

BULLETIN DE LA S. M. F.

ARISTIDE DELEANU

Théorie des points fixes. Commutativité de l'indice total

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 285-288

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__285_0

© Bulletin de la S. M. F., 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**THÉORIE DES POINTS FIXES :
COMMUTATIVITÉ DE L'INDICE TOTAL ;**

PAR

ARISTIDE DELEANU

(Bucarest).

Cette Note fait suite au travail [2], qui contient une théorie des points fixes pour la classe des espaces compacts qui sont des rétractes de voisinage d'espaces convexoïdes; nous en conservons les notations et la terminologie.

THÉORÈME. — Soient C_1 et C_2 deux espaces compacts qui sont des rétractes de voisinage d'espace convexoïde, et soient f une application continue de C_1 dans C_2 et g une application continue de C_2 dans C_1 . Soit O_2 une partie ouverte de C_2 telle que l'indice total $i_{fg}(O_2)$ est défini. Si l'on pose $O_1 = f^{-1}(O_2)$, alors l'indice total $i_{gf}(O_1)$ est défini et

$$i_{gf}(O_1) = i_{fg}(O_2).$$

PREUVE. — Le fait que $i_{fg}(O_2)$ est défini signifie qu'on a

$$fg(y) \neq y$$

pour tout point y appartenant à la frontière \dot{O}_2 de O_2 . Pour prouver que $i_{gf}(O_1)$ est aussi défini, il suffit de montrer que

$$gf(x) \neq x \quad \text{pour tout } x \in \dot{O}_1.$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in \dot{O}_1$ tel que $gf(x_0) = x_0$. Si l'on pose $y_0 = f(x_0)$, on déduit que $fg(y_0) = y_0$; d'autre part, les relations

$$x_0 \in \dot{O}_1 = \bar{O}_1 - O_1$$

et

$$f(\bar{O}_1) \subset \overline{f(O_1)} = \overline{ff^{-1}(O_2)} \subset \bar{O}_2$$

entraînent $y_0 \in \bar{O}_2 - O_2 = \dot{O}_2$, ce qui est absurde.

Pour démontrer l'égalité des deux indices, supposons tout d'abord C_1 et C_2 connexes. Alors on sait [2] que C_1 et C_2 sont rétractes d'espaces convexoïdes. Il existe donc deux espaces convexoïdes E_1 et E_2 et deux rétractions

$$r_1 : E_1 \rightarrow C_1, \quad r_2 : E_2 \rightarrow C_2.$$

Notons par j_α l'inclusion de C_α dans E_α ($\alpha = 1, 2$). Considérons les applications continues

$$\xi : E_2 \rightarrow E_1, \quad \xi' : E_1 \rightarrow E_2$$

définies par

$$\xi = j_1 g r_2, \quad \xi' = j_2 f r_1.$$

Compte tenu de la définition de l'indice total pour les rétractes des espaces convexoïdes ([2], p. 236), et des relations $r_\alpha j_\alpha = \text{identité}$ ($\alpha = 1, 2$), on peut écrire

$$\begin{aligned} i_{g,f}(O_1) &= i_{j_1 g f r_1}(r_1^{-1}(O_1)) = i_{\xi \xi'}(r_1^{-1}(O_1)), \\ i_{f,g}(O_2) &= i_{j_2 f g r_2}(r_2^{-1}(O_2)) = i_{\xi' \xi}(r_2^{-1}(O_2)). \end{aligned}$$

En appliquant le corollaire 26-27 de [3], p. 222, on obtient

$$\begin{aligned} i_{f,g}(O_2) &= i_{\xi \xi'}(\xi'^{-1} r_2^{-1}(O_2)) = i_{\xi \xi'}(r_1^{-1} f^{-1} j_2^{-1} r_2^{-1}(O_2)) \\ &= i_{\xi \xi'}(r_1^{-1} f^{-1}(O_2)) = i_{g,f}(O_1). \end{aligned}$$

Passons maintenant au cas où C_1 et C_2 ne sont pas connexes; on sait [2] que C_1 (resp. C_2) a un nombre fini de composantes connexes K_1, K_2, \dots, K_s (resp. Q_1, Q_2, \dots, Q_t), dont chacune est un rétracte d'espace convexoïde.

Soit σ l'application de l'ensemble $\{0, 1, \dots, s\}$ dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, t\}$ et τ l'application de $\{0, 1, \dots, t\}$ dans $\{0, 1, \dots, s\}$ définies par les conditions

$$\begin{aligned} f(K_l) &\subset Q_{\sigma(l)} & (1 \leq l \leq s), \\ g(Q_m) &\subset K_{\tau(m)} & (1 \leq m \leq t). \end{aligned}$$

Soient L l'ensemble des entiers l tels que $1 \leq l \leq s$ et $l = \tau \sigma(l)$, et M l'ensemble des entiers m tels que $1 \leq m \leq t$ et $m = \sigma \tau(m)$.

Conformément à la définition de l'indice total pour les rétractes de voisinage des espaces convexoïdes ([2], p. 240), on a

$$i_{g,f}(O_1) = \sum_{l \in L} i_{g,f|_{K_l}}(O_1 \cap K_l),$$

$$i_{f,g}(O_2) = \sum_{m \in M} i_{f,g|_{Q_m}}(O_2 \cap Q_m).$$

Remarquons que, si $m \in M$, alors $\tau(m) \in L$, car $\tau\sigma\tau(m) = \tau(m)$. De plus, si $l \in L$, alors il suffit de prendre $m = \sigma(l) \in M$ pour obtenir $\tau(m) = l$. Enfin, si $m_1, m_2 \in M$ sont tels que $\tau(m_1) = \tau(m_2)$, alors

$$m_1 = \sigma\tau(m_1) = \sigma\tau(m_2) = m_2.$$

L'application τ induit donc une correspondance biunivoque entre M et L .

Compte tenu de la dernière remarque et du cas étudié plus haut, où C_1 et C_2 étaient connexes, on déduit

$$\begin{aligned} i_{f,g}(O_2) &= \sum_{m \in M} i_{g,f|_{K_{\tau(m)}}}(f^{-1}(O_2 \cap Q_m) \cap K_{\tau(m)}) \\ &= \sum_{m \in M} i_{g,f|_{K_{\tau(m)}}}(O_1 \cap K_{\tau(m)}) = i_{g,f}(O_1). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. — Soit X un espace compact qui est un rétracte de voisinage d'espace convexoïde, G une partie ouverte de X et η une application continue de X en lui-même qui n'a aucun point fixe dans \hat{G} . Soit Y un sous-espace fermé de X qui est rétracte de voisinage d'espace convexoïde et tel que $\eta(X) \subset Y$. Alors $i_{\eta|_Y}(G \cap Y)$ est défini et

$$i_{\eta}(G) = i_{\eta|_Y}(G \cap Y).$$

PREUVE. — On applique le théorème ci-dessus pour $C_1 = Y$, $C_2 = X$, $O_2 = G$, $g = \eta$, $f =$ inclusion de Y dans X .

REMARQUE. — Felix BROWDER a construit [1] une théorie axiomatique de l'indice total des points fixes et a prouvé que ses quatre axiomes définissent uniquement l'indice total sur la catégorie des rétractes absolus de voisinage au sens de BORSUK. Le théorème 4 de [2] et le théorème ci-dessus montrent que les axiomes mentionnés sont satisfaits par la théorie des points fixes édiflée dans [2]. Par conséquent, pour la classe des rétractes absolus de voisinage l'indice total construit par BROWDER coïncide avec celui défini dans [2].

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BROWDER (Felix). — On the fixed point index for continuous mappings of locally connected spaces, *Summa Brasiliensis Mathematicæ*, t. 4, 1960, p. 253-293.
- [2] DELEANU (Aristide). — Théorie des points fixes : Sur les rétractes de voisinage des espaces convexoides, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 235-243.
- [3] LERAY (Jean). — Sur les équations et les transformations, *J. Math. pures et appl.*, 9^e série, t. 24, 1945, p. 201-248.

(Manuscrit reçu le 12 mars 1963.)

Aristide DELEANU,
Institutul de Matematica al Academiei R. P. R.,
Str. M. Eminescu 47,
Bucuresti 3 (Roumanie).

