BULLETIN DE LA S. M. F.

JOHN W. MILNOR

Sommes de variétés différentiables et structures différentiables des sphères

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 439-444
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__439_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89, 1959, Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 439 à 444.

SOMMES DE VARIÉTES DIFFÉRENTIABLES ET STRUCTURES DIFFÉRENTIABLES DES SPHÈRES;

PAR

JOHN W. MILNOR (1)
(Princeton).

La somme (sous-entendu somme *connexe*) de deux n-variétés est obtenue en enlevant de chacune d'elles l'intérieur d'une boule, puis en identifiant les bords que cette opération fait apparaître. Les deux lemmes qui suivent permettent de rendre cette définition rigoureuse.

LEMME 1. (J. CERF). — *Soit M une n-variété connexe, orientée. Soit f_1, f_2 deux plongements de la boule unité (fermée) D^n dans l'intérieur de M, si f_1 et f_2 conservent l'orientation, il existe un difféomorphisme $g: M \rightarrow M$ tel que $gf_1 = f_2$.*

La preuve se trouvera dans un article à paraître de CERF.

LEMME 2. (R. THOM). — *Soit M l'espace obtenu à partir de la réunion disjointe de deux variétés M_1 et M_2 en « recollant les bords » c'est-à-dire en identifiant tout $x \in \partial M_1$ avec $fx \in \partial M_2$, où $f: \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ est un difféomorphisme (2). Alors M peut être munie d'une structure différentiable compatible avec celles de M_1 et M_2. En plus, la variété différentiable ainsi obtenue est unique à un difféomorphisme près.*

Une preuve est indiquée en [3], p. 35.

Définition de la *somme* de deux n-variétés différentiables orientées connexes, M_1 et M_2 : on choisit deux plongements (différentiables)

---

(1) L'auteur bénéficie d'un Sloan Fellowship.

(2) Si les bords ont plusieurs composantes connexes, on peut désirer identifier une composante connexe de ∂M_1 avec une composante connexe de ∂M_2. Le lemme 2 est encore valable dans ce cas.

$f_i : D^n \to$ (intérieur de M_i) tels que f_1 conserve l'orientation et que f_2 l'inverse. Soit $M_1 \# M_2$ la variété obtenue à partir de la réunion disjointe :

$$(M_1 - \text{intérieur } f_1(D^n)) \cup (M_2 - \text{intérieur } f_2(D^n))$$

en recollant les bords à l'aide du difféomorphisme :

$$f_2 f_1^{-1} : f_1(S^{n-1}) \to f_2(S^{n-1}).$$

(Il est essentiel de bien utiliser ce difféomorphisme-là.)

On munit $M_1 \# M_2$ d'une structure différentiable compatible avec celles de M_1 — (intérieur de $f_1(D^n)$) et M_2 — (intérieur de $f_2(D^n)$). Cette variété est munie d'une orientation compatible avec celles de M_1 et M_2.

LEMME 3. — *La somme $M_1 \# M_2$ est bien définie à un difféomorphisme conservant l'orientation près. Cette opération satisfait à* [3] :

a) $M_1 \# M_2 \approx M_2 \# M_1$

b) $M_1 \# (M_2 \# M_3) \approx (M_1 \# M_2) \# M_3$ et

c) $M \# S^n \approx M$.

En plus, $M \# R^n$ est difféomorphe à M privé d'un point. $M \# D^n$ est difféomorphe à M privé de l'intérieur d'une n-boule plongée.

Les preuves sont immédiates.

Le théorème suivant est dû principalement à B. MAZUR [1].

THÉORÈME 1. — *Pour une variété différentiable compacte M les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *Il existe une variété N telle que $M \# N \approx S^n$*

(2) $M \# R^n \approx R^n$ (autrement dit M privé d'un point et difféomorphe à R^n)

(3) *M est la réunion de deux ouverts, tous deux difféomorphes à R^n*

La preuve que (1) entraîne (2) est basée sur le concept de somme infinie $M_1 \# M_2 \# \ldots$ de variétés différentiables. Une telle somme se définit comme dans le cas fini, et jouit de la même propriété d'associativité. Par exemple, la somme infinie $S^n \# S^n \# \ldots$ est difféomorphe à R^n.

Supposons maintenant $M \# N \approx S^n$, et considérons l'identité :

$$(M \# N) \# (M \# N) \# \ldots \approx M \# (N \# M) \# (N \# M) \# \ldots.$$

D'une part, ceci est difféomorphe à

$$S^n \# S^n \# \ldots \approx R^n.$$

---

[3] La notation $M_1 \approx M_2$ signifie qu'il existe un difféomorphisme, conservant l'orientation, de M_1 sur M_2. Les notations : $S^{n-1} \subset D^n \subset R^n$ désignent la sphère unité bordant la boule unité dans l'espace euclidien.

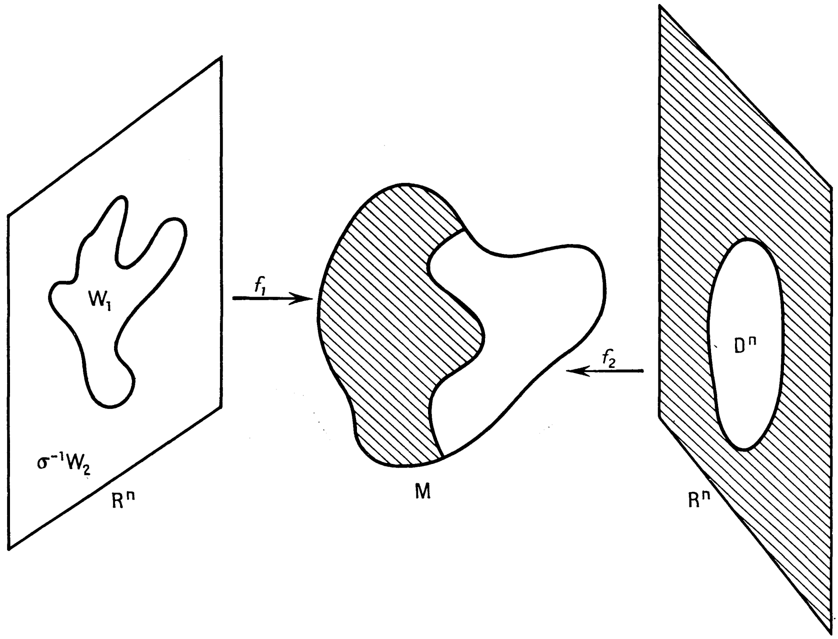
D'autre part, c'est difféomorphe à

$$M \# S^n \# S^n \ldots \approx M \# R^n.$$

Donc :

$$M \# R^n \approx R^n.$$

Il est clair que l'assertion (2) entraîne (3). Preuve que (3) entraîne (1).



Supposons que $M = f_1(R^n) \cup f_2(R^n)$, où f_1 et f_2 sont des plongements, et considérons l'ensemble compact :

$$f_2^{-1}(M - f_1(R^n)) \subset R^n.$$

En faisant au besoin une homothétie, on peut supposer que cet ensemble est contenu dans l'intérieur de D^n. L'application : $x \to f_1^{-1} f_2(x)$ définit alors un plongement : $S^{n-1} \to R^n$. Soit $W_1 \subset R^n$ la variété compacte dont $f_1^{-1} f_2(S^{n-1})$ est le bord. On peut obtenir une variété difféomorphe à M à partir de la réunion disjointe de W_1 et D^n en recollant les bords à l'aide du difféomorphisme :

$$f_2^{-1} f_1 = \partial W_1 \to \partial D^n.$$

Soit maintenant σ un difféomorphisme : $R^n \to (S^n -$ un point), par exemple la projection stéréographique; et soit W_2 l'adhérence du complémentaire de $S^n - \sigma W_1$. Définissons N à partir de la réunion disjointe de D^n et W_2

en recollant les bords à l'aide du difféomorphisme :

$$\sigma f_1^{-1} f_2 : \partial D^n \to \partial W_2.$$

Alors $M \# N$ peut être obtenue à partir de la réunion disjointe de W_1 et W_2 en recollant les bords à l'aide du difféomorphisme :

$$(\sigma f_1^{-1} f_2)(f_2^{-1} f_1) = \sigma : \partial W_1 \to \partial W_2.$$

Autrement dit : $M \# N$ est difféomorphe à $\sigma W_1 \cup W_2 = S^n$.

Ceci complète la preuve du théorème 1.

Corollaire 1. — *Une variété qui vérifie l'une des conditions* (1), (2), (3) *est nécessairement homéomorphe à* S^n.

Preuve : Cela résulte de la condition (2).

Corollaire 2. — *Soit* A^n *l'ensemble de toutes les variétés orientées* (*définies à un difféomorphisme conservant l'orientation près*) *qui vérifient* (1), (2) *ou* (3). *Alors* A^n *est un groupe abélien relativement à l'opération de composition.*

Preuve : Cela résulte de la condition (1).

Thom a montré que les deux conditions suivantes relatives à une variété M sont équivalentes (*cf.* [7], [4]).

a) M est obtenu à partir de deux exemplaires de D^n, en recollant les bords à l'aide d'un certain difféomorphisme (c'est-à-dire, $M \# D^n \approx D^n$).

b) M est combinatoirement équivalente à la sphère; c'est-à-dire qu'il existe une C^1-triangulation $f : K \to M$, où K est une subdivision rectiligne de la frontière d'un $(n+1)$-simplexe (*cf.* Whitehead [8]).

Les variétés satisfaisant à ces conditions définissent un sous-groupe $\Gamma^n \subset A^n$. Il serait extrêmement intéressant d'avoir des renseignements sur la structure de chacun de ces deux groupes. Voici un résumé de ce qu'on sait :

a) A^n est dénombrable (prouvé par Thom),
b) $\Gamma^n = 0$ pour $n \leqq 4$, $A^n = 0$ pour $n \leqq 3$ (*cf.* Smale [5]),
c) Γ^{4k-1} est non-trivial pour $k = 2$ ou $4 \leqq k \leqq 14$ (*cf.* [2]).

La démonstration, qui s'applique aussi bien à des valeurs de k plus grandes, fournit une borne inférieure spécifique pour l'ordre de Γ^{4k-1}. Par exemple, Γ^{31} contient au moins 16 931 177 éléments.

Il semble très difficile d'obtenir une borne supérieure pour la grandeur de ces groupes. (Par exemple, ont-ils un nombre fini de générateurs ?) La difficulté vient de ce que la question de décider si une variété donnée est difféomorphe à S^n est trop ardue. Le problème devient beaucoup plus facile si la relation de difféomorphisme est remplacée par le concept suivant, dû à THOM [6] :

DÉFINITION. — Deux variétés orientées sans bord M_1, M_2 sont *J-équivalentes*, s'il existe une variété différentiable à bord W telle que :

1° ∂W est la réunion disjointe de M_1 avec l'orientation donnée, et de M_2 avec l'orientation inverse de l'orientation donnée.

2° Les applications d'inclusion : $M_1 \rightarrow W$ et $M_2 \rightarrow W$ sont l'une et l'autre des homotopie-équivalences.

Avec cette définition, deux variétés J-équivalentes appartiennent à la même classe de cobordisme et ont le même type d'homotopie.

LEMME 4. — *Soit donnée une variété différentiable sans bord M; il existe N tel que $M \# N$ est J-équivalent à S^n si, et seulement si M a le type d'homotopie de S^n. Les classes de J-équivalence des sphères homotopiques forment un groupe abélien relativement à l'opération $\#$.*

On note ce groupe Θ^n.

THÉORÈME 2. — *Pour n impair et différent* (⁴) *de* 3, *le groupe Θ^n est fini.*

Pour n de la forme $4k-1$, on peut donner des renseignements plus détaillés. Soit B_k le k-ième nombre de Bernoulli.

THÉORÈME 3. — *Le groupe Θ^{4k-1}, $k > 1$, contient un sous-groupe cyclique d'ordre $2^{2k-2}(2^{2k-1}-1)$ (numérateur de B_k/k). L'indice de ce sous-groupe est un produit de nombres premiers qui sont petits au sens que $p(p-1)^2 < 2k$.*

Par exemple, Θ^7 est cyclique d'ordre 28, et Θ^{11} est cyclique d'ordre 992. Pour les plus grandes valeurs de k, je ne connais aucun Θ^{4k-1} entièrement.
D'autres précisions sur les groupes Θ^n sont données en [3].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] MAZUR (B.). — *On embeddings of spheres*, (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 65, 1959, p. 59-65).

[2] MILNOR (J.). — *Differentiable structures on spheres*, (*Amer. J. of Math.*) (à paraître).

(⁴) Si la conjecture de Poincaré est exacte, alors $\Theta^3 = 0$.

[3] MILNOR (J.). — *Differentiable manifolds which are homotopy spheres.* Princeton, Princeton University, 1959 (multigraphié).

[4] MUNKRES (J.). — *Obstructions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphisms*, (*Bull. Amer. math. Soc.*, t. 65, 1959, p. 332-334).

[5] SMALE (S.). — *The space of diffeomorphisms of the 3-sphere* (à paraître).

[6] THOM (R.). — *Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées Symposium internacional de Topologia algebraica* [1956, Mexico]. Mexico, Universidad nacional autonomia, 1958; p. 54-67.

[7] THOM (R.). — *Les structures différentiables des boules et des sphères* (à paraître).

[8] WHITEHEAD (J. H. C.). — *On C^1-complexes* (*Annals of Math.*, t. 41, 1940, p. 806-824).

John W. MILNOR,
Princeton University,
Princeton, N. J. (États-Unis).