BULLETIN DE LA S. M. F.

L. BEGUERI
G. POITON

« Diagram-chasing » dans les catégories abéliennes

Bulletin de la S. M. F., tome 93 (1965), p. 323-332
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1965__93__323_0>

Bull. Soc. math. France,
93, 1965, p. 323 à 332.

« DIAGRAM-CHASING » DANS LES CATÉGORIES ABÉLIENNES ;

PAR

LUCILE BÉGUERI ET GEORGES POITOU [1].

Le procédé de « diagram-chasing » consiste à observer des relations entre divers objets ou flèches d'un complexe double (ou multiple); on montre ici que tout complexe double sécrète des flèches de trois types simples reliant l'homologie des lignes et des colonnes et la « bihomologie» du complexe, et que les principaux résultats connus de « diagram-chasing » s'obtiennent par la combinaison des propriétés des flèches élémentaires.

Ces flèches élémentaires peuvent être définies dans des catégories assez générales; leurs propriétés d'exactitude dans la catégorie des groupes commutatifs se transportent aux catégories abéliennes, grâce au théorème de plongement de celles-ci dans celle-là; ce sont ces propriétés d'exactitude qui fournissent les lemmes habituels (lemme des cinq, lemme du serpent, définition de cobords, etc.) dont une revue est passée à la fin de l'article.

1. Remarques sur les noyaux et les images.

On sait [3] que le noyau et le conoyau d'une flèche quelconque peuvent être définis (sans que leur existence soit assurée) dans une catégorie où il existe un système de flèches nulles, c'est-à-dire une application de l'ensemble des couples d'objets dans l'ensemble des flèches telle que l'ensemble de ses valeurs soit globalement stable par multiplication (à droite ou à gauche) par une flèche quelconque. Supposons donc donnée une catégorie J où il existe un tel système ω (nécessairement unique); nous noterons encore ω toute flèche nulle, c'est-à-dire toute valeur de l'application ω.

---

[1] L'un des auteurs a bénéficié des entretiens qu'il a eus avec André BLANCHARD.

On rappelle [2] que le *noyau* d'une flèche u (s'il existe) est un objet x muni d'une flèche $\vec{x}$ dont la source est x et le but la source de u, cette flèche étant telle que $u\vec{x} = \omega$, et universelle pour cette propriété, ce qui signifie que pour toute flèche v telle que $uv = \omega$, il existe une flèche unique w telle que $\vec{x}w = v$; il en résulte que $\vec{x}$ est un monomorphisme; on notera d'habitude le monomorphisme associé à un noyau par la même lettre que celui-ci, fléchée; à défaut d'autres notations, on utilise : $\operatorname{Ker} u$, $\overrightarrow{\operatorname{Ker}}\, u$.

Le noyau d'une flèche dépend fonctoriellement de celle-ci, au sens suivant :

LEMME 1. — *Pour tout diagramme commutatif* (1), *si les noyaux utiles existent, il existe une flèche unique w rendant commutatif le diagramme* (2) :

$$(1)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ C & \xrightarrow[v]{} & D \end{array} \qquad\qquad (2)\quad \begin{array}{ccc} \operatorname{Ker} u & \xrightarrow{\overrightarrow{\operatorname{Ker}}\, u} & A \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ \operatorname{Ker} v & \xrightarrow[\overrightarrow{\operatorname{Ker}}\, v]{} & C \end{array}$$

Il y a un lemme analogue pour les *conoyaux* (notation : Cok; on fait la convention analogue de désigner l'épimorphisme associé à un conoyau par la même lettre que celui-ci, fléchée).

COROLLAIRE 1. — *Si le produit uv de deux flèches u et v existe et possède un noyau ainsi que u, il existe une flèche unique w :* $\operatorname{Ker} uv \to \operatorname{Ker} u$ *telle que* $\left(\overrightarrow{\operatorname{Ker}}\, u\right) w = v\left(\overrightarrow{\operatorname{Ker}}\, uv\right)$.

COROLLAIRE 2. — *Si le produit uv de deux flèches u et v existe et possède un noyau ainsi que v, il existe une flèche unique w :* $\operatorname{Ker} v \to \operatorname{Ker} uv$ *telle que* $\left(\overrightarrow{\operatorname{Ker}}\, uv\right) w = \overrightarrow{\operatorname{Ker}}\, v$.

On obtient la preuve des deux corollaires en spécialisant le diagramme (1) ainsi (ε désigne une flèche neutre) :

$$(\text{Cor. } 1)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{uv} & B \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} \\ C & \xrightarrow[u]{} & B \end{array} \qquad\qquad (\text{Cor. } 2)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v} & B \\ {\scriptstyle \varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u} \\ A & \xrightarrow[uv]{} & D \end{array}$$

L'*image* d'une flèche u est le noyau du conoyau de u (s'ils existent); elle est notée $\operatorname{Im} u$ à défaut d'une autre lettre; de toute façon, elle est la source d'un monomorphisme dont le but est le but de u, et ce monomorphisme peut être noté par la même lettre que l'image, mais fléchée.

LEMME 2. — *Pour tout diagramme commutatif* (1), *si les images utiles existent, il existe une flèche unique* w *rendant commutatif le diagramme* (2) :

$$(1)\quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & B \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ C & \xrightarrow[v]{} & D \end{array} \qquad\qquad (2)\quad \begin{array}{ccc} \operatorname{Im} u & \xrightarrow{\overrightarrow{\operatorname{Im}} u} & B \\ {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ \operatorname{Im} v & \xrightarrow[\overrightarrow{\operatorname{Im}} v]{} & D \end{array}$$

COROLLAIRE 1. — *Si le produit* uv *de deux flèches* u *et* v *existe et possède une image ainsi que* u, *il existe une flèche unique* w : $\operatorname{Im} uv \to \operatorname{Im} u$, *telle que* $\left(\overrightarrow{\operatorname{Im}} u\right) w = \overrightarrow{\operatorname{Im}} uv$.

COROLLAIRE 2. — *Si le produit* uv *de deux flèches* u *et* v *existe et possède une image ainsi que* v, *il existe une flèche unique* w : $\operatorname{Im} v \to \operatorname{Im} uv$, *telle que* $\left(\overrightarrow{\operatorname{Im}} uv\right) w = u\left(\overrightarrow{\operatorname{Im}} v\right)$.

COROLLAIRE 3. — *Si l'image de la flèche* u *existe, il existe une flèche unique, notée* $\bar{u}$, *telle que* $\left(\overrightarrow{\operatorname{Im}} u\right) \bar{u} = u$.

LEMME 3. — *Pour tout couple* (u, v) *de flèches tel que* $uv = \omega$, *il existe une flèche unique* w : $\operatorname{Im} v \to \operatorname{Ker} u$, *telle que* $\left(\overrightarrow{\operatorname{Ker}} u\right) w = \overrightarrow{\operatorname{Im}} v$.

En effet, il existe une flèche unique x telle que $u = x\left(\overrightarrow{\operatorname{Cok}} v\right)$, et l'on applique le corollaire 2 du lemme 1.

2. Flèches produites par les complexes doubles.

Soit J une catégorie où existent un système de flèches nulles, les noyaux et conoyaux, les produits et sommes finies.

Soit $\mathcal{A}$ un double complexe de J dont les éléments seront notés ainsi : les indices décrivant les entiers rationnels, on note $A_{i,j}$ les objets du complexe, et

$$d_{i,j} : \quad A_{i,j} \to A_{i,j+1}, \qquad \partial_{i,j} : \quad A_{i,j} \to A_{i+1,j}$$

les flèches du complexe; il est entendu qu'on a les relations

$$d_{i,j+1} d_{i,j} = 0, \qquad \partial_{i+1,j} \partial_{i,j} = 0,$$

et les relations de commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} A_{i,j} & \xrightarrow{d_{i,j}} & A_{i,j+1} \\ {\scriptstyle \partial_{i,j}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \partial_{i,j+1}} \\ A_{i+1,j} & \xrightarrow[d_{i+1,j}]{} & A_{i+1,j+1} \end{array}$$

Convention typographique. — Nous aurons très souvent à écrire les couples d'indices (i, j), $(i, j+1)$, $(i+1, j)$; nous nous permettrons de les remplacer respectivement par l'absence de signe, un simple accent, un double accent; exemple :

$$A = A_{i,j}, \qquad A' = A_{i,j+1}, \qquad A'' = A_{i+1,j}.$$

Notations relatives aux noyaux :

$z = \operatorname{Ker} d$, $\vec{z} : z \to A$, flèche canonique;

$\zeta = \operatorname{Ker} \delta$, $\vec{\zeta} : \zeta \to A$, flèche canonique;

$Z = \vec{z} \wedge \vec{\zeta}$ (produit fibré de z et ζ au-dessus de A); désignons par $\vec{Z}$ la flèche canonique de Z dans A;

$m : Z \to z$, $\mu : Z \to \zeta$, projections canoniques du produit fibré, telles que $\vec{z}m = \vec{Z}$, $\vec{\zeta}\mu = \vec{Z}$;

$t : z \to z''$, $\tau : \zeta \to \zeta'$, flèches définies par le lemme 1, caractérisées par les identités

$$\vec{z}''t = \delta\vec{z}, \qquad \vec{\zeta}'\tau = d\vec{\zeta}.$$

Notations relatives aux images :

$b = \operatorname{Im} d_{i,j-1}$, $\quad \vec{b} : b \to A$, flèche canonique;

$\beta = \operatorname{Im} \delta_{i-1,j}$, $\quad \vec{\beta} : \beta \to A$, flèche canonique;

$B = \operatorname{Im} d_{i,j-1}\, \delta_{i-1,j-1}$, $\vec{B} : B \to A$, flèche canonique;

$n : B \to b$, $\nu : B \to \beta$, flèches définies par le corollaire 1 du lemme 2 et caractérisées par les identités $\vec{b}n = \vec{B}$, $\vec{\beta}\nu = \vec{B}$;

$a : b \to B''$, $\alpha : \beta \to B'$, flèches définies par le corollaire 2 du lemme 2 et caractérisées par les identités $\vec{B}''a = \delta\vec{b}$, $\vec{B}'\alpha = d\vec{\beta}$.

Notations mixtes :

$k : b \to z$, $\varkappa : \beta \to \zeta$, flèches définies par le lemme 3 et caractérisées par les identités $\vec{z}k = \vec{b}$, $\vec{\zeta}\varkappa = \vec{\beta}$.

Observons que z s'envoie par t dans z'' et par $\varkappa''\bar{\delta}\vec{z}$ dans ζ'', de façon compatible avec $\vec{z}'' : z'' \to A''$ et $\vec{\zeta}'' : \zeta'' \to A''$; donc il existe des flèches uniques

$$s : \; z \to Z'', \qquad \sigma : \; \zeta \to Z'$$

telles que $m''s = t$, $\mu''s = \varkappa''\bar{\delta}\vec{z}$; $m'\sigma = k'\,\bar{d}\,\vec{\zeta}$, $\mu'\sigma = \tau$.

Observons encore que B s'envoie par kn dans z et par $\varkappa\nu$ dans ζ, de façon compatible avec $\vec{z}$ et $\vec{\zeta}$; donc il existe une flèche unique

$$K: \quad B \to Z$$

telle que $mK = kn$, $\mu K = \varkappa\nu$.

Posons enfin

$$h = \mathrm{Cok}\, k, \qquad \eta = \mathrm{Cok}\, \varkappa, \qquad H = \mathrm{Cok}\, K,$$

$\vec{h}$, $\vec{\eta}$, $\vec{H}$ désignant les flèches canoniques correspondantes. Nous dirons que ces objets constituent respectivement *l'homologie des lignes, l'homologie des colonnes* et *la bihomologie* ([2]) du bicomplexe donné, pour les indices (i, j).

Flèches du premier type (*bihomologie dans homologie*). — Le lemme 1 pour les conoyaux fournit à partir du diagramme commutatif (1) suivant une unique flèche $f: H \to h$ rendant commutatif le diagramme (2) suivant :

$$(1) \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "K"] \arrow[d, "n"'] & Z \arrow[d, "m"] \\ b \arrow[r, "k"'] & z \end{tikzcd} \qquad\qquad (2) \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\vec{H}"] \arrow[d, "m"'] & H \arrow[d, "f"] \\ z \arrow[r, "\vec{h}"'] & h \end{tikzcd}$$

Autrement dit, la flèche $f: H \to h$ est caractérisée par l'identité $f\vec{H} = \vec{h}m$; de même il existe une unique flèche $\varphi : H \to \eta$, caractérisée par l'identité $\varphi\vec{H} = \vec{\eta}\mu$.

Flèches du second type (*homologie dans bihomologie*). — Le même raisonnement définit une flèche $g: h \to H''$ à partir des diagrammes suivants :

$$(1) \quad \begin{tikzcd} b \arrow[r, "k"] \arrow[d, "a"'] & z \arrow[d, "s"] \\ B'' \arrow[r, "K''"'] & Z'' \end{tikzcd} \qquad\qquad (2) \quad \begin{tikzcd} z \arrow[r, "\vec{h}"] \arrow[d, "s"'] & h \arrow[d, "g"] \\ Z'' \arrow[r, "\vec{H''}"'] & H'' \end{tikzcd}$$

autrement dit par l'identité $g\vec{h} = \vec{H}''s$ (la vérification de $sk = K''a$ est aisée); de même une flèche $\psi : \eta \to H'$ est définie par l'identité $\psi\vec{\eta} = \vec{H}'\sigma$.

Les flèches des deux premiers types fournissent des complexes :

Proposition 1. — Les diagrammes suivants sont des complexes :

$$H \xrightarrow[f]{} h \xrightarrow[g]{} H'' \qquad\qquad H \xrightarrow[\varphi]{} \eta \xrightarrow[\psi]{} H'$$

([2]) Il existe, outre cette espèce de bihomologie, une notion duale.

Preuve. — Comme $\vec{H}$ est un épimorphisme, il suffit de prouver que $gf\vec{H} = \omega$; or

$$gf\vec{H} = g\vec{h}m = \vec{H}''sm,$$

et il suffit de prouver que $sm = \omega$, ou même que $\vec{Z}''sm = \omega$, puisque $\vec{Z}''$ est un monomorphisme; or

$$\vec{Z}''sm = \vec{z}''m''sm = \vec{z}''tm = \delta\vec{z}m = \delta\vec{\zeta}\mu = \omega.$$

Proposition 2. — Les diagrammes suivants sont des complexes :

$$h \xrightarrow{g} H'' \xrightarrow{\varphi''} \eta'' \qquad \eta \xrightarrow{\psi} H' \xrightarrow{f'} h'$$

Preuve.

$$\varphi''g\vec{h} = \varphi''\vec{H}''s = \vec{\eta}''\mu''s = \vec{\eta}''\varkappa''\overline{\delta}\vec{z} = \omega.$$

Flèches du troisième type (*dans l'homologie des complexes de la proposition* 2). — Désignons par C et Γ respectivement l'homologie des complexes de la proposition 2, et par $\vec{C} : \operatorname{Ker}\varphi'' \rightarrow C$, $\vec{\Gamma} : \operatorname{Ker} f' \rightarrow \Gamma$ les épimorphismes correspondants; ce sont les conoyaux de flèches notées $L : \operatorname{Im} g \rightarrow \operatorname{Ker}\varphi''$, $\Lambda : \operatorname{Im}\psi \rightarrow \operatorname{Ker} f'$; désignons encore par Y le noyau de $d''\delta = \delta'd$, par $\vec{Y}$ le monomorphisme canonique de Y dans A, et construisons des flèches canoniques de Y dans C et Γ.

Il existe des flèches $w : Y \rightarrow z''$ et $\chi : Y \rightarrow \zeta''$ définies, la première par l'identité $\vec{z}''w = \delta\vec{Y}$ (corollaire 1 du lemme 1), la seconde par $\chi = \varkappa''\,\dot{\delta}\,\vec{Y}$ et compatibles avec $\vec{z}''$ et $\vec{\zeta}''$; donc il existe une flèche unique $W : Y \rightarrow Z''$ telle que $m''W = w$, $\mu''W = \chi$; c'est aussi l'unique flèche telle que $\vec{Z}''W = \delta\vec{Y}$.

La flèche $\vec{H}''W : Y \rightarrow H''$, composée avec $\varphi'' : H'' \rightarrow \eta''$, donne ω; en effet, $\varphi''\vec{H}''W = \vec{\eta}''\mu''W = \vec{\eta}''\chi = \vec{\eta}''\varkappa''\overline{\delta}\vec{Y} = \omega$; donc il existe une flèche unique $v : Y \rightarrow \operatorname{Ker}\varphi''$, telle que $(\overrightarrow{\operatorname{Ker}\varphi''})v = \vec{H}''W$; ceci fournit une flèche

$$\vec{C}v : \quad Y \rightarrow C.$$

Montrons que cette flèche donne ω, si on la compose avec les flèches $y : z \rightarrow Y$ et $\upsilon : \zeta \rightarrow Y$ définies respectivement par les identités $\vec{Y}y = \vec{z}$, $\vec{Y}\upsilon = \vec{\zeta}$ (corollaire 2 du lemme 1). En effet :

1° $\vec{C}vy = \vec{C}Lg\vec{h} = \omega$; en effet, $\vec{Z}''Wy = \delta\vec{Y}y = \delta\vec{z} = \vec{Z}''s$, donc $Wy = s$, donc

$$(\overrightarrow{\operatorname{Ker}\varphi''})\,L\bar{g}\vec{h} = g\vec{h} = \vec{H}''s = \vec{H}''Wy = (\overrightarrow{\operatorname{Ker}\varphi''})\,vy,$$

donc $L\bar{g}\vec{h} = vy$.

2° $\vec{C}v\upsilon = \omega$ car $(\overrightarrow{\mathrm{Ker}\,\varphi''})v\upsilon = \omega$, ce qui résulte de $(\overrightarrow{\mathrm{Ker}\,\varphi''})v\upsilon = \vec{H}''W\upsilon$ et de ce que $\vec{Z}''W\upsilon = \delta\vec{Y}\upsilon = \delta\vec{\zeta} = \omega$.

D'autre part, les flèches y et υ commutent avec les flèches m et μ, car $\vec{Y}ym = \vec{z}m = \vec{Z} = \vec{\zeta}\mu = \vec{Y}\upsilon\mu$; donc elles produisent une flèche M de la somme amalgamée $m \vee \mu$ de z et ζ au-dessous de Z dans Y, et cette flèche M, composée avec $\vec{C}v$, donne ω, ce qui produit une flèche dans C du conoyau de M :

$$c : \quad \mathrm{Cok}\,M \to C.$$

On définit de même une flèche

$$\gamma : \quad \mathrm{Cok}\,M \to \Gamma.$$

Les flèches c et γ sont les flèches élémentaires du troisième type.

Proposition 3. — Les flèches élémentaires f, φ, g, ψ, c, γ dépendent fonctoriellement du complexe double $\mathfrak{A}$, en ce sens qu'elles commutent avec les flèches canoniques convenables déduites d'un morphisme de complexes doubles.

3. Cas de la catégorie des groupes commutatifs.

Les noyaux et les images se décrivent dans ce cas selon les procédés usuels; en particulier $Z = z \cap \zeta$.

Les flèches élémentaires des deux premiers types se décrivent ainsi :

$$\begin{aligned} f(x+B) &= x + b && (x \in Z),\\ \varphi(x+B) &= x + \beta && (x \in Z),\\ g(x+b) &= \delta x + B'' && (x \in z),\\ \psi(x+\beta) &= dx + B' && (x \in \zeta). \end{aligned}$$

Proposition 4. — Les complexes de la proposition 1 sont des suites exactes.

Preuve. — Montrons, par exemple, que le complexe $H \xrightarrow[f]{} h \xrightarrow[g]{} H''$ est une suite exacte; soit x un élément de z représentant la classe $x + b$ de h, telle que $g(x+b) = 0$; alors $\delta x + B'' = 0$, donc il existe dans $A_{i,j-1}$ un élément ξ tel que $\delta x = \delta d_{i,j-1}(\xi)$; substituons $x - d_{i,j-1}(\xi)$ à x; alors $\delta x = 0$, donc $x \in Z$ et $x + b = f(x+B)$, donc la classe $x + b$ est dans l'image de f.

Proposition 5. — Les flèches $c : \mathrm{Cok}\,M \to C$ et $\gamma : \mathrm{Cok}\,\mathrm{M} \to \Gamma$ sont des isomorphismes.

Preuve. — Déterminons par exemple le noyau de $\vec{C}v : Y \to C$. Soit x un élément de Y tel que $\vec{C}v(x) = 0$, c'est-à-dire un élément de A tel que $d''\partial x = 0$ et $\partial x + B'' \in \operatorname{Im} g$; soit ξ un élément de z tel que

$$\partial x + B'' = g(\xi + b) = \partial\xi + B'';$$

soit X un élément de $A_{i,j-1}$ tel que $\partial(x - \xi) = \partial\, d_{i,j-1}(X)$; substituons $x - d_{i,j-1}(X)$ à x; alors $\partial(x - \xi) = 0$, donc x appartient à $z + \zeta$.

Observons que le groupe $z + \zeta$ n'est autre que la somme amalgamée $m \vee \mu$ de z et ζ au-dessous de $Z = z \cap \zeta$, donc est contenu dans le noyau de $\vec{C}v$ d'après le paragraphe 2; comme on vient de voir qu'il le contient, il est prouvé que c est un isomorphisme.

Corollaire. — *Les complexes de la proposition* 2 *ont des homologies isomorphes par la flèche* $\gamma^{-1}c : \Gamma \to C$.

4. Cas des catégories abéliennes.

Pour toute catégorie abélienne J, il existe un foncteur exact et fidèle F de J dans la catégorie **Ab** des groupes commutatifs [1], [4]. L'exactitude de F montre que F commute à la formation du noyau, du conoyau, de l'image, donc de l'homologie d'un complexe. Sa fidélité montre alors qu'un complexe transformé par F en une suite exacte est une suite exacte.

Il en résulte aussitôt que les propositions 4 et 5, ainsi que le corollaire de cette dernière, s'étendent de la catégorie des groupes commutatifs à toutes les catégories abéliennes.

5. Applications.

A titre d'exemples, on donne ici diverses conséquences des propositions 4 et 5; les premières, de caractère préparatoire, résument des raisonnements élémentaires souvent utiles; suivent des applications usuelles.

Les énoncés sont munis de titres imagés qui ne sont littéralement vrais que sous quelques précisions; par exemple, si les colonnes sont toujours exactes; des hypothèses précises sont indiquées à la suite.

Recette 1 (*Nullité de la bihomologie*). — La nullité de h, η'', H' entraîne celle de H''.

Preuve. — La nullité de H' entraîne celle de Γ, le corollaire de la proposition 5 celle de C, qui s'identifie à H'' si h et η'' sont nuls.

Recette 2 (*Identification de la bihomologie en diagonale*). — La nullité de h, h', η, η'' entraîne l'identification de H' et H''.

Preuve. — $H' = C$ et $H'' = \Gamma$, et il suffit d'appliquer le corollaire de la proposition 5.

Recette 3 (*Au-dessous d'une ligne de* o, *identification de l'homologie de la ligne et de la bihomologie du dessous*). — La nullité de $A_{i-1,j}$, $A_{i-1,j+1}$, $A_{i-1,j+2}$, η, η'', η' entraîne l'identification par g de H'' à h.

Preuve. — La recette 1 entraîne la nullité de H', donc de Γ, donc l'exactitude de

$$0 \xrightarrow[f]{} h \xrightarrow[g]{} H'' \xrightarrow[\varphi'']{} 0$$

Recette 4 (*Au-dessus d'une ligne de* o, *identification de l'homologie de la ligne et de la bihomologie*). — La nullité de $A_{i+1,j-1}$, $A_{i+1,j}$ et $\eta_{i,j-1}$ entraîne l'identification par f de H à h.

Preuve. — Les hypothèses entraînent l'exactitude de la suite

$$0 \xrightarrow[\psi_{i,j-1}]{} H \xrightarrow[f]{} D \xrightarrow[g]{} 0$$

Proposition 6 (*Transfert de l'homologie à travers n lignes exactes*). — Si les termes $A_{i,j}$ sont nuls dans les lignes $i = -1$ et $i = n+2$, si les lignes sont exactes pour $1 \leq i \leq n$, et si les colonnes sont exactes (le lecteur énoncera lui-même des hypothèses plus économiques), alors $h_{0,j}$ et $h_{n+1,j-n}$ s'identifient.

Preuve.

$$h_{0,j} = H_{1,j} = H_{2,j-1} = \ldots = H_{n+1,j-n} = h_{n+1,j-n}.$$

Cas particuliers où $n = 2$: lemme des cinq, lemme du serpent.

1° Complétons le diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{1,1} & \to & A_{1,2} & \to & A_{1,3} & \to & A_{1,4} & \to & A_{1,5} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A_{2,1} & \to & A_{2,2} & \to & A_{2,3} & \to & A_{2,4} & \to & A_{2,5} \end{array}$$

par la ligne des noyaux et celle des conoyaux (de sorte que la proposition 6 s'applique); si $d_{0,3} = 0$, alors $d_{3,1} = 0$; en particulier, on peut affirmer que $A_{0,3} = 0$ si, d'une part $A_{0,2} = 0 = A_{0,4}$, ce qui identifie $A_{0,3}$ et $d_{0,3}$, et d'autre part $A_{3,1} = 0$, ce qui implique $d_{3,1} = 0$; c'est dire que, dans le diagramme ci-dessus, la flèche verticale médiane est certainement monomorphique si ses deux voisines le sont et si celle de gauche est épimorphique; de même, la flèche médiane est épimorphique si ses deux voisines le sont et si celle de droite est monomorphique.

2° Dans le diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_{1,2} & \to & A_{1,3} & \to & A_{1,4} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A_{2,2} & \to & A_{2,3} & \to & A_{2,4} & & \end{array}$$

complété par la ligne des noyaux et celle des conoyaux, la proposition 6 identifie l'homologie $d_{0,4}$ et $d_{3,2}$ des complexes

$$A_{0,3} \to A_{0,4} \to 0, \qquad 0 \to A_{3,2} \to A_{3,3},$$

ce qui revient à donner une flèche $A_{0,4} \to A_{3,2}$ telle que la suite

$$A_{0,2} \to A_{0,3} \to A_{0,4} \to A_{3,2} \to A_{3,3} \to A_{3,4}$$

soit exacte sur les deux termes médians; en fait, une autre application de la proposition 6 montre que la suite entière est exacte.

Proposition 7 (*Cobords issus d'une suite exacte de complexes*). — Si les termes $A_{i,j}$ sont nuls dans les lignes $i = 0$ et $i = 4$, et si les colonnes sont exactes, on obtient une suite exacte

$$\ldots h_{1,j} \to h_{2,j} \to h_{3,j} \to h_{1,j+1} \to h_{2,j+1} \to h_{3,j+1} \ldots.$$

Preuve. — L'exactitude des colonnes entraîne l'exactitude de la suite

$$\ldots H_{2,j} \xrightarrow[f_{2,j}]{} h_{2,j} \xrightarrow[g_{2,j}]{} H_{3,j} \longrightarrow H_{2,j+1} \xrightarrow[f_{2,j+1}]{} h_{2,j+1} \xrightarrow[g_{2,j+1}]{} H_{3,j+1} \ldots,$$

où les flèches non nommées viennent du corollaire de la proposition 5; le passage à la suite exacte de l'énoncé résulte des recettes 3 et 4.

Bien entendu, l'application de la proposition 3 montre que les isomorphismes de la proposition 6 et les suites exactes de la proposition 7 dépendent fonctoriellement des complexes doubles qu'ils produisent.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Gabriel (Pierre). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 323-448 (Thèse Sc. math. Paris, 1961).

[2] Grothendieck (Alexander). — Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku math. J.*, Series 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[3] Kuroš (A. G.), Livšic (A. Kh.) et Šul'gejfer (E. G.). — Éléments de la théorie des catégories [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk*, t. 15, 1960, fasc. 6, p. 3-52; en traduction allemande dans *Zur Theorie der Kategorien*, p. 7-70. Berlin, V. E. B., Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963 (Mathematische Forschungsberichte, 15).

[4] Lubkin (Saul). — Imbedding of abelian categories, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 97, 1960, p. 410-417.

(Manuscrit reçu le 17 mars 1965.)

Mlle Lucile Bégueri,
Assistante à la Faculté des Sciences,
13, rue des Postes, Lille (Nord).

Georges Poitou,
Professeur à la Faculté des Sciences,
13, place Philippe-Lebon, Lille (Nord).