BULLETIN DE LA S. M. F.

R. THOM

Remarques sur les problèmes comportant des inéquations différentielles globales

Bulletin de la S. M. F., tome 87 (1959), p. 455-461
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1959__87__455_0>

Colloques intern. C. N. R. S. [89. 1959. Lille].
Bull. Soc. math. France,
87, 1959, p. 455 à 461.

REMARQUES SUR LES PROBLÈMES COMPORTANT DES INÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES GLOBALES;

PAR

René THOM
(Strasbourg).

1. Introduction. — L'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles constitue l'un des objets essentiels de l'analyse dite classique. On sait les difficultés présentées par cette étude, même si l'on se restreint à des problèmes purement locaux d'existence et d'unicité. Assez paradoxalement, les inéquations différentielles et aux dérivées partielles ne semblent pas avoir attiré de façon systématique l'attention des analystes. C'est qu'ici le problème ne soulève plus de difficultés locales, mais bien au contraire des difficultés globales. A ce titre, ces problèmes semblent d'un gros intérêt pour le topologue, qui sera tenté d'y appliquer ses méthodes. D'ailleurs, comme le montreront de nombreux exemples, la plupart des problèmes rencontrés en géométrie différentielle globale sont de ce type. J'ajouterai de plus que les problèmes les plus simples qu'on puisse imaginer dans cette direction n'ont pas de solution évidente; les considérations qui suivent, sans viser à une solution générale d'ailleurs peut-être chimérique, n'ont pas d'autre ambition que de déblayer quelque peu un terrain encore mal connu.

2. Un problème typique. — Soient X, Y deux variétés différentiables, X variété-source, Y variété-but, dans la terminologie de C. Ehresmann. Soit $J^r(X, Y)$ le fibré des jets d'ordre r de X dans Y, (a, b) la projection canonique de $J^r(X, Y)$ sur $X \times Y$. On se donne un ouvert O de $J^r(X, Y)$ dont la projection sur $X \times Y$ par (a, b) recouvre tout le produit $X \times Y$. Soient L une sous-variété de X, f une application de X dans Y donnée sur L, telle que le prolongement f à l'ordre r de f, restreint à (L), soit dans l'ouvert (O). Est-il possible d'étendre l'application f de L à tout X, de telle façon que, en tout point $x \in X$, $f^{(r)}(x)$ soit dans (O)?

Citons deux cas particuliers :

a. Problème « type Dirichlet » : X est une boule B^{n+1} de bord $S^n = L$.

b. Problème type « Cauchy » : $X =$ un demi-espace R^{n+1}, L son bord R^n.

Dans la pratique, l'ouvert (O) sera défini par une (ou plusieurs) inéquations de la forme $G(x_i, y_j, \partial^m y_j / \partial x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}) < 0$, $(m \leq r)$ où G est une fonction différentiable par rapport aux coordonnées x_i de X, y_j de Y, et leurs dérivées partielles.

On remarquera que les deux situations typiques apparues dans la théorie des équations aux dérivées partielles : Problème de Dirichlet, Problème de Cauchy, correspondent à deux situations non moins typiques en topologie : l'extension d'une application du bord d'une boule à la boule toute entiére conduit directement à la définition des groupes d'homotopie; la figure du problème de Cauchy est — à peu près — celle qui joue un rôle fondamental dans le « relèvement des homotopies » ainsi que dans l'axiome de Kan des complexes semi-simpliciaux. Peut-être y faut-il voir plus qu'une coïncidence.

3. Exemples de problèmes.

1° Soient X, Y deux variétés différentiables compactes de dimension n, connexes, et simplement connexes, on se propose de trouver une application f de X sur Y, dont le jacobien ne s'annule nulle part; dans ce problème, la sous-variété L de X est vide, l'ouvert (O) est le complémentaire dans $J^1(X, Y)$ des jetsde rang $\leq n-1$. Il est clair que, si l'on savait résoudre ce problème, on saurait décider si les variétés X, Y sont ou non difféomorphes : ceci suffira à donner une idée de la difficulté du problème général.

2° Soit f une fonction numérique donnée au voisinage du bord S^n de la boule B^{n+1} telle que la différentielle df n'est pas nulle dans un voisinage de S^n. Peut-on étendre cette fonction à B^{n+1} sans que la différentielle df s'annule?

3° Un problème analogue, signalé par H. Hopf : caractériser tous les lacets du plan R^2 qui sont bords d'un disque D étalé dans R^2. Même problème sur S^n immergée dans R^{n+1}.

4° Existence sur une variété V^n d'une forme de Pfaff de rang maximum.

Tous ces problèmes ont un trait commun : ils sont « intrinsèques », ce qui veut dire que leur énoncé ne nécessite pas le choix de coordonnées particulières, ou encore, qu'ils sont invariants par difféomorphismes de la source et du but. En ce cas, l'ouvert (O) des jets permis est invariant sous l'action des groupes $L^r(n)$ des jets inversibles d'ordre r de la source et du but. Dans chaque fibre, l'ensemble des jets exclus forme une orbite sous l'action du groupe $L^r(n) \times L^r(p)$, ce qui, on l'a vu, exclut des singularités d'un certain type.

De ce point de vue, même si un problème d'inéquations différentielles n'est pas intrinsèque, il n'est pas inutile, en général, de définir le plus petit système intrinsèque le contenant. De ce fait, on exclut parfois des singularités d'un certain type. Mais, par ailleurs, la topologie nous enseigne que toute solution doit présenter des singularités; par exemple, les inégalités de M. MORSE impliquent l'existence de points critiques d'un certain index pour « presque toute solution »; si une contradiction apparaît, on pourra en conclure à l'inexistence d'une solution globale générique du problème. Cette remarque est, pour beaucoup, dans la fécondité du principe du maximum, et explique les propriétés si curieuses à maint égard des opérateurs du second ordre sur les fonctions.

4. Obstruction homologique. — Revenons par exemple au « problème type Dirichlet ». Il est clair qu'on pourra définir une obstruction topologique au problème. La donnée sur le bord permet de définir une application $f^{(r)}: S^n \to U$, où $U \subset (O)$ est l'image réciproque de $S^n \times Y$ dans la projection (a, b). Pour que le problème soit possible, il faut que cette application $f^{(r)}$ de S^n dans U soit homotope à zéro dans (O). Bien entendu, cette conditions nécessaire n'est pas suffisante. Ce n'est pas parce qu'on aura prolongé l'application sur le bord par une application $g: B^{n+1} \to (O)$, qu'on sera sûr d'obtenir une solution; en effet, il faut d'abord s'assurer que g peut être déformée en une application g_1 telle que $a \circ g_1 =$ identité. Cette seule condition, purement homotopique, ne sera déjà pas facile à exprimer, sauf dans le cas où (O) est un espace fibré sur $B^{n+1} \times Y$. Ensuite, il faudra s'assurer que cette « section » g' est de la forme $h^{(r)}$, où h est une application de B^{n+1} dans Y. Cette dernière condition, qui exprime que l'application g' est « holonome » est tout-à-fait hors de portée de la topologie algébrique actuelle.

Une première approximation consiste à se poser le problème, non en termes d'homotopie, mais en termes d'homologie. On considèrera que la donnée sur le bord définit un « cycle singulier » de dimension n de l'espace (U). Pour qu'il y ait une solution, il faut que ce cycle soit homologue à zéro dans l'ouvert (O). Ainsi se trouve définie une « obstruction homologique » dont la nullité est une condition nécessaire à l'existence d'une solution. Bien entendu, cette condition est, en général non suffisante : il est aisé de fabriquer des exemples, où cette obstruction est nulle, alors qu'évidemment aucune solution n'existe. Par exemple, l'obstruction homologique, dans le problème 2, revient à annuler le degré d'un champ de vecteurs sur (S), alors qu'on veut prolonger ce champ par un champ de gradients.

Dans le but d'obtenir un résultat un peu général, on va affaiblir la notion de solution. Introduisons d'abord le

5. **Système de Pfaff associé à un espace de jets.** — A tout espace de jets $J^r(R^n, R^p)$ se trouve canoniquement associé un système de Pfaff, qui définit les coordonnées des fibres comme dérivées partielles, des coordonnées y_j du but R^p par rapport aux variables (x_i) de la source R^n. Par exemple, pour l'espace $J^2(R, R)$, nous avons quatre coordonnées (x, y, p, q), et le système de Pfaff associé est $dy - p\,dx = 0$; $dp - q\,dx = 0$.

Dans le cas de $r = 1$, on obtient ce qu'on appelle une *structure de contact* dans l'espace J^1.

Étant donné un système de Pfaff (Ω) dans une variété différentiable M, on peut former le sous-complexe G_Ω des simplexes singuliers différentiables Ω-intégrables (c'est-à-dire, tels que toute forme de l'idéal des formes de Ω s'annule sur ce simplexe). On pourra tout d'abord, en première approximation, se demander si le cycle portant la donnée sur le bord est bord d'une chaîne formée de simplexes Ω-intégrables.

De manière un peu plus poussée, on peut se demander s'il existe une solution généralisée du type suivant : une variété à bord M, de bord S^n et une application différentiable $F: M \to (O)$, telle que :

(i) la restriction de F au bord de M soit l'application donnée $f^{(r)}$,
(ii) l'application F soit Ω-intégrable.

On va montrer que la nullité de l'obstruction homologique est une condition suffisante pour qu'il existe une chaîne de G_Ω ayant pour bord le cycle donné. On aura une solution généralisée, si de plus, une condition (relativement faible) de nature purement topologique est satisfaite : parmi tous les cycles ayant pour bord la donnée, il en est qui sont images de variétés différentiables. En fait, on va montrer le

Théorème 1. — *Pour tout ouvert (O) d'un espace de jets, l'injection du complexe G_Ω des simplexes intégrables pour Ω dans le complexe total des simplexes singuliers différentiables induit un isomorphisme des groupes d'homologie, et ceci pour toute dimension i strictement inférieure à la dimension n de la variété-source.*

De plus, l'*homomorphisme d'injection est surjectif pour la dimension n.*

En particulier, l'homologie locale du complexe G_Ω des simplexes intégrables est triviale pour les dimensions $< n$; en vertu des arguments classiques de théorie des faisceaux, on pourra par suite affirmer : Si un système de Pfaff Ω' est localement équivalent en tout point au système Ω des espaces de jets, on peut affirmer que l'homologie du complexe des simplexes Ω'-intégrables s'identifie à l'homologie de la variété pour toute dimension $< n$, n étant la dimension de la variété de base « locale ». Par exemple : Si, sur une variété (M^{2n+1}), il existe une forme de Pfaff de rang maximum partout (i. e. localement de la forme $dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n$), l'homologie singulière des simplexes intégraux pour cette forme donne l'homologie de M pour toute dimension $i \leqq n - 1$.

6. Démonstration du théorème. — Elle repose essentiellement sur la construction d'une déformation (un « opérateur d'homotopie ») du complexe $S(J)$ de tous les simplexes singuliers différentiables dans les simplexes Ω-intégrables. Une telle déformation doit être « héréditaire », c'est-à-dire compatible avec la restriction aux faces. Il suffira, par ailleurs de construire cette déformation — puisque le problème est essentiellement local — pour un ouvert de $J^r(R^n, R^p)$.

On se bornera à donner ici le principe de la construction, renvoyant à plus tard les détails techniques. On va définir une classe très spéciale d'applications, appelées V-applications, ou applications *à fort gradient*.

Soient b^r un simplexe de dimension r, b^n un simplexe de dimension $n \geqq r$, b'^r une subdivision de b^r, et soit s une application simpliciale de cette subdivision b'^r de b^r dans b^n. Plus la subdivision b' est fine, plus l'application s est « à fort gradient », en ce sens que le quotient $[s(x) - s(y)]/(x - y)$, pour tout couple de points x, $y \in b^r$ assez voisins, est d'autant plus grand que la subdivision b'^r est plus fine.

Par ailleurs, toute application simpliciale peut être différentiablement uniformisée, au sens suivant : il existe une application différentiable F de b^r dans le produit $b^r \times b^n$, telle que :

1° L'image géométrique $F(b^r)$ est le graphe de l'application simpliciale s.

2° Si p désigne la projection canonique du produit $b^r \times b^n$ sur le premier facteur, $p \circ F$ est arbitrairement voisin de l'identité. Bien entendu, l'application F doit présenter sur le $(r - 1)$-squelette de la subdivision b' des singularités d'ordre infini, du type de celles définie par la fonction $\exp(-1/x^2)$ à l'origine.

Enfin, on définira un automorphisme du produit $b^r \times b^n$ qui laisse fixe le produit $\partial b^n \times b^r$, et qui affecte seulement un voisinage tubulaire de $b^r \times \partial b^n$, et dont l'effet sur ce bord (le long de géodésiques normales par exemple), est de dilater ces géodésiques suivant une loi de la forme $d \to d^{1/m}$, $m \geqq 3$. Après un tel automorphisme, le graphe de s n'admettra sur le bord $b^r \times \partial b^n$ que des points à plan tangent vertical (parallèle à $1 \times b^n$). Finalement, l'application obtenue satisfait aux propriétés suivantes :

1° En tout point régulier de l'application $V : b^r \to b^n$, l'application est à fort gradient.

2° Si y est un point singulier de l'application V, on peut y définir un jet d'ordre r de V comme limite des jets d'ordre r de V aux points réguliers x voisins de y.

Soit maintenant un simplexe $s^r \in S(J)$ défini par les formules

$$y_j = f_j(p); \qquad x_i = g_i(p); \qquad u_k = \frac{\partial^{m_j} y}{\partial x_{i_1 \dots i_m}} = h_k(p).$$

Désignons par $Q_a(t_1, t_2, \dots, t_n)$ le polynome de degré r en les n variables auxiliaires $t_1, t_2, \dots, t_n$ dont les dérivées partielles à l'origine définissent le point $a(u_k = a_k)$ de l'espace des u_j. On va définir une application H du produit $b^r \times b^n$ dans $R^n \times R^p$ par les formules suivantes :

$$\mathrm{H}(p, t_1, t_2, \dots, t_n) \text{ est le point de coordonnées :}$$
$$x_i = g_i(p) + t_i; \qquad y_j = f_j(p) + \mathrm{Q}_a(t_1, t_2, \dots, t_n),$$

où a est le point $u_k = h_k(p)$.

Cela étant, on remplacera le simplexe s^r initial par le simplexe s'^r de $R^n \times R^p$ défini par la formule $H(p, V(p))$, où V est une application « à fort gradient de b^r dans b^n », paramétrée par les coordonnées $t_1, t_2, \dots, t_n$; en tout point régulier de l'application V, le jet de b^n dans R^p est défini (parce que défini à l'aide des polynomes Q_a), donc aussi le jet de b^r dans R^p, et par suite aussi le jet de y par rapport aux x. Les dérivées partielles u_k seront définies en ces points et prendront des valeurs qu'on pourra déterminer à partir des équations du simplexe s'_r (éventuellement avec une certaine indétermination). Ces valeurs se prolongeront par continuité aux points singuliers comme fonction différentiables de (p); comme l'amplitude de la fonction V peut être prise aussi petite qu'on veut, le simplexe s'^r sera, dans $R^n \times R^p$, arbitrairement voisin du simplexe initial; par ailleurs, V est à fort gradient, et localement linéaire (ou presque); par suite, les dérivées partielles de y par rapport à x sont très voisins de celles des polynomes Q_j par rapport à t, l'approximation étant d'autant meilleure que le gradient de V est le plus fort, et son amplitude plus petite.

Le caractère héréditaire de la déformation $s \to s'$ sera obtenu grâce au

Lemme. — Toute V-application du bord ∂b^{r+1} dans b^n se prolonge en une V-application de b^{r+1} dans b^n.

Il n'y a là guère que le prolongement d'une application simpliciale.

On voit que le principe de la construction est de remplacer tout simplexe non holonome par un simplexe voisin holonome qui présente des singularités en « dents de scie ». Dans la construction générale esquissée plus haut, ces singularités sont d'ordre infini. En fait, on pourrait rechercher si l'on ne pourrait pas obtenir des singularités plus douces. Dans le cas de problèmes du premier ordre, il est possible d'avoir un aperçu des singularités minimum présentées par une « pseudo-solution ». Soit s^r un simplexe non holonome; c'est la donnée, en tout point p du simplexe projection q^r dans $R^n \times R^p$, d'une direction de n-plan issue de p; le problème consiste à modifier d'arbitrairement peu ce champ de n-plans, de telle façon qu'il admette une variété enveloppe de dimension r, W, arbitrairement voisine du simplexe initiale q^r. On peut s'attendre à ce que la construction faite plus haut après une éventuelle déformation destinée à faire disparaître les singularités d'ordre trop élevé, ne conduisent qu'aux singularités présentées génériquement par les enveloppes de n-plans, à n paramètres, dans l'espace R^{n+p}. Or ces singularités sont relativement bien connues (singularités du type $S_1 S_1 \ldots S_1$, dans ma notation) [3].

Conclusion. — Si un problème d'inéquations différentielles du type de Dirichlet à une obstruction homologique nulle, le problème admet une « solution généralisée » : cette solution est multiforme (en général) et présente des singularités (du type de celles présentées par les enveloppes dans le cas du premier ordre). Il serait d'un très grand intérêt de pouvoir déterminer le nombre minimum de déterminations d'une solution généralisée; on définirait ainsi un entier naturel (impair, pour raison de degré) qui mesurerait le « complexité » de la donnée : les données admettant une solution usuelle étant celles de complexité 1.

Cette construction est d'ailleurs très analogue à l'interprétation de l'homologie comme homotopie du produit symétrique; soit X une variété, de dimension n, orientée compacte séparée, (F) un faisceau d'ensembles sur X, Y l'espace étalé associé; à tout ouvert U de X est associé l'ensemble $\Gamma(U)$ des sections de (F) sur U; désignons par $AG(F, U)$ le *groupe abélien libre* engendré par les éléments de $\Gamma(u)$; on définit ainsi un nouveau faisceau sur X, noté $AG(F)$. La construction précédente suggère que le groupe d'homologie singulière $H_n(Y, Z)$ est isomorphe au groupe abélien des sections $\Gamma(AG(F))$; on obtiendrait ainsi une généralisation du théorème relatif à l'homotopie du produit symétrique [1].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Dold (A.) und Thom (R.). — *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte* (*Ann. Math.*, t. 67, 1958, p. 239-281).

[2] Ehresmann (Charles). — *Extension du calcul des jets aux jets non holonomes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 239, 1954, p. 1762-1764).

[3] Thom (René). — *Les singularités des applications différentiables* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 43-87).

René Thom,
Professeur à la Faculté des Sciences,
3, boulevard Gambetta,
Strasbourg (Bas-Rhin).