

BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE CARTIER

J.M.G. FELL

PAUL-ANDRÉ MEYER

Comparaison, des mesures portées par un ensemble convexe compact

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 435-445

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__435_0

© Bulletin de la S. M. F., 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**COMPARAISON DES MESURES
PORTÉES PAR UN ENSEMBLE CONVEXE COMPACT ;**

PAR

PIERRE CARTIER, J. M. G. FELL
et **PAUL-ANDRÉ MEYER.**

INTRODUCTION.

A la page 45 de leur Ouvrage bien connu [6] sur les inégalités, HARDY, LITTLEWOOD et POLYÁ introduisent une relation d'ordre intéressante dans l'ensemble des suites $(a) = (a_1, \dots, a_n)$ de nombres réels telles que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Cette relation d'ordre est notée $(a') \prec (a)$ et, d'après les résultats des auteurs précédents, peut se définir de quatre manières équivalentes :

a. On a $a_1 + \dots + a_\nu \geq a'_1 + \dots + a'_\nu$ pour $1 \leq \nu \leq n$, avec égalité pour $\nu = n$;

b. Il existe une matrice carrée $(p_{\mu,\nu})$ d'ordre n satisfaisant aux relations

$$p_{\mu,\nu} \geq 0, \quad \sum_{\mu} p_{\mu,\nu} = \sum_{\nu} p_{\mu,\nu} = 1 \quad \text{et} \quad a'_\mu = \sum_{\nu} p_{\mu,\nu} a_\nu;$$

c. Quels que soient les nombres réels u_1, \dots, u_n , on a l'inégalité

$$\sum_{\sigma} \exp \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot u_{\sigma(i)} \right) \geq \sum_{\sigma} \exp \left(\sum_{i=1}^n a'_i \cdot u_{\sigma(i)} \right),$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des permutations σ des nombres $1, 2, \dots, n$;

d. Quelle que soit la fonction Φ continue et convexe, on a

$$\Phi(a_1) + \dots + \Phi(a_n) \geq \Phi(a'_1) + \dots + \Phi(a'_n).$$

L'inégalité de convexité d suggère que les propriétés précédentes se rapportent à des mesures sur la droite, à la suite (a) étant associée la

mesure $\sum_{i=1}^n \varepsilon_{a_i}$, où ε_{a_i} est la masse unité au point a_i . L'équivalence de b

et de d est la plus intéressante de ce point de vue et a été généralisée par divers auteurs; en particulier, BLACKWELL a considéré dans [1] le cas de mesures positives quelconques portées par un intervalle de la droite et SHERMAN a étudié le cas des mesures portées par un nombre fini de points d'un espace euclidien de dimension finie [8].

Nous nous proposons dans cet article de replacer les résultats précédents dans leur cadre naturel de validité, celui des *ensembles convexes compacts et métrisables* dans un espace vectoriel topologique. Si X est un tel ensemble, nous définirons dans l'ensemble des mesures portées par X une relation d'ordre $\mu \prec \nu$ par les propriétés suivantes dont nous établissons l'équivalence (théorèmes 1 et 2) :

a. Quelle que soit la fonction continue et convexe p sur X , on a

$$\int_X p d\mu \leq \int_X p d\nu;$$

b. Il existe une famille de mesures $(T_x)_{x \in X}$ de masse 1 telle que x soit barycentre de T_x et que

$$\nu = \int_X T_x d\mu(x).$$

c. A toute décomposition $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ de μ , on peut associer au moins une décomposition $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_n$ de ν , où ν_i a même masse totale et même barycentre que μ_i ;

Une variante de la condition a a été introduite par BISHOP et de LEEUW; elle leur a permis de donner des démonstrations très simples des théorèmes d'existence de Choquet affirmant que tout point de X est barycentre d'une mesure portée par l'ensemble des points extrémaux de X . L'équivalence de a et b avait été conjecturée par CHOQUET (cf. [4], p. 339). Par ailleurs, la condition c a été introduite par LOOMIS [7] sous le nom de « strong ordering » et elle a été introduite par cet auteur de donner des démonstrations d'unicité très naturelles dans la théorie de Choquet; Loomis a aussi établi que c entraîne a . Comme l'implication $b \Rightarrow c$ est très facile, notre principale contribution est donc la démonstration que a entraîne b . MOKOBODZKI nous a signalé qu'il a obtenu indépendamment le même résultat; de plus, STRASSEN a établi et publiera prochainement d'intéressantes généralisations de nos résultats.

1. Soit E un espace vectoriel réel, muni d'une topologie séparée et localement convexe, et soit E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E . On considère une partie convexe et compacte X de E , et l'on suppose qu'il existe u_0 dans E' avec $u_0(x) = 1$ pour tout x dans X (1). On notera C l'ensemble des éléments $c \cdot x$ de E , pour c réel positif et x dans X ; étant donnés x_1, \dots, x_n dans C et c_1, \dots, c_n réels positifs, l'élément $c_1 \cdot x_1 + \dots + c_n \cdot x_n$ de E est dans C , c'est-à-dire que C est un cône convexe pointé dans E .

Pour tout espace compact Y , nous noterons $\mathcal{C}(Y)$ l'espace vectoriel (réel) des fonctions continues sur Y à valeurs réelles. On appelle *mesure* sur Y une mesure de Radon positive sur Y ; on peut identifier une telle mesure à une forme linéaire croissante sur $\mathcal{C}(Y)$. L'intégrale d'une fonction f sur Y par rapport à une mesure μ sur Y est notée $\mu(f)$ ou $\int_Y f(y) \cdot d\mu(y)$. La *masse* de la mesure μ est le nombre

$$\mu(1) = \int_Y d\mu(y).$$

Pour toute mesure μ sur X , il existe un point z de C , caractérisé par

$$u(z) = \int_X u(x) \cdot d\mu(x) \quad \text{pour tout } u \text{ dans } E';$$

on dit que z est la *résultante* de μ , notée $r(\mu)$; lorsque μ est de masse 1, on a $r(\mu) \in X$, et $r(\mu)$ s'appelle aussi le *barycentre* de μ .

2. THÉORÈME 1. — *Étant données deux mesures μ et ν sur X , les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. On a $\mu(p) \leq \nu(p)$ pour toute fonction continue et convexe p sur X .

b. Il existe sur $X \times X$ une mesure θ ayant ν pour seconde projection sur X , et vérifiant la relation

$$(1) \quad \int_{X \times X} f(x) \cdot u(y) \cdot d\theta(x, y) = \int_X f(x) \cdot u(x) \cdot d\mu(x)$$

pour f dans $\mathcal{C}(X)$ et u dans E' .

c. Quelles que soient les mesures μ_1, \dots, μ_n sur X , ayant pour somme μ , il existe des mesures ν_1, \dots, ν_n , de somme ν , avec $r(\mu_i) = r(\nu_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

$a \Rightarrow b$: Nous noterons H' le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X \times X)$ constitué par les fonctions de la forme

$$(2) \quad h'(x, y) = g(y)$$

(1) Ceci n'est pas une restriction sur X ; on peut toujours satisfaire à cette condition en remplaçant E par $E \times \mathbf{R}$ et X par $X \times \{1\}$.

avec g continue sur X ; on définit sur H' une forme linéaire J' par $J'(h') = \nu(g)$. Dire qu'une mesure θ sur $X \times X$ admet ν pour seconde projection signifie qu'on a $\theta(h') = J'(h')$ pour h' dans H' .

Par ailleurs, les fonctions de la forme

$$(3) \quad h''(x, y) = \sum_{i=1}^m f_i(x) \cdot u_i(y)$$

avec des f_i dans $\mathcal{C}(X)$ et des u_i dans E' , forment un sous-espace vectoriel H'' de $\mathcal{C}(X \times X)$; on définit une forme linéaire J'' sur H'' par la formule

$$(4) \quad J''(h'') = \int_X h''(x, x) \cdot d\mu(x).$$

Pour qu'une mesure θ sur $X \times X$ satisfasse à (1), il faut et il suffit qu'on ait $\theta(h'') = J''(h'')$ pour h'' dans H'' .

Nous allons établir, en nous appuyant sur la condition a , la propriété suivante : soient deux fonctions $h' \in H'$, $h'' \in H''$, données respectivement par (2) et (3) et telles que $h' \geq h''$; on a alors $J'(h') \geq J''(h'')$. Posons

$$(5) \quad p(y) = \sup_{x \in X} h''(x, y).$$

Cette fonction p sur X est bornée et semi-continue inférieurement, donc intégrable pour toute mesure; désignons par \mathcal{S} l'ensemble des fonctions de la forme

$$(6) \quad q(y) = \sup(h''(x_1, y), h''(x_2, y), \dots, h''(x_n, y))$$

où (x_1, \dots, x_n) parcourt l'ensemble des suites finies d'éléments de X ; chacune de ces fonctions est continue et convexe, d'où $\mu(q) \leq \nu(q)$ sous l'hypothèse a . Mais l'ensemble \mathcal{S} est filtrant croissant et admet p pour enveloppe supérieure, d'où

$$(7) \quad \mu(p) = \sup_{q \in \mathcal{S}} \mu(q), \quad \nu(p) = \sup_{q \in \mathcal{S}} \nu(q)$$

d'après une propriété bien connue des intégrales de Radon; finalement, on a $\mu(p) \leq \nu(p)$. On a évidemment $h''(x, x) \leq p(x)$ pour x dans X , et l'hypothèse $h' \geq h''$ entraîne $p(y) \leq g(y)$ pour tout y dans X ; on en déduit

$$J''(h'') = \int_X h''(x, x) \cdot d\mu(x) \leq \int_X p(x) \cdot d\mu(x) = \mu(p) \leq \nu(p) \leq \nu(g) = J'(h'),$$

c'est-à-dire $J'(h') \geq J''(h'')$. Si l'on suppose maintenant $h' = h''$, on aura aussi $-h' \geq -h''$, d'où $-J'(h') \geq -J''(h'')$ et finalement $J'(h') = J''(h'')$.

On a donc prouvé que J' et J'' coïncident sur $H' \cap H''$. L'ensemble H des fonctions de la forme $h' - h''$ avec $h' \in H'$ et $h'' \in H''$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X \times X)$, et il existe sur H une forme linéaire J définie par $J(h' - h'') = J'(h') - J''(h'')$. Le raisonnement précédent montre qu'on a $J(h) \geq 0$ pour $h \geq 0$ dans H , et il s'ensuit ⁽²⁾ l'existence d'une mesure θ sur $X \times X$ avec $\theta(h) = J(h)$ pour tout h dans H ; en particulier, on a

$$\theta(h') = J'(h') \quad \text{et} \quad \theta(h'') = J''(h''),$$

et l'on a vu que ceci entraîne b .

$b \Rightarrow c$: On suppose que la mesure θ sur $X \times X$ satisfait aux conditions énoncées dans b ; soient μ_1, \dots, μ_n des mesures sur X , de somme μ . D'après le théorème de Radon-Nikodým, il existe des fonctions boréliennes positives f_1, \dots, f_n sur X telles que

$$(8) \quad \mu_i(g) = \int_X f_i(x) \cdot g(x) \cdot d\mu(x) \quad [\forall g \in \mathcal{C}(X)].$$

Après modification éventuelle de ces fonctions sur un ensemble μ -négligeable, on peut supposer qu'on a $f_1 + \dots + f_n = 1$, et qu'il existe des fonctions continues f_{ki} sur X avec $0 \leq f_{ki} \leq 1$ (pour $1 \leq i \leq n$ et $k \geq 1$) et un ensemble μ -négligeable A_i tels que

$$(9) \quad f_i(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{ki}(x) \quad [\forall x \in X - A_i].$$

Ceci étant, on définit des mesures ν_1, \dots, ν_n sur X par

$$(10) \quad \nu_i(g) = \int_{X \times X} f_i(x) \cdot g(y) \cdot d\theta(x, y) \quad [\forall g \in \mathcal{C}(X)].$$

Comme ν est la seconde projection de θ , on a

$$(11) \quad \nu(g) = \int_{X \times X} g(y) \cdot d\theta(x, y) \quad [\forall g \in \mathcal{C}(X)]$$

et la relation $f_1 + \dots + f_n = 1$ entraîne $\nu_1 + \dots + \nu_n = \nu$. Par ailleurs, la relation (1) est valable pour les fonctions continues $f = f_{ki}$, et, en

⁽²⁾ On peut démontrer ce résultat de la manière suivante; pour toute fonction continue f sur $X \times X$, soit $S(f)$ la plus petite constante majorant f ; il est immédiat que S est une fonctionnelle sous-linéaire sur $\mathcal{C}(X \times X)$, et comme on a $1 \in H$, on a $J(h) \leq J(1) \cdot S(h)$ pour h dans H . Le théorème de Hahn-Banach démontre l'existence d'une forme linéaire θ sur $\mathcal{C}(X \times X)$, prolongeant J et telle que $\theta(f) \leq J(1) \cdot S(f)$ pour f dans $\mathcal{C}(X \times X)$; en particulier pour $g \geq 0$ et $f = -g$, on a $S(f) \leq 0$, d'où $\theta(g) \geq 0$, et θ est une mesure sur $X \times X$.

utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on voit que (1) est valable pour $f = f_i$ ⁽³⁾. Utilisant alors (8) et (10), on trouve

$$(12) \quad \int_X u(x) \cdot d\nu_i(x) = \int_X u(x) \cdot d\mu_i(x) \quad [\forall u \in E'],$$

c'est-à-dire $r(\mu_i) = r(\nu_i)$ pour $1 \leq i \leq n$.

$c \Rightarrow a$: Soit p une fonction continue convexe sur X , et soit $\varepsilon > 0$. Comme p est continue et E localement convexe, on peut trouver, pour tout x dans X , un voisinage fermé convexe $U(x)$ de x dans E , tel que

$$(13) \quad |p(y) - p(y')| \leq \varepsilon \quad [\forall y, y' \in U(x) \cap X].$$

Comme X est compact, on peut donc trouver une suite finie (x_1, \dots, x_n) de points de X , telle que les intérieurs des ensembles convexes et compacts $A_i = U(x_i) \cap X$ recouvrent X pour i variant de 1 à n . Comme il est bien connu, on peut alors trouver des fonctions continues positives f_1, \dots, f_n sur X , de somme 1, avec f_i nulle en dehors de A_i ; nous poserons $\mu_i(g) = \mu(f_i g)$ pour g dans $\mathcal{C}(X)$, de sorte que μ est somme des mesures μ_1, \dots, μ_n .

Supposons que l'hypothèse c soit remplie. Il existe donc des mesures ν_1, \dots, ν_n de somme ν et telles que $r(\mu_i) = r(\nu_i)$ pour tout i . Comme le support de la mesure μ_i est contenu dans l'ensemble convexe compact A_i , sa résultante est de la forme $c_i \cdot y_i$ avec y_i dans A_i et $c_i = \mu_i(1) = \mu(f_i)$; utilisant la formule (13) et le fait que f_i est positive et nulle en dehors de A_i , on trouve

$$(14) \quad f_i p \leq f_i \cdot p(y_i) + \varepsilon f_i.$$

Par intégration par rapport à μ , on a

$$(15) \quad \mu_i(p) = \mu(f_i p) \leq \mu(f_i) \cdot p(y_i) + \varepsilon \cdot \mu(f_i) = c_i \cdot p(y_i) + \varepsilon \cdot \mu(f_i).$$

Mais la mesure ν_i a pour résultante $c_i \cdot y_i$, et comme p est convexe, on a donc (inégalité de Jensen) :

$$(16) \quad \nu_i(p) \geq c_i \cdot p(y_i).$$

D'après (15), on a par suite

$$(17) \quad \mu_i(p) \leq \nu_i(p) + \varepsilon \cdot \mu(f_i).$$

Additionnant les inégalités obtenues pour $i = 1, 2, \dots, n$, on obtient $\mu(p) \leq \nu(p) + \varepsilon \cdot \mu(1)$, et faisant tendre ε vers zéro, on a

$$\mu(p) \leq \nu(p).$$

C. Q. F. D.

⁽³⁾ Faisant $u = u_0$ dans (1), on voit que μ est la première projection de θ , d'où $\theta(A_i \times X) = \mu(A_i) = 0$. On peut alors remplacer f par f_{ki} dans (1), puis passer à la limite sur k .

3. Nous utiliserons au n° 4 l'équivalence des conditions a et b du théorème 1 pour préciser sur certains points la théorie de CHOQUET (cf. [4] et [5]). Auparavant, nous aurons à faire quelques rappels.

Notons \mathfrak{S} l'ensemble des fonctions continues et convexes sur X , et V l'ensemble des fonctions de la forme $p_1 - p_2$ avec p_1 et p_2 dans \mathfrak{S} ; il est immédiat que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X)$, séparant les points de X , car il contient les restrictions à X des formes linéaires continues sur E ; de plus, pour $f = p_1 - p_2$ dans V , on a

$$|f| = 2 \sup(p_1, p_2) - (p_1 + p_2),$$

d'où $|f| \in V$. D'après un théorème bien connu de Stone (cf. [2], p. 55), V est dense dans $\mathcal{C}(X)$ pour la topologie de la convergence uniforme. On en déduit facilement que, si une fonctionnelle J sur \mathfrak{S} à valeurs réelles jouit des propriétés

$$(18) \quad \begin{cases} J(p_1 + p_2) = J(p_1) + J(p_2), \\ J(c.p) = c.J(p) \quad \text{pour } c \geq 0, \\ J(p_1) \geq J(p_2) \quad \text{pour } p_1 \geq p_2, \end{cases}$$

il existe une mesure ν sur X et une seule avec $J(p) = \nu(p)$ pour p dans \mathfrak{S} .

Selon CHOQUET, on définit sur l'ensemble des mesures une relation d'ordre, notée $\mu \prec \nu$, qui signifie « $\mu(p) \leq \nu(p)$ pour tout p dans \mathfrak{S} »; la seule vérification non évidente est celle que « $\mu \prec \nu$ et $\nu \prec \mu$ » entraîne $\mu = \nu$, mais ceci résulte de l'alinéa précédent car « $\mu(p) = \nu(p)$ pour tout p dans \mathfrak{S} » entraîne $\mu = \nu$. Par ailleurs, soit I un ensemble préordonné *filtrant*, et $i \rightarrow \mu_i$ une application de I dans l'ensemble des mesures telle que $i \leq j$ entraîne $\mu_i \prec \mu_j$; comme les constantes 1 et -1 appartiennent à \mathfrak{S} , toutes les mesures μ_i ont même masse m ; pour p dans \mathfrak{S} , il existe une constante c avec $p \leq c$, et l'on a

$$(19) \quad \mu_i(p) \leq \mu_j(p) \leq m.c \quad \text{pour } i \leq j.$$

On peut alors poser

$$J(p) = \sup_{i \in I} \mu_i(p)$$

et la fonctionnelle J sur \mathfrak{S} satisfait à (18); il existe donc une mesure ν avec $\nu(p) = J(p)$ pour tout p dans \mathfrak{S} ; il est clair que ν est la *borne supérieure* de l'ensemble des mesures μ_i pour i dans I .

On dit qu'une mesure μ est *maximale* s'il n'existe aucune mesure μ' distincte de μ , avec $\mu \prec \mu'$. Comme tout ensemble filtrant croissant de mesures a une borne supérieure, le théorème de Zorn montre que, pour toute mesure μ , il existe une mesure maximale ν avec $\mu \prec \nu$.

4. Dans ce numéro, nous supposons que l'espace compact X est *métrisable*. Il est bien connu que l'ensemble B des points extrémaux

de X est intersection d'une famille dénombrable de parties ouvertes de X ; on sait aussi qu'une mesure μ sur X est maximale si et seulement si $\mu(X - B) = 0$.

Nous appellerons *dilatation* T sur X la donnée, pour tout x dans X , d'une mesure T_x sur X de masse 1 et de barycentre x , de sorte que la fonction $x \rightarrow T_x(f)$ sur X soit borélienne pour toute fonction continue f sur X . Pour toute mesure μ sur X , on peut alors définir une mesure $\nu = T\mu$ sur X par la relation

$$(20) \quad \nu(f) = \int_X T_x(f) \cdot d\mu(x)$$

pour f dans $\mathcal{C}(X)$. On montre facilement que, pour f borélienne et bornée sur X , la fonction $x \rightarrow T_x(f)$ est borélienne et bornée, et que la relation (20) est encore valable.

THÉORÈME 2. — *Supposons X métrisable, et soient μ et ν deux mesures sur X ; on a $\mu \prec \nu$ si et seulement s'il existe une dilatation T sur X telle que $\nu = T\mu$.*

Soient T une dilatation, μ une mesure sur X et p une fonction continue et convexe sur X . Comme x est le barycentre de la mesure T_x de masse 1, l'inégalité de Jensen donne $p(x) \leq T_x(p)$, d'où

$$(T\mu)(p) = \int_X T_x(p) \cdot d\mu(x) \geq \int_X p(x) \cdot d\mu(x) = \mu(p)$$

ou encore $\mu \prec T\mu$.

Réciproquement, supposons qu'on ait $\mu \prec \nu$. Soit θ une mesure sur $X \times X$ ayant les propriétés énoncées dans le théorème 1, *b*. Si l'on fait $u = u_0$ dans (1), on trouve

$$(21) \quad \int_{X \times X} f(x) \cdot d\theta(x, y) = \mu(f) \quad [\forall f \in \mathcal{C}(X)],$$

ce qui exprime que μ est la première projection de θ . D'après le théorème de désintégration des mesures (cf. [3], p. 58), il existe une famille $(T'_x)_{x \in X}$ de mesures de masse 1 sur X , telle que la fonction $x \rightarrow T'_x(f)$ sur X soit borélienne pour f continue sur X , et vérifiant la relation

$$(22) \quad \int_{X \times X} f(x) \cdot g(y) \cdot d\theta(x, y) = \int_X f(x) \cdot T'_x(g) \cdot d\mu(x)$$

pour f et g continues sur X .

Comme X est métrisable, il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E' séparant les points de X ; si r_x est le barycentre de T'_x , on a donc

$T'_x(u_n) = u_n(r_x)$; si l'on fait $g = u_n$ dans (22) et qu'on utilise (1), on trouve

$$(23) \quad \int_X f(x) \cdot [u_n(r_x) - u_n(x)] \cdot d\mu(x) = 0 \quad [\forall f \in \mathcal{C}(X)].$$

Il existe par suite un ensemble borélien $P_n \subset X$ avec $\mu(P_n) = 0$ et $u_n(r_x) = u_n(x)$ pour x dans $X - P_n$; posons

$$P = \bigcup_{n \geq 1} P_n, \quad \text{d'où } \mu(P) = 0;$$

pour x dans $X - P$, on aura alors $r_x = x$ puisque la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ sépare les points de X . Si l'on pose

$$T_x = T'_x \quad \text{pour } x \text{ dans } X - P$$

et

$$T_x = \varepsilon_x \quad (\text{masse } 1 \text{ au point } x) \quad \text{pour } x \text{ dans } P,$$

on obtient une dilatation T dans X . On peut remplacer T'_x par T_x dans (22); si l'on pose $f = 1$, on trouve alors

$$(24) \quad \nu(g) = \int_{X \times X} g(y) \cdot d\theta(x, y) = \int_X T_x(g) \cdot d\mu(x) \quad [\forall g \in \mathcal{C}(X)]$$

car ν est la seconde projection de θ . On a donc prouvé $\nu = T\mu$.

C. Q. F. D.

Ajoutons un complément au théorème 2. Soient μ une mesure sur X et ν une mesure *maximale* telle que $\mu \prec \nu$; on peut donc trouver une dilatation T sur X telle que $T\mu = \nu$. Considérons la fonction borélienne f sur X égale à 0 en tout point extrémal de X et à 1 en tout autre point; d'après la formule (20), on a donc

$$(25) \quad \nu(X - B) = \int_X T_x(X - B) \cdot d\mu(x).$$

Comme ν est maximale, on a $\nu(X - B) = 0$, et par conséquent, on a $T_x(X - B) = 0$ pour μ -presque tout x ; autrement dit, *la mesure T_x est maximale pour μ -presque tout x .*

5. Pour terminer, nous indiquerons le lien de nos résultats avec ceux de LOMIS [7]; ce qui suit est un résumé des principaux énoncés de LOMIS; une fois démontrée l'équivalence des conditions *a* et *c* du théorème 1, les assertions de LOMIS peuvent s'établir très facilement.

a. Soit z un élément du cône convexe C de base X . Une *subdivision* de z est une suite $\delta = (z_1, \dots, z_m)$ d'éléments de C , ayant z pour somme;

si $\delta' = (z'_1, \dots, z'_n)$ est une autre subdivision de z , on écrit $\delta \leq \delta'$ s'il existe une partition (I_1, \dots, I_m) de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ avec $z_i = \sum_{j \in I_i} z'_j$ pour $1 \leq i \leq m$. On définit ainsi une relation de préordre sur l'ensemble $\sigma(z)$ des subdivisions de z . A toute subdivision δ de z , on associe une mesure m_δ sur X , de résultante z , par la formule

$$(26) \quad m_\delta(f) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot f(x_i) \quad [\forall f \in \mathcal{C}(X)]$$

si $\delta = (c_1 \cdot x_1, \dots, c_m \cdot x_m)$, avec des nombres positifs c_1, \dots, c_m et des éléments x_1, \dots, x_m de X .

b. Soit μ une mesure sur X , de résultante z ; pour toute décomposition $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_n$ de μ en somme de mesures, la suite $(r(\mu_1), \dots, r(\mu_n))$ est une subdivision de z ; on note $S(\mu)$ l'ensemble de ces subdivisions de z . Soient δ, δ' des subdivisions de z , et μ, μ' des mesures de résultante z ; en utilisant le théorème 1, on obtient les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} m_\delta \prec \mu &\iff \delta \in S(\mu), & \delta \leq \delta' &\iff m_\delta \prec m_{\delta'}, \\ \mu \prec \mu' &\iff S(\mu) \subset S(\mu'). \end{aligned}$$

En particulier, la dernière de ces équivalences exprime que la relation d'ordre de Choquet est identique au « strong ordering » de Loomis.

c. On dit qu'un ensemble S de subdivisions de z est *décomposable* (« s-Boolean set on z ») si, pour δ et δ' dans S , il existe δ'' dans S avec $\delta \leq \delta''$ et $\delta' \leq \delta''$. Muni de la relation de préordre \leq , S est un ensemble filtrant, et l'on a $m_\delta \prec m_{\delta'}$ pour $\delta \leq \delta'$; d'après le n° 3, on peut définir la borne supérieure m_S de la famille $(m_\delta)_{\delta \in S}$ de mesures. En particulier, pour toute mesure μ de résultante z , l'ensemble $S(\mu)$ est décomposable, et l'on a $m_{S(\mu)} = \mu$. On dit que S est *compatible avec μ* si l'on a $S \subset S(\mu)$; ceci équivaut à $m_\delta \prec \mu$ pour tout δ dans S , ou encore à $m_S \prec \mu$.

d. D'après le théorème de Zorn, tout ensemble décomposable de subdivisions de z est contenu dans un ensemble décomposable *maximal*. Pour qu'un ensemble décomposable S de subdivisions de z soit maximal, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $S = S(\mu)$ avec une mesure μ maximale; on a alors $\mu = m_S$. En particulier, si le cône C est réticulé, l'ensemble $\sigma(z)$ de toutes les subdivisions de z est décomposable d'après le lemme de décomposition de F. Riesz; dans ce cas, il existe donc une mesure maximale unique de résultante z (« théorème d'unicité de Choquet »).

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] BLACKWELL (D.). — Comparison of experiments, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability* [1950. Berkeley]; p. 93-102. — Berkeley, Los Angeles, University of California Press, 1951.
- [2] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*. Chap. 10. — Paris, Hermann, 1961, (Act. scient. et ind., 1084; Bourbaki, 10).
- [3] BOURBAKI (N.). — *Intégration*. Chap. 6. — Paris, Hermann, 1959, (Act. scient. et ind., 1281; Bourbaki, 25).
- [4] CHOQUET (G.). — Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 10, 1960, p. 333-344.
- [5] CHOQUET (G.) et MEYER (P.-A.). — Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13, 1962, p. 139-154.
- [6] HARDY (G. H.), LITTLEWOOD (J. E.) and POLYÁ (G.). — *Inequalities*, 2nd ed. — Cambridge, Cambridge University Press, 1952.
- [7] LOOMIS (L. H.). — Unique direct integral decompositions on convex sets, *Amer. J. of Math.*, t. 84, 1962, p. 509-526.
- [8] SHERMAN (S.). — On a theorem of Hardy, Littlewood, Polyá, and Blackwell, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 37, 1951, p. 826-831.

(Manuscrit reçu le 20 décembre 1963.)

P. CARTIER et P.-A. MEYER,
Département de Mathématiques,
Université de Strasbourg,
Strasbourg (Bas-Rhin).

J. M. G. FELL,
Department of Mathematics,
University of Washington,
Seattle 5, Wash. (États-Unis).
