

BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 427-437

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__427_0

© Bulletin de la S. M. F., 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ISOMÉTRIES ET TRANSFORMATIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIÉTÉ KÄHLÉRIENNE COMPACTE;

PAR

ANDRÉ LICHNEROWICZ

(Paris).

Étant donnée une variété analytique complexe compacte V_{2n} , admettant une métrique kählérienne, je me propose d'étudier dans cet exposé certains rapports entre l'algèbre de Lie des transformations analytiques de la variété et l'algèbre des isométries infinitésimales de V_{2n} . Une première partie sera consacrée à des résultats généraux reliant les transformations analytiques envisagées à la structure kählérienne. Dans une seconde partie des cas particuliers et des applications seront étudiés.

I. Transformations analytiques complexes et structure kählérienne.

1. **Notion de transformation infinitésimale analytique.** — *a.* Soit V_{2n} une variété analytique complexe arbitraire de dimension topologique $m = 2n$. Nous désignons par (z^α) (α, β, \dots , tout indice grec $= 1, \dots, n$) un système de coordonnées locales analytiques complexes. Aux coordonnées locales réelles usuelles (x^i) (i, j, \dots , tout indice latin $= 1, \dots, 2n$), on substitue les $2n$ coordonnées complexes (z^i) définies par :

$$(z^\alpha) \quad (z^{\alpha^*} = \bar{z}^\alpha).$$

L'existence d'indices de deux espèces conduit à la notion de type pour un tenseur. Si d est l'opérateur de différentiation extérieure sur les formes, je poserai : $d = d' + d''$, où d' est de type $(1, 0)$ et d'' de type $(0, 1)$. Je désignerai par \mathcal{J} ($\mathcal{J}^2 = -Id$) la « structure presque complexe » définie par la structure analytique complexe de V_{2n} .

b. Une transformation analytique de V_{2n} est une transformation laissant invariante la structure analytique complexe, ou — ce qui est équivalent — laissant \mathcal{J} invariant. Une transformation infinitésimale (t. i.) définie par un champ de vecteurs X est analytique si :

$$\mathcal{L}(X)\mathcal{J} = 0,$$

où $\mathcal{L}(X)$ est l'opérateur de transformation infinitésimale (ou de « dérivée de Lie »). En coordonnées locales complexes, (1.1) s'écrit ⁽¹⁾

$$(1.2) \quad \partial_{z^{\alpha}} X^{\alpha} = 0.$$

Les composantes X^{α} sont ainsi des fonctions holomorphes des coordonnées (z^{β}). Les t. i. analytiques sont celles qui correspondent aux champs de vecteurs holomorphes. Si X définit une t. i. analytique, il en est de même pour $\mathcal{J}X$, et

$$(1.3) \quad [\mathcal{J}X, Y] = [X, \mathcal{J}Y] = \mathcal{J}[X, Y].$$

c. Je supposerai désormais V_{2n} compacte. Soit G_a le plus grand groupe de transformations analytiques de V_{2n} . BOCHNER et MONTGOMERY [2] ont établi que G_a est un groupe de Lie complexe opérant de manière analytique complexe sur V_{2n} . L'algèbre de Lie de G_a peut être identifiée à l'algèbre L_a des t. i. analytiques. \mathcal{J} définit sur L_a une structure d'algèbre de Lie complexe qui correspond à la structure complexe de G^a . C'est l'algèbre de L_a que nous nous proposons d'étudier.

2. L'idéal I de L_a . — *a. Si $h_{(1,0)}$ est une 1-forme holomorphe de V_{2n} , X un élément de L_a , le scalaire $X^{\alpha}h_{\alpha}$ est holomorphe sur la variété compacte V_{2n} et, par suite,*

$$(2.1) \quad i(X)h_{(1,0)} = X^{\alpha}h_{\alpha} = \text{Cte},$$

où $i(X)$ désigne l'opérateur de produit intérieur par X . Nous représentons par $h_{(0,1)}$ la forme complexe conjuguée et posons $h = h_{(1,0)} + h_{(0,1)}$.

Soit H l'espace vectoriel complexe des 1-formes holomorphes fermées. On sait que toute forme $h_{(0,1)} \in H$ à périodes imaginaires pures est nécessairement nulle et que, par suite, $\dim H \leq b_1(V_{2n})$ ⁽²⁾. Introduisons le sous-espace H_0 de H défini par les $h_{(1,0)} \in H$ tels que :

$$i(X)h_{(1,0)} = 0 \quad \text{quel que soit } X \in L_a.$$

Si, en particulier, L_a est transitive sur V_{2n} , $i(X)h = 0$ entraîne $h = 0$, et $H_0 = 0$.

⁽¹⁾ Vous posons $\partial_i = \partial/\partial z^i$.

⁽²⁾ Les dimensions envisagées ici sont toujours les dimensions réelles.

b. Soit I l'espace vectoriel complexe défini par les $X \in L_a$ tels que :

$$i(X)h_{(1,0)} = 0 \quad \text{quel que soit } h_{(1,0)} \in H.$$

Si $X, Y \in L_a$, considérons le crochet $Z = [X, Y]$ et le produit :

$$i(Z)h_{(1,0)} = Z^\alpha h_\alpha = X^\beta \partial_\beta Y^\alpha h_\alpha - Y^\beta \partial_\beta X^\alpha h_\alpha,$$

soit

$$i(Z)h_{(1,0)} = X^\beta \partial_\beta (Y^\alpha h_\alpha) - Y^\beta \partial_\beta (X^\alpha h_\alpha) - X^\alpha Y^\beta (\partial_\alpha h_\beta - \partial_\beta h_\alpha).$$

Ainsi, si $L'_a = [L_a, L_a]$ est l'idéal dérivé de L_a , $L'_a \subset I$ et I est un idéal de L_a tel que L_a/I soit abélien. La forme bilinéaire $i(X)h_{(1,0)}$ ($X \in L_a$, $h_{(1,0)} \in H$) met en dualité les espaces vectoriels L_a/I et H/H_0 .

Par suite,

$$\dim L_a - \dim I = \dim H - \dim H_0.$$

c. Si $X \in L_a$ son image sur la variété d'Albanèse de V_{2n} [1] par l'application canonique p est un vecteur fixe. Si $X \in I$, on a $p(X) = 0$.

Si V_{2n} est supposée kählérienne, toute 1-forme holomorphe est fermée, $\dim H = b_1(V_{2n})$ et $p(X) = 0$ entraîne $i(X)h_{(1,0)} = 0$ quel que soit $h_{(1,0)} \in H$.

Ainsi, dans ce cas, I n'est autre que l'espace des vecteurs holomorphes dont la projection sur la variété d'Albanèse est nulle [3].

3. Caractérisation des transformations infinitésimales analytiques. —

Dans toute la suite, nous supposons que la variété compacte V_{2n} considérée admet une métrique kählérienne

$$(3.1) \quad ds^2 = 2g_{\alpha\beta} dz^\alpha dz^{\beta*}$$

dont la 2-forme fondamentale (réelle) est :

$$(3.2) \quad F = ig_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^{\beta*}.$$

Soit M l'opérateur linéaire sur les formes défini sur les formes de type (p, q) par la relation :

$$Mf_{p,q} = (p - q)if_{(p,q)}.$$

Cet opérateur satisfait aux relations de commutation

$$(3.3) \quad \delta M - M\delta = d\Lambda - \Lambda d, \quad dM - Md = -(\delta L - L\delta) = i(d' - d''),$$

où δ est l'opérateur de différentiation et où L (resp Λ) sont les opérateurs de produit extérieur (resp. intérieur) par la forme F .

Par la dualité définie par la métrique, tout champ de vecteurs X peut être identifié avec une 1-forme ξ ; à l'opérateur \mathcal{J} se trouve substitué, au signe près, l'opérateur M et (1.2) se traduit par :

$$\nabla_\alpha \xi_\beta = 0,$$

où ∇ est l'opérateur de dérivation covariante dans la connexion kählérienne.

Nous sommes ainsi conduit à associer à toute 1-forme ξ le tenseur $a(\xi)_{ij}$ défini par :

$$a(\xi)_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha}\xi_{\beta}, \quad a(\xi)_{\alpha^*\beta} = a(\xi)_{\alpha\beta^*} = 0, \\ a(\xi)_{\alpha^*\beta^*} = \nabla_{\alpha^*}\xi_{\beta^*}.$$

Si $\Delta = d\delta + \delta d$, un calcul local conduit aux deux identités :

$$(3.4) \quad (\Delta\xi - Q\xi)_i = -2\nabla^j a(\xi)_{ji}$$

et

$$(3.5) \quad \langle \Delta\xi - Q\xi, \xi \rangle = 4 \langle a(\xi), a(\xi) \rangle$$

où $\langle \dots \rangle$ désigne le produit scalaire obtenu par intégration sur V_{2n} et où Q est « l'opérateur de Ricci » défini par :

$$Q : \xi_i - 2R_i{}^j \xi_j.$$

De (3.4) et (3.5) résulte que les 1-formes ξ définissant les t. i. analytiques coïncident avec les solutions de l'équation.

$$(3.6) \quad \Delta\xi - Q\xi = 0.$$

D'après un résultat classique concernant les variétés riemanniennes compactes, les isométries infinitésimales correspondent aux solutions cofermées ($\delta\xi = 0$) de (3.6). Ainsi, pour que ξ définisse une isométrie infinitésimale, il faut et il suffit qu'elle définisse une t. i. analytique et soit cofermée.

4. Holonomie et transformations infinitésimales analytiques. —

a. Soit J l'opérateur qui à une forme bilinéaire $t_x(v, w)$, ($x \in V_{2n}$) fait correspondre la forme bilinéaire $t_x(v, \mathcal{J}_x w)$. Si ξ définit une t. i. analytique, l'étude du tenseur $\nabla_j \xi_j$ conduit au résultat suivant [4] : le tenseur $\nabla_i \xi_j$ appartient en chaque point x à l'espace vectoriel S_x de tenseurs de type (1.1) défini par :

$$S_x = \Psi_x + J\Psi_x,$$

où Ψ_x désigne l'algèbre d'holonomie en x de la variété kählérienne.

b. Supposons que le groupe d'holonomie Ψ_x de la variété V_{2n} réductible dans le réel. L'espace vectoriel T_x tangent en x admet la décomposition en somme directe :

$$(4.1) \quad T_x = T_x^0 + \hat{T}_x$$

avec

$$\hat{T}_x = \sum_{\alpha=0}^k Q_x^{\alpha}$$

où les différents sous-espaces introduits sont orthogonaux deux à deux, invariants par \mathcal{J} et par le groupe Ψ_x ; T_x^0 désigne l'espace des vecteurs invariants par Ψ_x et Q_x^0 son orthocomplément dans l'espace des vecteurs invariants par la composante connexe de l'identité de Ψ_x .

Si $\xi \in L_a$, en décomposant ξ_x selon T_x^0 et les Q_x^a , on déduit du résultat précédent concernant $\nabla_i \xi_j$ qu'à la décomposition de T_x selon l'holonomie correspond une décomposition de L_a en somme directe d'idéaux complexes.

Tout élément ξ de L_a tel que $\xi_x \in T_x^0 + Q_x^0$ est tel que : $Q\xi = 0$, donc à dérivée covariante nulle (en particulier $\xi_x \in T_x^0$); ξ définissant une 1-forme holomorphe, si $\xi_{(1)} \in I$ on a $\xi_{(1)}^x \xi_x = \xi_{(1)}^i \xi_i = 0$, et $\xi_{(1)x} \in \hat{T}_x$. Ainsi :

THÉORÈME. — *Si C est l'espace vectoriel des champs de vecteurs à dérivée covariante nulle, l'algèbre L_a admet la décomposition en somme directe d'idéaux complexes*

$$(4.2) \quad L_a = C + \hat{L}_a$$

où C appartient au centre de L_a et où $I \subset \hat{L}_a$.

§. Décomposition des formes définissant une transformation infinitésimale analytique. — *a.* Si $\xi \in L_a$, il est clair que $Md\xi = 0$. Décomposons ξ en une somme :

$$(5.1) \quad \xi = \eta + \zeta \quad (\partial\eta = 0, d\zeta = 0).$$

On a $Md\eta = 0$ et en appliquant (3.3) à η , il vient :

$$dM\eta = -\delta L\eta = 0.$$

Ainsi $M\eta$ est fermée, $M\zeta$ est cofermée et

$$(5.2) \quad M\xi = M\zeta + M\eta \quad (\delta M\zeta = 0, dM\eta = 0).$$

En particulier, pour que $\xi \in L_a$ soit l'image par M d'une 1-forme définissant une isométrie infinitésimale (plus brièvement soit une M -isométrie), il faut et il suffit que ξ soit fermée.

b. Décomposons selon de Rham ξ en la somme :

$$\xi = \eta + d\varphi,$$

où $\partial\eta = 0$ et $\zeta = d\varphi$ (φ , scalaire réel). En décomposant $M\eta$ fermée selon de Rham, on a :

$$(5.3) \quad \xi = d\varphi + Md\psi + H\xi,$$

où φ, ψ sont des scalaires réels et où H est le projecteur sur l'espace des 1-formes harmoniques; (5.3) peut se traduire en introduisant le scalaire

complexe $\rho = \varphi + i\psi$: la partie $\xi(1, 0)$ de type $(1, 0)$ de ξ s'écrit :

$$(5.4) \quad \xi_{(1,0)} = d'\rho + H\xi_{(1,0)}.$$

La fonction ρ étant définie à une constante complexe additive près sera normalisée par la condition :

$$(5.5) \quad \int_{F_{2n}} \rho(\star 1) = 1,$$

où $(\star 1)$ est l'élément de volume. Pour que ξ soit à dérivée covariante nulle, il faut et il suffit que $\rho = 0$. Pour que ξ soit dans I , il faut et il suffit que sa partie harmonique soit nulle.

6. Introduction d'une forme sesquilinéaire. -- Soit $\xi^{(1)}$, et $\xi^{(2)}$ deux éléments arbitraires de L_a avec

$$(6.1) \quad \begin{cases} \xi_{(1,0)}^{(1)} = d'\rho^{(1)} + h_{(1,0)}^{(1)}, \\ \xi_{(1,0)}^{(2)} = d'\rho^{(2)} + h_{(1,0)}^{(2)}. \end{cases}$$

Au couple $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})$ associons le nombre complexe :

$$(6.2) \quad \xi^{(1)}, \xi^{(2)} = \int_{F_{2n}} \rho^{(1)} \bar{\rho}^{(2)}(\star 1).$$

On notera que :

$$M\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = -\xi^{(1)}, M\xi^{(2)} = i\xi^{(1)}, \xi^{(2)}.$$

Si $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in \hat{L}_a$, la forme sesquilinéaire (6.2) définit sur \hat{L}_a un produit scalaire : si $\xi^{(1)}, \xi^{(1)} = 0$, on a : $\rho^{(1)} = 0$ et $\xi^{(1)} \in C \cap L_a$ donc : $\xi^{(1)} = 0$. Un calcul local du crochet $[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}]$ des t. i. correspondant à $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in L_a$ donne :

$$[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}]_{(1,0)} = d'\sigma,$$

avec

$$(6.3) \quad \sigma = i\Lambda \{ (d\rho^{(1)} + h_{(1,0)}^{(1)}) \wedge (d\rho^{(2)} + h_{(1,0)}^{(2)}) \}$$

qui satisfait à la condition de normalisation.

THÉORÈME. — *La forme sesquilinéaire (6.2) est invariante par le plus grand groupe connexe d'isométries [4].*

Soit η une isométrie infinitésimale, $\zeta = M\eta$ la M -isométrie correspondante; ζ est fermée et $\zeta = d\varphi + h$, où φ est un scalaire réel et h une 1-forme harmonique réelle. D'après (6.3) :

$$[\zeta, \xi^{(1)}], \xi^{(2)} = i \int_{F_{2n}} \Lambda \{ (d\varphi + h_{(1,0)}) \wedge (d\rho^{(1)} + h_{(1,0)}^{(1)}) \bar{\rho}^{(2)}(\star 1) \},$$

soit, compte tenu des propriétés des 1-formes horlomorphes,

$$[\zeta, \xi^{(1)}] \cdot \xi^{(2)} = i \int_{V_{2n}} \Lambda(\zeta \wedge d\rho^{(1)}) \bar{\rho}^{(2)}(\star 1)$$

et après intégration par parties :

$$[\zeta, \xi^{(1)}] \cdot \xi^{(2)} = -i \int_{V_{2n}} \Lambda(\zeta \wedge d\bar{\rho}^{(2)}) \rho^{(1)}(\star 1),$$

ainsi :

$$[\zeta, \xi^{(1)}] \cdot \xi^{(2)} - \xi^{(1)} \cdot [\zeta, \xi^{(2)}] = 0$$

et pour η :

$$[\eta, \xi^{(1)}] \cdot \xi^{(2)} + \xi^{(1)} \cdot [\eta, \xi^{(2)}] = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

7. Étude de la sous-algèbre complexe engendrée par une algèbre d'isométries.

a. Désignons par L_1 une algèbre d'isométries infinitésimales de V_{2n} et considérons le sous-espace de L_a :

$$L_2 = L_1 + ML_1$$

L_2 admet manifestement une structure de sous-algèbre complexe de l'algèbre complexe L_a .

Soit \hat{P} un sous-espace complexe de \hat{L}_a invariant par la représentation adjointe de L_2 opérant dans \hat{L}_a . L'orthocomplément \hat{Q} de \hat{P} dans \hat{L}_a au sens du produit scalaire (6.2) est aussi un sous-espace complexe de \hat{L}_a invariant par cette représentation. En utilisant la décomposition $L_a = \hat{L}_a + C$, on voit que tout sous-espace complexe de L_a invariant par la représentation adjointe de L_2 dans L_a admet un supplémentaire complexe également invariant.

THÉORÈME. — *Toute sous-algèbre complexe L_2 de L_a engendrée par une algèbre d'isométrie est réductive dans L_a .*

L_2 est bien entendu une algèbre réductive. Le théorème s'applique en particulier au cas où L_1 est l'algèbre de toutes les isométries infinitésimales. De ce théorème on déduit :

COROLLAIRE 1. — *L'algèbre L_a admet une décomposition en somme directe :*

$$L_a = I + K,$$

où K est un sous-espace complexe tel que $[L_2, K] = 0$.

COROLLAIRE 2. — *L'algèbre L_a admet la décomposition en somme directe,*

$$L_a = C(L_2) + [L_2, L_a],$$

où $C(L_2)$ est le centralisateur de L_2 dans L_a .

b. dans les éléments définis par (6.1) supposons $\xi^{(1)} \in C(L_2)$.

Si : $\zeta = d\varphi \in I \cap ML_1$

$$\begin{aligned} i \int_{F_{2n}} \Lambda \{ (d\rho^{(1)} + h_{(1,0)}^{(1)}) \wedge d\varphi \} \rho^{(2)}(\star \mathbf{1}) &= \\ = -i \int_{F_{2n}} \Lambda \{ (d\rho^{(1)} + h_{(1,0)}^{(1)}) \wedge d\rho^{(2)} \} \varphi(\star \mathbf{1}) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit, compte tenu des propriétés des 1-formes holomorphes :

$$\int_{F_{2n}} \sigma\varphi(\star \mathbf{1}) = 0.$$

Ainsi,

THÉORÈME. — *Pour le produit scalaire défini sur L_a par (6.2), $[L_a, C(L_2)]$ est orthogonal à la sous-algèbre $\tilde{L}_2 = I \cap L_2$.*

II. Études de cas remarquables.

8. Cas où L_2 est un idéal de L_a .

a. Supposons que L_2 soit un idéal de L_a . D'après le théorème fondamental du § 7, a, L_2 admet une décomposition :

$$(8.1) \quad L_2 = \tilde{L}_2 + R, \quad R \cap I = 0, \quad [L_2, R] = 0.$$

Le sous-espace défini par la somme directe $(I + R)$ étant stable par la représentation adjointe de L_2 , il vient :

$$(8.2) \quad L_a = (I + R) + A, \quad A \cap (I + R) = 0, \quad [L_2, A] \subset A \cap I = 0.$$

Si B est l'orthocomplément de \tilde{L}_2 dans I au sens du produit scalaire envisagé, on a, L_2 étant un idéal :

$$(8.3) \quad I = \tilde{L}_2 + B, \quad B \cap L_2 = 0, \quad [L_2, B] \subset B \cap L_2 = 0.$$

Si $P = A + B$, il résulte de (8.1), (8.2), (8.3)

$$L_a = L_2 + P, \quad P \cap L_2 = 0.$$

Comme P est dans $C(L_2)$, on déduit du théorème d'orthogonalité du § 7, *b*

$$[L_a, P] \subset [L_a, C(L_2)] \subset B \subset P$$

et P est un idéal de L_a . Ainsi :

THÉORÈME. — *Si L_2 est un idéal de L_a , il existe un idéal complexe P supplémentaire de S_2 dans L_a .*

b. Supposons en particulier $L'_a \subset L_2$:

$$[L_a, P] \subset P \cap L_2 = 0$$

et P est abélien; L_a , somme directe de l'idéal réductif L_2 et de l'idéal abélien P est réductive.

Inversement, supposons L_a réductive. Son idéal dérivé L'_a est semi-simple. Si K est sous-groupe compact maximal du groupe connexe de transformations analytiques d'algèbre L'_a , on peut substituer à la métrique kählérienne initiale une métrique kählérienne invariante par K . L'_a étant semi-simple complexe, le sous-espace complexe de L'_a engendré par l'algèbre de K coïncide avec L'_a . Par suite, pour cette métrique, $L'_a \subset L_2$ (L_2 désignant ici, comme dans la suite, la sous-algèbre complexe engendrée par l'algèbre L_2 de toutes les isométries infinitésimales).

COROLLAIRE. — *Pour que K_a soit réductible, il faut et il suffit qu'il existe une métrique kählérienne telle que $L'_a \subset L_2$.*

9. — Cas où dR définit une transformation infinitésimale analytique.

a. Soit ψ la 2-forme de Chern de V_{2n} . J'appelle courbure intégrale de Ricci de V_{2n} la quantité :

$$K = (2\pi)^2 \langle \psi, \psi \rangle.$$

La structure complexe restant fixe, varions la métrique ou — ce qui est équivalent — la 2-forme F de façon que la classe fondamentale de cohomologie de F reste invariante. Si ∂ est l'opérateur variation :

$$\partial F = dM\alpha,$$

où α est une 1-forme astreinte seulement à $M d\alpha = 0$. Posons $\alpha = \beta + d\varphi$ (avec $\partial\beta = 0$). Un calcul aisé donne :

$$(9.1) \quad \partial K = \frac{1}{2} \langle \alpha, \Delta dR - Q dR \rangle = \frac{1}{2} \langle d\varphi, \Delta dR - Q dR \rangle.$$

On en déduit que, *pour que dR définisse une t. i. analytique, il faut et il suffit que K soit stationnaire par rapport aux variations envisagées* [3].

b. D'après (3.5), pour que ξ définisse une t. i. analytique, il faut et il suffit que :

$$(9.2) \quad \langle \Delta \xi_{(1,0)} - Q \xi_{(1,0)}, \xi_{(1,0)} \rangle = 0;$$

cela posé, supposons que dR définisse une t. i. analytique qui est alors une M -isométrie; R étant invariant par isométrie, $M dR$ est dans le centre de L_1 . Si $h_{(1,0)}$ est une 1-forme holomorphe :

$$\delta' Q h_{(1,0)} = - {}_2 \nabla^\alpha (R_{\alpha\beta^*} h^{\beta^*}) = - {}_2 h^{\beta^*} \nabla^\alpha R_{\alpha\beta^*} = - h^{\beta^*} \partial_{\beta^*} R = \text{Cte} = 0.$$

Par suite, si $\xi_{(1,0)} = d' \rho + h_{(1,0)}$ définit un élément de L_a :

$$\langle \Delta d' \rho - Q d' \rho, d' \rho \rangle = \langle Q h_{(1,0)}, d' \rho \rangle = \langle \delta' Q h_{(1,0)}, \rho \rangle = 0.$$

$d' \rho$, donc $h_{(1,0)}$ définissent des t. i. analytiques et $h_{(1,0)}$ est à dérivée covariante nulle.

THÉORÈME. — *Si $M dR$ définit une t. i. analytique (qui appartient nécessairement au centre de L_1), on a $L_a = I + C$.*

Pour toutes les métriques kählériennes jouissant de la propriété, la dimension de C est la même.

10. Cas où $R = \text{Cte}$. — Le résultat précédent est en particulier valable si $R = \text{Cte}$. De plus, si $\xi \in L_a$ admet la décomposition :

$$\xi = \eta + \zeta \quad (\zeta = d\varphi)$$

on a $dM\eta = 0$, et

$$\delta Q\eta = - {}_2 \nabla_i (R^{ij} \eta_j) = - R^{ij} (\nabla_i \eta_j + \nabla_j \eta_i) = - {}_2 R^{\alpha\beta^*} (\nabla_\alpha \eta_{\beta^*} + \nabla_{\beta^*} \eta_\alpha) = 0.$$

Par suite $\Delta \zeta - Q \zeta = -(\Delta \eta - Q \eta)$ est cofermée et

$$\langle \Delta \zeta - Q \zeta, \zeta \rangle = 0.$$

Ainsi φ est une M -isométrie, η une isométrie et $L_a = L_2$.

THÉORÈME. — *Sur une variété kählérienne compacte pour laquelle $R = \text{Cte}$, l'algèbre L_a coïncide avec sa sous-algèbre complexe engendrée par l'algèbre de toutes les isométries infinitésimales et, par suite, est réductive. De plus $L_a = I + C$.*

On a $\dim L_a = 2 \dim L_1 - \dim C$. Par suite, pour toutes les métriques kählériennes jouissant de la propriété $R = \text{Cte}$, la dimension du groupe d'isométries est la même. On a $\dim L_a \leq 2(n^2 + 2n)$ et cette valeur n'est atteinte que par l'espace projectif complexe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLANCHARD (André). — *Sur les variétés analytiques complexes* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 73, 1956, p. 157-202; *Thèse Sc. math.*, Paris, 1956).
- [2] BOCHNER (S) and MONTGOMERY (D.). — *Groups of differentiable and real or complex analytic transformations* (*Annals Math.*, t. 46, 1945, p. 685-694).
- [3] CALABI (Eugenio). — *The space on Kähler metrics* (*Proc. intern. Congr. Math.*, 1954, Amsterdam). — Amsterdam, North-Holland Publishing, 1954, vol. 2, p. 206-207).
- [4] LICHNEROWICZ (André). — *Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes compactes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 244, 1957, p. 3011-3014); *Transformations analytiques d'une variété kählérienne et holonomie* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 953-956); *Transformations analytiques et isométries d'une variété kählérienne compacte* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 247, 1958, p. 855-857).
- [5] LICHNEROWICZ (André). — *Colloque de Géométrie différentielle globale* (1958, Bruxelles, Gauthier-Villars, Paris, p. 11-26).
- [6] MATSUSHIMA (Yozô). — *Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne* (*Nagoya math. J.*, t. 11, 1957, p. 145-150).
- [7] MONTGOMERY (Deane). — *Simply connected homogeneous spaces* (*Proc. Amer. math. Soc.*, t. 1, 1950, p. 467-469).

André LICHNEROWICZ,
Prof. Collège de France,
6, avenue Paul-Appell,
Paris, 14^e.

