BULLETIN DE LA S. M. F.

P. MOLINO

Sous-modules transitifs

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 15-24
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__15_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 15 à 24.

SOUS-MODULES TRANSITIFS

PAR

PIERRE MOLINO

(Montpellier).

Introduction. — Dans un travail antérieur (*voir* [1]), on a proposé l'étude des champs d'éléments (autrement dit, des classes d'équivalence de connexions) comme généralisation de la théorie des connexions, et en même temps comme cadre adéquat pour l'exposé de certains aspects de cette théorie (holonomie, opérations tensorielles).

En réalité, l'étude de l'holonomie des connexions invite à se placer dans un cadre plus général encore, celui des « sous-modules transitifs » de l'ensemble des champs de vecteurs différentiables invariants à droite. En effet, l'holonomie infinitésimale d'une connexion (ou d'un champ d'éléments transitifs) est représentée par un tel sous-module transitif (qui est dans ce cas en même temps une sous-algèbre de Lie). Et le problème du passage de l'holonomie infinitésimale à l'holonomie globale apparaît comme un problème de « régularisation » d'un sous-module transitif.

L'étude des sous-modules transitifs ouvre aussi une nouvelle catégorie de problèmes, avec l'étude des sous-modules invariants par une sous-algèbre de Lie. Les quelques indications fournies ici à ce sujet montrent comment ce point de vue englobe les problèmes d'holonomie (tels qu'on les présente ici dans le cadre le plus général). On remarquera qu'en même temps il y a là une généralisation des problèmes d'invariance relatifs aux espaces homogènes (*voir* [1]).

1. Notions générales.

1° Étant donné un espace fibré principal différentiable (EFP) $E(V, G, p, \Phi)$, on désignera par $\mathcal{A}$ l'ensemble des champs de vecteurs différentiables sur $E(V, G)$ invariants par les translations à droite, par $\mathcal{V}$ la partie de $\mathcal{A}$ formée des champs de vecteurs verticaux, par $\mathcal{X}$ l'ensemble des champs de vecteurs différentiables sur la base V.

$\mathcal{A}$ peut être muni de deux structures :

— une structure d'algèbre de Lie sur le corps des nombres réels, définie par le crochet usuel des champs de vecteurs;

— une structure de module de type fini sur l'anneau $\mathcal{F}(V)$ des fonctions différentiables sur la base V.

Pour chacune de ces structures, la suite de morphismes naturels : $0 \to \mathcal{V} \to \mathcal{A} \to \mathcal{X} \to 0$ est une suite exacte.

2° Soit P un sous-module (SM) de $\mathcal{A}$. En un point z de $E(V, G)$, les vecteurs des champs appartenant à P forment un sous-espace vectoriel P_z de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_z$ tangent en z à $E(V, G)$.

Un SM est dit transitif s'il admet pour projection sur la base V le module $\mathcal{X}$ tout entier.

Le SM P est dit régulier si le champ de sous-espaces P_z est différentiable, autrement dit, peut être défini par un système de Pfaff.

Un SM régulier est dit intégrable, si le système de Pfaff associé est complètement intégrable.

La condition nécessaire et suffisante, pour qu'un SM régulier soit intégrable, est qu'il soit fermé pour le crochet des champs de vecteurs, c'est-à-dire que ce soit en même temps une sous-algèbre de Lie (SAdL) de $\mathcal{A}$. Plus généralement, un SM sera dit fermé s'il est fermé pour le crochet des champs de vecteurs.

Si P et P' sont deux SM de $\mathcal{A}$, on notera $[P, P']$ le SM de $\mathcal{A}$ engendré par les crochets des champs de P avec ceux de P'.

On remarquera que le champ de sous-espaces défini par un SM régulier de $\mathcal{A}$ est un champ d'éléments (CE) sur $E(V, G)$ au sens de [1]. Ce CE sera dit associé au SM régulier considéré. Inversement, à un CE donné correspond un SM régulier unique qui admet le CE donné comme CE associé. Ce SM sera dit SM régulier associé au CE. En particulier, à un SM régulier transitif (resp. intégrable) est associé un CE transitif (resp. intégrable) et réciproquement.

3° Soit P un SM quelconque de $\mathcal{A}$. En un point z de $E(V, G)$, un vecteur tangent est dit horizontal par rapport à P (ou P-horizontal) s'il appartient à P_z. Un chemin continu et différentiable par morceaux de $E(V, G)$ est dit P-horizontal si les vecteurs tangents à ce chemin en chacun de ses points sont P-horizontaux.

Étant donné un point z_0 de $E(V, G)$, on appelle groupe d'holonomie de P en z_0, et l'on note $H_{z_0}(P)$ l'ensemble des éléments g de G tels que z_0

et $z_0 g^{-1}$ puissent être joints par un chemin P-horizontal. On vérifie sans peine que c'est un groupe et qu'on a

$$H_{z_0 g}(P) = \operatorname{adj} g^{-1} H_{z_0}(P),$$
$$H_{z_0}(P) = H_{z_1}(P)$$

si z_0 et z_1 peuvent être joints par un chemin P-horizontal.

On appelle enfin nappe d'holonomie de P en z_0, et l'on note $\mathcal{H}_{z_0}(P)$ l'ensemble des points de $E(V, G)$ qui peuvent être joints à z_0 par un chemin P-horizontal.

Si P et P' sont deux SM de $\mathcal{A}$ tels que $P \supset P'$, on a, quel que soit z_0,

$$H_{z_0}(P) \supset H_{z_0}(P') \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}_{z_0}(P) \supset \mathcal{H}_{z_0}(P').$$

2. **Holonomie.**

Soit P un SM transitif de $\mathcal{A}$. L'étude de ses nappes d'holonomie ne présente aucune difficulté supplémentaire par rapport au cas d'un CE transitif, traité dans [1].

1° P étant transitif, étant donné un chemin quelconque de V et un point de $E(V, G)$ au-dessus de l'origine de ce chemin, il existe au moins un chemin de $E(V, G)$ qui soit P-horizontal, qui se projette suivant le chemin donné et qui ait pour origine le point donné. Il en résulte que la nappe d'holonomie de P en un point z_0 quelconque admet pour projection la base V tout entière.

Par ailleurs, étant donné un point x_1 quelconque de V, un point z_1 de $\mathcal{H}_{z_0}(P)$ au-dessus de x_1, considérons (n étant la dimension de V) n éléments de $\mathcal{X}$ linéairement indépendants au point x_1. Il existe n éléments de P se projetant suivant ces champs.

Ces n éléments engendrent, au-dessus d'un voisinage ouvert assez petit de x_1, un SM régulier contenu dans P auquel est associée une connexion. Par suite, on peut construire au-dessus de cet ouvert une section différentiable de $E(V, G)$ à valeurs dans $\mathcal{H}_{z_0}(P)$.

Ainsi, on peut trouver un recouvrement ouvert de V muni de sections différentiables de $E(V, G)$ à valeurs dans $\mathcal{H}_{z_0}(P)$.

Si l'on ajoute que le sous-groupe $H_{z_0}(P)$ de G peut être muni d'une structure de sous-groupe de Lie de G, on voit que $\mathcal{H}_{z_0}(P)$ peut être considéré comme un sous-fibré principal (SFP) de $E(V, G)$.

Aux nappes d'holonomie correspond donc un CE transitif intégrable, et, par suite, un SM régulier transitif intégrable, qui sera noté $\overline{P}$. Il est clair que $\overline{P}$ est le SM régulier intégrable minimal contenant le SM transitif étudié P. Ainsi la recherche des nappes d'holonomie d'un SM transitif P est équivalente à la recherche du SM régulier intégrable minimal contenant P.

2° $\bar{P}$ étant un SM intégrable, est fermé pour le crochet des champs de vecteurs. Il contient donc le SM fermé minimal contenant P (ou SM fermé engendré par P). Ce dernier, noté $\tilde{P}$, peut être obtenu de la façon suivante :

On définit la suite non décroissante de SM transitifs :

$$\begin{aligned} P' &= P + [P, P], \\ P'' &= P' + [P, P'], \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ P^{(n)} &= P^{(n-1)} + [P, P^{(n-1)}], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On a visiblement

$$\tilde{P} = \bigcup_n P^{(n)}.$$

Si le SM fermé $\tilde{P}$ est régulier, il est intégrable, et coïncide donc avec le SM intégrable minimal $\bar{P}$ contenant P. On dit, dans ce cas, que le SM P est un SM à *holonomie infinitésimale régulière*. Dans le cas général, le SM fermé $\tilde{P}$ est appelé *SM d'holonomie infinitésimale* de P.

Remarque. — Étant donné un CE transitif, on a dans [1] défini une notion de régularité pour un tel champ qui peut se traduire de la façon suivante : Un CE est régulier si le SM associé est à holonomie infinitésimale régulière. D'une façon générale, on appellera d'ailleurs SM d'holonomie infinitésimale d'un CE transitif le SM d'holonomie infinitésimale du SM associé.

On peut introduire également la notion de *SM transitif complètement régulier* : P sera dit complètement régulier si $P, P', \dots, P^{(n)}, \dots$ sont des SM réguliers. De même, on dira qu'un CE transitif est complètement régulier si le SM associé est complètement régulier. En particulier se trouve définie la notion de *connexion complètement régulière.*

PROPOSITION. — *Un SM transitif complètement régulier est à holonomie infinitésimale régulière.*

En effet, $P^{(n)}_z$ est, quel que soit n, de dimension finie inférieure à celle de $E(V, G)$. Donc la suite non décroissante de SM transitifs $P^{(n)}$ est stationnaire à partir d'un certain rang n_0. Donc $\tilde{P} = P^{(n_0)}$, et par suite $\tilde{P}$ lui-même est régulier.

En particulier, cette proposition montre qu'une connexion complètement régulière est à holonomie infinitésimale régulière. Les connexions invariantes sur un espace homogène, et plus généralement les connexions analytiques, sont des exemples de connexions complètement régulières.

Remarques :

(*a*) Dans le cours de la démonstration précédente, on a montré en particulier que, pour un SM transitif P complètement régulier, le SM régulier minimal intégrable $\overline{P}$ contenant P était confondu avec $P^{(n_0)}$ pour un certain entier n_0. Ce résultat s'applique en particulier à l'étude de l'holonomie des connexions complètement régulières (par exemple des connexions analytiques).

(*b*) De façon analogue, pour un SM transitif quelconque P, la suite de sous-espaces vectoriels tangents au point arbitraire z : $P_z, P'_z, \ldots, P^{(n)}_z, \ldots$ est stationnaire à partir d'un rang qui dépend du point z, et qu'on notera par suite $n(z)$. L'holonomie infinitésimale en un point $\tilde{P}_z$ est égale à $P^{(n(z))}_z$.

3° On peut déterminer les nappes d'holonomie d'un SM transitif P à l'aide d'un résultat généralisant le théorème d'Ambrose-Singer (tel qu'il a été formulé dans [1] pour les CE transitifs). Reprenant les notations de [1], si λ est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ de G, on notera $z.\lambda$ le vecteur tangent vertical en z défini par λ.

Réciproquement, si v_z est un vecteur tangent vertical en z, on notera $u(v_z)$ l'élément correspondant de $\mathfrak{G}$. Les notations z et u seront étendues aux sous-espaces vectoriels.

Ceci étant, on a

$$\overline{P}_{z_0} \supset P'_{z_0},$$

d'où

$$u(\overline{P}_{z_0} \cap \mathcal{V}_{z_0}) \supset u(P'_z \cap \mathcal{V}_z) \quad \text{pour tout } z \text{ dans } \mathcal{H}_{z_0}(P).$$

Il en résulte que l'algèbre de Lie $u(\overline{P}_{z_0} \cap \mathcal{V}_{z_0})$ du groupe $H_{z_0}(P)$ contient les éléments $u(P'_z \cap \mathcal{V}_z)$, où z parcourt la nappe d'holonomie $\mathcal{H}_{z_0}(P)$. Réciproquement, soit L_{z_0} la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{G}$ engendrée par ces éléments. On vérifie que le CE transitif M_z, défini par $M_{z_0} = P_{z_0} + z_0.L_{z_0}$, est intégrable, et c'est, par construction, le CE intégrable minimal tel que le SM associé contienne P.

On obtient ainsi le théorème d'Ambrose-Singer pour les SM transitifs.

THÉORÈME. — *L'algèbre de Lie du groupe d'holonomie au point z_0 d'un SM transitif P est engendrée par les éléments $u(P'_z \cap \mathcal{V}_z)$ lorsque z parcourt la nappe d'holonomie de P en z_0.*

3. **Régularité.**

Le paragraphe précédent a montré l'importance, pour l'étude de l'holonomie des SM transitifs, et en particulier des CE transitifs, de l'étude de la régularité des SM transitifs.

On étudiera dans ce paragraphe, d'une part les « points singuliers » d'un SM transitif quelconque, d'autre part une méthode pour obtenir à partir d'un SM transitif quelconque un SM régulier contenant le précédent et possédant des propriétés de caractère minimal.

1° Soit P un SM transitif de $\mathfrak{A}$. Un point x de V sera dit régulier pour P s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que la restriction de P à $p^{-1}(U)$ soit un SM régulier. Un point de V sera dit singulier pour P s'il n'est pas régulier.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un SM transitif P soit régulier est que dim P_z soit constant en tout point. Si cette dimension vaut n_0 au-dessus du point x_0, il existe un voisinage ouvert de x_0 au-dessus duquel la dimension est supérieure ou égale à n_0. En effet, des champs de vecteurs linéairement indépendants en un point le sont encore dans un voisinage assez petit de ce point.

Ceci étant, considérons l'ensemble $S(P)$ des points de V singuliers pour P. Cet ensemble est fermé, car l'ensemble des points réguliers pour P est visiblement ouvert.

Montrons que $S(P)$ est sans polnts intérieurs : si, en effet, x_0 était un point intérieur à $S(P)$, il existerait un voisinage ouvert de x_0 formé de points singuliers au-dessus desquels la dimension de P_z serait supérieure ou égale à celle au-dessus de x_0, x_0 étant singulier, il y aurait dans ce voisinage au moins un point x_1 au-dessus duquel la dimension serait strictement plus grande qu'en x_0. En recommençant le raisonnement sur x_1, qui serait lui-même intérieur à $S(P)$, on aboutirait à une absurdité, puisque la dimension de P_z est bornée par celle de $E(V, G)$. On a donc le résultat :

THÉORÈME. — *L'ensemble des points de V singuliers pour un SM transitif est fermé et sans points intérieurs.*

Remarque. — Ce théorème s'applique en particulier au SM d'holonomie infinitésimale d'une connexion (ou d'un CE). On retrouve ainsi un résultat bien connu sur les points singuliers pour l'holonomie infinitésimale d'une connexion (*voir* [2]).

2° On a vu que la recherche des nappes d'holonomie d'un SM transitif P est équivalente à celle du SM régulier intégrable minimal $\overline{P}$ contenant P. En réalité, $\overline{P}$ contient le SM fermé $\tilde{P}$ engendré par P, et le problème revient à déterminer un SM fermé régulier minimal contenant le SM fermé $\tilde{P}$. C'est un problème de régularisation dans l'ensemble des SM transitifs fermés. On a vu que ce problème admet une solution unique. Il n'en est pas de même du problème général de régularisation dans l'ensemble des SM transitifs : recherche du SM régulier minimal contenant un SM transitif donné.

On se contentera ici de donner une méthode de régularisation faisant appel à la notion de SM uniforme : étant donné un SFP $e(V, H)$ de $E(V, G)$, un SM transitif P est dit uniforme par rapport à $e(V, H)$ si le sous-espace $u(P_z \cap \mathfrak{V}_z)$ de $\mathfrak{G}$ est le même en tous les points de $e(V, H)$.

Remarque. — Dans [1], on a introduit la notion de CE uniforme par rapport à un SFP $e(V, H)$ de la façon suivante : M_z, CE transitif, est uniforme par rapport à $e(V, H)$ si $u(M_z \cap \mathfrak{V}_z)$ est le même en tous les points de $e(V, H)$, et si de plus ce sous-espace de $\mathfrak{G}$ est contenu dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{H}$ de H. Le SM associé à un tel CE sera dit complètement uniforme par rapport à $e(V, H)$, et le CE lui-même sera désormais dit complètement uniforme par rapport à $e(V, H)$.

Il est clair qu'un SM uniforme par rapport à un SFP $e(V, H)$ est régulier. Le CE associé sera dit également uniforme par rapport à $e(V, H)$. Ainsi la notion de CE uniforme utilisée dans la suite est plus générale que celle introduite dans [1].

Ces définitions posées, on se propose, étant donné un SM transitif P et un SFP $e(V, H)$, de construire un SM uniforme par rapport à $e(V, H)$, contenant P, et minimal.

La construction ne présente aucune difficulté : soit L le sous-espace de $\mathfrak{G}$ engendré par les éléments $u(P_z \cap \mathfrak{V}_z)$ aux différents points de $e(V, H)$. On posera alors

$$\hat{P}_z = P_z + z.L \quad \text{pour tout } z \text{ dans } e(V, H).$$

Par les translations à droite de $E(V, G)$ on en déduira un CE transitif sur $E(V, G)$ uniforme par rapport à $e(V, H)$. Le SM associé, noté $\hat{P}$, répond à la question et sera dit SM uniforme par rapport à $e(V, H)$ engendré par P, ou bien SM obtenu par uniformisation de P par rapport à $e(V, H)$.

Remarques.

(*a*) Un SM transitif P sera dit complètement uniformisable par rapport au SFP $e(V, H)$ si, en tout point de ce SFP, $u(P_z \cap \mathfrak{V}_z)$ est contenu dans $\mathfrak{H}$. Il est clair que le SM obtenu par uniformisation par rapport à $e(V, H)$ d'un SM complètement uniformisable par rapport à ce SFP est complètement uniforme par rapport à $e(V, H)$.

(*b*) Tout SM transitif est complètement uniformisable par rapport à l'une quelconque de ses nappes d'holonomie. Le SM régulier obtenu par uniformisation, par rapport à l'une de ces nappes, admet pour CE associé un CE connexe (c'est-à-dire uniforme par rapport à ses nappes d'holonomie). Il est dit lui-même SM connexe.

(*c*) Utilisant les notions qui viennent d'être introduites, on peut traduire le théorème d'Ambrose-Singer relatif aux SM transitifs dans les termes suivants :

Le SM intégrable minimal contenant un SM transitif P peut être obtenu par uniformisation du SM $P + [P, P]$ par rapport à l'une des nappes d'holonomie de P.

4. Sous-modules invariants.

1° Soient $\mathfrak{a}$ une SAdL et P un SM de $\mathcal{A}$. On notera $[\mathfrak{a}, P]$ le SM engendré par les crochets d'un élément de $\mathfrak{a}$ et d'un élément de P. On dira que P est invariant par $\mathfrak{a}$ si $[\mathfrak{a}, P] \subset P$.

Dans la suite, on étudiera particulièrement les SM invariants transitifs.

(*a*) P étant un SM transitif, invariant par la SAdL $\mathfrak{a}$, on a, au paragraphe 1, défini les SM transitifs P', P'', ..., $P^{(n)}$, ... Il n'est pas difficile de vérifier que ces SM sont eux-mêmes invariants par $\mathfrak{a}$. Il en est de même du SM fermé $\tilde{P}$ engendré par P, autrement dit du SM d'holonomie infinitésimale de P.

(*b*) Soient $e(V, H)$ un SFP de $E(V, G)$ et L le SM intégrable des champs de vecteurs qui, en chaque point de $e(V, H)$, sont tangents à ce SFP. Supposons que $\mathfrak{a}$ soit une SAdL contenue dans L, P un SM transitif invariant par $\mathfrak{a}$.

PROPOSITION. — *Le SM régulier $\hat{P}$ obtenu par uniformisation de P par rapport à $e(V, H)$ est invariant par $\mathfrak{a}$.*

En effet, le SM $\mathcal{V}(\hat{P})$ des champs de vecteurs verticaux de $\hat{P}$ est, par construction, invariant par L, donc par $\mathfrak{a}$. Et $\hat{P}$, qui est la somme $P + \mathcal{V}(\hat{P})$ de deux SM invariants par $\mathfrak{a}$, est lui-même invariant par $\mathfrak{a}$.

(*c*) Soient P_0 un SM quelconque et P un SM transitif. Supposons qu'on ait $[P_0, P] \subset P$. Alors on dit que P est P_0-invariant. En particulier, ω_0 étant une connexion sur $E(V, G)$, un SM transitif est dit ω_0-invariant s'il est P_0-invariant, P_0 désignant alors le SM transitif associé à ω_0.

Si P est P_0-invariant, P est invariant par l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_0$ engendrée par P_0. Dans le cas ou P_0 est transitif, on évitera de confondre $\mathfrak{a}_0$ avec le SM fermé $\tilde{P}_0$ engendré par P_0. $\tilde{P}_0$ est le SM engendré par $\mathfrak{a}_0$.

2° Soit P un SM transitif.

(*a*) L'ensemble des champs de vecteurs v invariants à droite tels que : $[v, P] \subset P$ forme visiblement une algèbre de Lie $\mathfrak{a}_0$. P est invariant par $\mathfrak{a}_0$, et celle-ci est la SAdL maximale laissant P invariant. Aussi appelle-t-on $\mathfrak{a}_0$ SAdL d'invariance du SM donné P.

Il est clair que la SAdL d'invariance d'un SM transitif fermé contient ce SM lui-même.

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, si $\mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}''_0, \ldots, \mathfrak{a}^{(n)}_0, \ldots$ sont les SAdL d'invariance respectives de $P', P'', \ldots, P^{(n)}, \ldots$, on a pour tout n, $\mathfrak{a}^{(n)}_0 \supset \mathfrak{a}_0$, et de même, la SAdL $\tilde{\mathfrak{a}}_0$ d'invariance de $\tilde{P}$ contient $\mathfrak{a}_0$.

(*b*) P étant toujours un SM transitif quelconque, donnons-nous une SAdL $\mathfrak{a}$. On veut essayer de construire un SM $\tilde{P}_{\mathfrak{a}}$ contenant P, invariant par $\mathfrak{a}$ et minimal. La construction présente une analogie remarquable avec la construction des SM d'holonomie infinitésimale : on fabrique la suite non décroissante de sous-modules :

$$\begin{aligned} P'_{\mathfrak{a}} &= P + [\mathfrak{a}, P], \\ P''_{\mathfrak{a}} &= P'_{\mathfrak{a}} + [\mathfrak{a}, P'_{\mathfrak{a}}], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P^{(n)}_{\mathfrak{a}} &= P^{(n-1)}_{\mathfrak{a}} + [\mathfrak{a}, P^{(n-1)}_{\mathfrak{a}}], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et le SM cherché est donné visiblement par

$$\tilde{P}_{\mathfrak{a}} = \bigcup_n P^{(n)}_{\mathfrak{a}}.$$

Si $\mathfrak{a}$ est contenue dans le SM intégrable associé à un SFP $e(V, H)$ de $E(V, G)$, on pourra également introduire le SM régulier $\hat{P}_{\mathfrak{a}}$ obtenu par uniformisation de $\tilde{P}_{\mathfrak{a}}$ par rapport à $e(V, H)$. $\hat{P}_{\mathfrak{a}}$ sera lui aussi invariant par $\mathfrak{a}$.

(*c*) Soit P un SM transitif. P_0 étant un autre SM transitif, on pourra, de façon analogue à ce qui vient d'être fait, introduire le SM P_0-invariant engendré par P qui sera donné par la formule

$$\tilde{P}_{p_0} = \bigcup_n P^{(n)}_{p_0}, \qquad \text{où} \quad P^{(n)}_{p_0} = P^{(n-1)}_{p_0} + [P_0, P^{(n-1)}_{p_0}].$$

Si, de plus, $e(V, H)$ est une nappe d'holonomie de P_0, le SM $\hat{P}_{p_0}$ obtenu par uniformisation de $\tilde{P}_{p_0}$ par rapport à $e(V, H)$ sera également P_0-invariant.

La construction du SM $\hat{P}_{p_0}$ est précisée par un théorème qu'on pourra appeler « théorème d'uniformisation des SM invariants » :

Théorème. — *P et P_0 étant deux SM transitifs, et $e(V, H)$ une nappe d'holonomie de P_0, le SM P_0-invariant, uniforme par rapport à $e(V, H)$, contenant P et minimal, est obtenu par uniformisation par rapport à $e(V, H)$ du SM $P + [P_0, P]$.*

La démonstration se réduit à la vérification du fait que le SM obtenu par uniformisation de P'_{p_0} par rapport à $e(V, H)$ est P_0-invariant. Or ceci est immédiat.

Remarque. — Le théorème d'uniformisation qui vient d'être établi constitue une généralisation du théorème d'Ambrose-Singer relatif aux SM transitifs : il suffit pour obtenir ce dernier de considérer le cas où P et P_0 sont le même SM transitif.

Exemple. — Appliquons le théorème d'uniformisation à la détermination du CE M_z contenant une connexion ω, invariant par rapport à une connexion ω_0, uniforme par rapport aux nappes d'holonomie de ω_0 et minimal. Il vient :

$u(M_{z_0} \cap \mathcal{V}_{z_0})$ est le sous-espace de $\mathfrak{G}$ engendré par les éléments $\omega([x_0, y])$ (où x_0 est un champ de vecteurs tangents horizontal par rapport à ω_0, y un champ de vecteurs tangents horizontal par rapport à ω) aux différents points de la nappe d'holonomie de ω_0 en z_0.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Molino (Pierre). — Champs d'éléments sur un espace fibré principal différentiable, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 14, 1964, fasc. 2, p. 163-219 (*Thèse Sc. math.*, Paris, 1963).

[2] Oseki (Hideki). — Infinitesimal holonomy groups of bundle connections, *Nagoya math. J.*, t. 10, 1956, p. 105-123.

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1964.)

Pierre Molino,
Maître de Conférences,
Faculté des Sciences,
Montpellier (Hérault).