomorphe à $V_\pi$ et en soit une rétraction. On ne modifiera donc pas les propriétés homologiques en identifiant $U$ et $V_\pi$ et l'on dira simplement que $f$ présente sous forme régulière la self-intersection de type $S$ si c'est vrai sur $U$.

EXEMPLE. — Dire qu'une application $f$ de $V$ dans $M$ présente sous forme régulière les points $p$-uples, c'est dire qu'en $y = f(x_1) = \ldots = f(x_p)$, $x_i \in V$, les images par $f$ des espaces tangents à $V$ aux points $x_1, \ldots, x_p$ sont en position générale.

On dira qu'une immersion $f$ de $V$ dans $M$ est complètement régulière (*cf.* WHITNEY [8]) si $f^0_\pi$ est transverse sur $E_S$, quel que soit $S$ invariant par $\pi$ et $\Gamma_\pi$; il suffit d'ailleurs de supposer que $f^p : V^p \to M^p$ est transverse sur la diagonale de $M^p$ pour tout $p$.

COROLLAIRE. — *Toute immersion de $V$ compact dans $M$ peut être approchée à l'ordre $q > 1$ par une immersion complètement régulière.*

Il semble qu'on puisse montrer sans difficulté qu'une immersion complètement régulière est stable.

**4. Singularités et self-intersections d'une application.** — En général, l'ensemble des points de self-intersection d'un certain type dans $V$ d'une application $f$ de $V$ dans $M$ a une adhérence dans la sous-variété de ramification de $V^p/\pi$; cette adhérence rencontre la diagonale de $V^p/\pi$, identifiée à $V$, en des points singuliers de $f$. Par exemple, l'adhérence des points doubles d'une application 1-générique $f$ (*cf.* [2] exposé 7) est l'ensemble de tous les points singuliers de $f$; le cas le plus simple est celui du point cuspidal d'une application de $R^2$ dans $R^3$ (*cf.* WHITNEY [8]).

En suivant la terminologie de THOM (*cf.* [3] et [4]), on définit $(S_1)^q$ (par récurrence sur $q$) comme l'ensemble des points de $V$ où le rang de la restriction de $f$ à $(S_1)^{q-1}$ est inférieur d'une unité à sa valeur maximum. Si le prolongement d'ordre $q$ de $f$ est transverse, dans un espace de jets convenable, sur le sous-fibré qui définit la singularité $(S_1)^q$, on peut introduire au voisinage de $x \in (S_1)^q$ et de $y = f(x)$ des coordonnées locales $(u_1, \ldots, u_{qm-1}, x, v_1, \ldots, v_k)$ et $(U_1, \ldots, U_{qm-1}, Y_1, \ldots, Y_m, V_1, \ldots, V_k)$, dimension de $V = qm + k$ et dimension de $M = (q+1)m - 1 + k$, telles que $f$ soit définie par les équations

$$Y_j = x u_j + x^2 u_{j+m} + \ldots + x^q u_{j+(q-1)m} + \text{termes de degré} > q+1 \quad (1 \leq j < m),$$
$$Y_m = x u_m + \ldots + x^{q-1} u_{(q-1)m} + x^{q+1} + \text{termes de degré} > q+1,$$
$$U_i = u_i \quad (1 \leq i \leq qm-1),$$
$$V_s = v_s \quad (1 \leq s \leq k).$$

Au voisinage de $O$, les points $(q+1)$-uples forment une sous-variété de dimension $q+k$ dans $V^{q+1}/\pi$ dont l'adhérence dans la diagonale est $(S_1)^q$ qui est de dimension $k$.

REMARQUE. — Il est probable qu'on puisse s'arranger pour faire disparaître les termes de degré $q+1$ dans l'expression ci-dessus (WHITNEY l'a fait dans des cas particuliers *cf.* [5], [8]).

## II. Homologie des self-intersections.

**5. Classe de cohomologie duale à un cycle de self-intersection.** — Nous supposerons comme au paragraphe 3 que le sous-espace $S$ de la fibre de $E_\pi^r$ qui définit le type d'une self-intersection est une sous-variété différentiable, éventuellement avec singularités, mais portant une classe d'homologie fondamentale entière ou modulo 2 (de dimension égale à celle de $S$); alors la sous-variété $E_S$ de $E_\pi^r$ vérifiera les mêmes hypothèses.

Soit $f$ une application différentiable de $V$ dans $M$ présentant sous forme régulière (*cf.* 3) la self-intersection de type $S$ (on supposera cette hypothèse implicitement vérifiée dans tout ce qui suit); dans ce cas, l'ensemble $S_f$ des points de self-intersection de type $S$ de $f$ est une sous-variété différentiable de $V$, de même codimension que $E_S$, et qui porte aussi une classe d'homologie fondamentale bien déterminée (au moins si $S_f$ est un ANR, *cf.* [2], exposé 8); on dira que $S_f$ est le *cycle* des points de self-intersection de type $S$ de $f$. Alors :

PROPOSITION. — *La classe de cohomologie duale au cycle des points de self-intersection de type $S$ de $f$ est l'image par $(f_\pi^r)^*$ de la classe duale à $E_S$ dans $E_\pi^r$.*

Ceci montre, en particulier, que cette classe est un invariant de la classe d'homotopie de $f$.

EXEMPLES. — On voit facilement que la classe duale au cycle des points doubles d'une application $f$ de $V$ dans $M$ est une

classe modulo 2, si $M$ est non orientable;
classe entière, si $M$ est orientable de dimension paire;
classe à valeur dans le faisceau d'entiers tordus associé au revêtement $V_0^2$ de $V_{Z_2}$, si $M$ est orientable et de dimension impaire.

On a un résultat analogue pour les points $p$-uples.

**6. Expression générale de la classe duale à un cycle de self-intersection.** — Soit $\hat{E}_\pi^r$ l'espace fibré de fibre $[T_n^r(M)]^p$ associé à l'universel pour le groupe $(L_n^r)_\pi$. Il existe une représentation $h$, déterminée à l'homotopie près, de $E^r_\pi$ dans $\hat{E}^r_\pi$. Appelons *classe universelles* de $E^r_\pi$ les classes de cohomologie de $E^r_\pi$ images par $h^*$ de classes de $\hat{E}^r_\pi$.

THÉORÈME. — *La classe duale au cycle des points de self-intersection de type $S$ d'une application $f$ est l'image par $(f^1_\pi)^*$ d'une classe universelle de $E^1_\pi$.*

DÉMONSTRATION. — Le sous-espace invariant $S$ définit des sous-fibrés $E_S$ et $E_S$ de $E^r_\pi$ et $\hat{E}^r_\pi$ resp.; la classe duale à $E_S$ est l'image par $h^*$ de la classe duale à $\hat{E}_S$ (on peut supposer que $\hat{E}^r_\pi$ est une variété différentiable et que $h$ est différentiable). D'autre part, comme $T^r_n(M)$ et $L^r_n$ ont même type d'homotopie que $T^1_n(M)$ et $L^1_n$, alors $\hat{E}^r_\pi$ a même type d'homotopie que $\hat{E}^1_\pi$.

REMARQUE. — D'une manière générale, en reprenant les notations de 1, soient $U_\pi$ l'universel pour le groupe $\pi$, $B_G$ le classifiant pour le groupe $G$ et $\hat{E}$ le fibré de fibre $F$ associé à l'universel pour $G$. On obtient le fibré de fibre $F^p$ associé à l'universel pour $G_\pi$ en faisant le quotient de $U_\pi \times E^p$ par la relation d'équivalence $(x, y) \sim (x\alpha^{-1}, \alpha y)$, où $\alpha \in \pi$; sa base est le quotient de $U_\pi \times (B_G)^p$ par $\pi$.

APPLICATION. — La classe duale à un cycle de self-intersection d'ordre o d'une application $f$ de $V$ dans $R^m$ est une classe caractéristique du revêtement $V^p_0$ de $V_\pi$. Par exemple, *la classe duale au cycle des points doubles d'une application de $V$ dans $R^m$ est $\mu^m$*, où $\mu$ est la classe fondamentale du revêtement $V^2_0$ de $V_{Z_2}$.

## 7. Cohomologie modulo 2 de l'universel pour les points doubles.

*Cas $r=0$.* — Le fibré $E^0_{Z_2}$ est à groupe structural $Z_2$. Soit $U$ l'universel pour $Z_2$ et $P$ sa base; l'universel $E^0_{Z_2} = Q$ est le quotient de $X = U \times M$ par $Z_2$ (agissant sur $U$ comme d'habitude et sur $M \times M$ en permutant les facteurs). Alors $Q$ est fibré sur $P$, de fibre $M \times M$.

Comme $Z_2$ agit sans point fixe sur $X$, on a la suite exacte de Smith (tout ce qui suit est en coefficient modulo 2)

$$\to H^{q-1}(Q) \xrightarrow{\mu} H^q(Q) \xrightarrow{\alpha} H^q(X) \xrightarrow{\sigma} H^q(Q) \to$$

où $\mu$ est le cup produit par la classe fondamentale du revêtement $X$ de $Q$.

Soit $\Delta$ l'application de $H^*(M)$ dans $H^*(Q)$ qui fait correspondre à une classe $c$ la classe spéciale (au sens de Smith) $1 \otimes c \otimes c$ identifiée à une classe de $Q$; comme $\alpha\Delta$ est injectif, $\Delta$ l'est aussi, et l'on désignera par $D$ l'image de $H^*(M)$ par $\Delta$. L'homomorphisme $\mu^k : H^*(Q) \to H^*(Q)$ est biunivoque sur $D$.

D'autre part, $\alpha$ applique biunivoquement l'image de $\sigma$ sur le sous-groupe symétrisé $S$ de $H^*(M) \otimes H^*(M) = H^*(M \times M)$ (c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $a \otimes b + b \otimes a$); on identifiera donc $S$ avec l'image de $\sigma$. On a la

PROPOSITION. — *Le groupe de cohomologie modulo 2 de l'universel pour les points doubles (d'ordre 0) est la somme directe*

$$\sum_k \mu^k D + S.$$

*Cas $r > 0$.* — Soit $E^r$ le fibré des jets d'ordre $r$ de $V$ dans $M$; sa fibre a même type d'homotopie que $M$ et son groupe structural $L_n^r$ le même type d'homotopie que le groupe orthogonal $O(n)$. D'après la remarque du paragraphe précédent, on obtiendra $\hat{E}^r_{Z_2}$, au type d'homotopie près, en prenant le quotient de $U \times (B_{O(n)} \times M)^2$ par $Z_2$. Donc :

PROPOSITION. — *On obtient la cohomologie de l'universel pour les points doubles d'ordre $r > 0$, en remplaçant dans la proposition précédente $M$ par $M \times B_{O(n)}$.*

Désignons par $V_2$ (au lieu de $V_{Z_2}$) le carré symétrique de $V$ auquel on a enlevé la diagonale. Comme plus haut, on a des homomorphismes $\Delta$ : $H^*(V) \to H^*(V_2)$ et $S$ : $H^*(V) \times H^*(V) \to H^*(V_2)$ en faisant correspondre à toute classe $a \in H^*(V)$ [resp. $a \otimes b \in H^*(V) \otimes H^*(V)$] la classe spéciale $a \otimes a$ (resp. $a \otimes b + b \otimes a$) de $H^*(V \times V)$, et en l'induisant sur $V_0^2$ où elle s'identifie à une classe de $V_2$. Appelons encore $\mu$ la classe fondamentale du revêtement $V_0^2$ de $V_2$. De ce qui précède, résulte le :

THÉORÈME. — *La classe duale à un cycle de self-intersection dans $V_2$ d'une application $f$ de $V$ dans $M$ s'exprime sous la forme* $\sum_k \mu^k d_k + s$, *où $d_k$ et $s$ sont les images par $\Delta$ et $S$ de classes de $H^*(V)$ et $H^*(V) \otimes H^*(V)$ appartenant à l'anneau engendré par les classes de Stiefel-Whitney de $V$ et le sous-groupe $f^*[H^*(M)]$.*

EXEMPLE. — Le cycle des points singuliers $S_1$ d'une application $f$ de $V$ dans $R^m$ est dual à la classe de Stiefel-Whitney normale $\overline{W}^{m-n+1}$ (*cf.* THOM [3]); les points doubles de $S_1$ forment un cycle dans $V_2$ dual à $\mu^m \Delta(\overline{W}^{m-n+1})$.

**8. Relations homologiques entre points doubles et points singuliers.** — D'après 4, le cycle $S$ des points singuliers d'une application $f$ de $V$ dans $M$ peut être considéré comme le bord du cycle $D$ des points doubles de $f$ dans $V_2$. Si $V$ est identifiée à la diagonale de $V^2/Z_2$, la classe d'homologie de $S$ est l'image dans l'homomorphisme bord $\partial$ : $H_*(V^2/Z_2 \bmod V) \to H_*(V)$ de la classe du cycle (mod $V$) $D$.

Lorsque $M = R^m$, on sait que la classe duale à $D$ est $\mu^m$, et la classe duale à $S$ : $\overline{W}^{m-n+1}$. Ceci conduit à la définition topologique suivante des classes de Stiefel-Whitney normales.

Soit $V$ une variété topologique et soit $\mu$ la classe fondamentale du revêtement $V_0^2$ de $V_2$; le groupe $H^m(V_2)$ est en dualité (mod 2) avec le groupe $H_{2n-m}(V_2/Z_2 \bmod V)$. L'image par $\partial$ de la classe duale à $\mu^m$ sera par définition la classe duale à $\overline{W}^{m-n+1}$ dans $V$ (*cf.* Wu[10], [12]).

**9. Cas des immersions.** — Supposons $V$ compacte pour simplifier. Soit $f$ une immersion complètement régulière de $V$ dans $M$; le cycle des points $p$-uples de $f$ est compact dans $V_\pi$; sa classe duale peut être considérée comme appartenant au groupe $H_K^*(V_\pi)$ de cohomologie de $V$ à support compact.

PROPOSITION. — *La classe duale à support compact au cycle des points p-uples d'une immersion f est un invariant de la classe d'homotopie régulière de f.*

Le bord d'un petit voisinage tubulaire symétrique dans $V \times V$ de la diagonale est isomorphe à l'espace fibré $T$ des vecteurs tangents à $V$ de longueur unité; on peut donc considérer que $V_2$ est bordé par $P$, le fibré en projectifs associé à $T$ (*cf.* WHITNEY [7]).

Considérons le cas $M = R^m$. Soit $S$ le fibré de base $V_2$, fibre $S^{m-1}$, associé au revêtement $V_0^2 \to V_2$, le groupe structural agissant par symétrie sur $S^{m-1}$, et soit $S_0$ la restriction de $S$ à $P$.

Soit $f$ une immersion de $V$ dans $R^m$; l'application de $T$ dans $S^{m-1}$ qui envoie le vecteur $\nu \in T$ sur le vecteur unitaire $\dot{f}(\nu)/|\dot{f}(\nu)| \in S^{m-1}$ commute avec les symétries dans $T$ et $S^{m-1}$ et définit donc une section $s_f$ de $S_0$. En identifiant la cohomologie à supports compacts de $V_2$ avec la cohomologie de $V_2$ modulo $P$, on a le

THÉORÈME. — *La classe $D_f$ à support compact duale aux points doubles de f est l'obstruction au prolongement de la section $s_f$ au fibré S.*

Lorsque $V$ est orientable, on peut calculer aisément, à partir de $D_f$, la $(m-n)$-classe entière de Stiefel-Whitney du fibré normal à $f(V)$ dans $R^m$.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] EHRESMANN (C.). — *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie* [*Colloques internationaux du C. N. R. S.* [52, 1953, Strasbourg], Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1953, p. 97-110].

[2] Séminaire CARTAN, t. 9, 1956-1957 : *Quelques questions de topologie*, n$^{os}$ 7 et 8.

[3] THOM (R.). — *Les singularités des applications différentiables* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 43-87).

[4] THOM (R.). — *Un lemme sur les applications différentiables* (*Bol. Soc. mat. mexic.*, 2$^e$ série, t. 1, 1956, p. 59-71).

[5] THOM (R.). — *Les ensembles singuliers d'une application différentiable et leurs propriétés homologiques* (*Séminaire de Topologie de Strasbourg*, décembre 1957).

[6] WHITNEY (H.). — *The general type of singularity of a set of* $2n-1$ *smooth functions of n variables* (*Duke math. J.*, t. 10, 1943, p. 161-172).

[7] WHITNEY (H.). — *The self-intersections of a smooth n-manifold in* $2n$*-space* (*Ann. Math.*, t. 45, 1944, p. 220-246).

[8] WHITNEY (H.). — *The singularities of a smooth n-manifold in* $(2n-1)$*-space* (*Ann. Math.*, t. 45, 1944, p. 247-293).

[9] WHITNEY (H.). — *On singularities of mapping of Euclidean spaces*, I : *Mappings of the plane into the plane* (*Ann. Math.*, t. 62, 1955, p. 374-410).

[10] WU Wen-Tsun. — *On the realisation of complexes in Euclidean spaces*, I, II (*Acta Math. Sinica*, t. 5, 1955, p. 505-552 et t. 7, 1957, p. 79-101).

[11] WU Wen-Tsun. — *On the imbedding of polyhedrons in Euclidean spaces* (*Bull. Acad. polon. Sc.*, Cl. III, t. 4, 1956, p. 573-577).

[12] WU Wen-Tsun. — *A theory of imbedding and immersion in Euclidean spaces* (*Inst. Math. Acad. Sinica*) (multigraphié).

André HAEFLIGER,
Université de Genève
(Suisse).