BULLETIN DE LA S. M. F.

Y. KATO

Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 245-259
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__245_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 245 à 259.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUES

PAR

Yoshio KATO

1. Gårding et Malgrange [2] ont défini la notion d'hypoellipticité partielle des opérateurs différentiels. Mizohata a étendu leur résultat au cas des coefficients variables, c'est-à-dire qu'il a montré dans [4] qu'un opérateur différentiel, formellement partiellement, hypoelliptique (1), est partiellement hypoelliptique. Dans cet article, on va étendre le résultat de [4]. Nous avons adapté le raisonnement de Hörmander, exposé dans [3].

Partout dans cet article, nous désignerons par $x=(x', x'')$ une partition des variables $x\in R^n$, où $x'\in R^{n'}$, $x''\in R^{n''}$, $0<n'<n$ et $n''=n-n'$. On utilisera de plus les notations suivantes :

$$\begin{aligned} D_x^\alpha &= (-i\,\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(-i\,\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}, \\ D_{x'}^{\alpha'} &= (-i\,\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(-i\,\partial/\partial x_{n'})^{\alpha_{n'}}, \\ D_{x''}^{\alpha''} &= (-i\,\partial/\partial x_{n'+1})^{\alpha_{n'+1}}\ldots(-i\,\partial/\partial x_n)^{\alpha_{n''}}, \\ |\alpha| &= \alpha_1+\ldots+\alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_n!, \end{aligned}$$

où $\alpha\in \mathbf{N}^n$, $\alpha'\in\mathbf{N}^{n'}$ et $\alpha''\in\mathbf{N}^{n''}$ ($\mathbf{N}$ désignant l'ensemble des entiers $\geqq 0$).

Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel s'écrivant sous la forme

$$P(x, D)=\sum_\alpha a_\alpha(x)\,D^\alpha, \qquad a_\alpha(x)\in C^\infty(\Omega),$$

où Ω est un ensemble ouvert de R^n. On dit que l'opérateur $P^\star(x, D)$ défini par

$$P^\star(x, D)\,u=\sum_\alpha(-D)^\alpha(a_\alpha(x)\,u)$$

(1) *Voir* [1] pour cette notion.

est l'adjoint de $P(x, D)$. Posons, pour abréger,

$$P^\alpha(x, \xi) = (\partial^{|\alpha|}/\partial\xi_1^{\alpha_1} \dots \partial\xi_n^{\alpha_n}) P(x, \xi), \qquad \xi \in R^n,$$
$$\tilde{P}(x, \xi) = \Big(\sum_\alpha |P^\alpha(x, \xi)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

2. En suivant SCHWARTZ [5], nous définissons un noyau sur Ω qui est un noyau très régulier au sens de Schwartz, si $n' = n$.

DÉFINITION 2.1. — Soit Ω un ensemble ouvert de R^n. Un noyau $K(x, y)$ (une distribution sur $\Omega \times R^n$) est dit très régulier en (x', y'), s'il vérifie les conditions suivantes :

(N 1) $K(x, y)$ est régulière en x dans $\Omega \times R^n$ (²);

(N 2) Si $f(x)$ est une distribution sur Ω à support compact et régulière en x' dans Ω, $\langle K(x, y), f(x) \rangle_x$ est régulière en y' dans R^n;

(N 3) Soient V et W des ouverts bornés de $R^{n'}$ et de $R^{n''}$ respectivement, tels que $V \times W \subset \Omega$. Alors $\langle K(x, y), \varphi(y'') \rangle_{y''}$ est indéfiniment dérivable dans l'ensemble

$$\Omega \times V - \{ (x', x'', y'); x' = y', x'' \in W \} \quad (^3)$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(W)$.

DÉFINITION 2.2. — Un opérateur différentiel $P(x, D)$ sur Ω est dit partiellement hypoelliptique en x' dans Ω, si chaque distribution $u(x)$, définie dans Ω et solution de l'équation $P(x, D)\, u = f$, est régulière en x' dans tout ouvert où f l'est.

SCHWARTZ a montré qu'un opérateur est hypoelliptique, s'il a une parametrix très régulière. Le théorème suivant se réduit au résultat de Schwartz, si $n = n'$, et notre démonstration est inspirée de [5].

THÉORÈME 2.1. — *Soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel à coefficients C^∞ sur Ω. Alors l'adjoint $P^*(x, D)$ de $P(x, D)$ est partiellement hypoelliptique dans Ω, s'il existe deux suites de noyaux sur $\Omega \times R^n$,*

$$\{ E_p(x, y) \}_{p=1}^\infty \quad \textit{et} \quad \{ L_p(x, y) \}_{p=1}^\infty,$$

satisfaisant aux conditions suivantes pour chaque p :

(P 1) *$P(x, D)\, E_p(x, y) + L_p(x, y) = \delta(x - y)$;*

(P 2) *$E_p(x, y)$ est très régulière en (x', y');*

(²) Si $f(x)$ est une distribution sur Ω à support compact, on peut définir la distribution $\langle K(x, y), f(x) \rangle_x$ sur Ω comme suit :
$$\langle\langle K(x, y), f(x) \rangle_x, \psi(y) \rangle \equiv \langle f(x), \langle K(x, y), \psi(y) \rangle_y \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}(R^n).$$

(³) On désigne par $X - Y$ l'ensemble $\{ x;\ x \in X, x \notin Y \}$.

(P 3) *$L_p(x, y)$ est régulière en x;*

(P 4) *Soient $S \in \mathcal{E}'(\Omega)$ une distribution à support compact. Alors, quel que soit le nombre réel s, il existe un $p = p(s)$, et un réel $t = t(s)$, tels que*

$$\langle L_p(x, y), S(x) \rangle_x \in H^{s,t}_{\text{loc}}(R^n) \text{ [4]}.$$

Démonstration. — Soit $v(x)$ une distribution à support compact dans Ω, c'est-à-dire $v(x) \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et régulière en x' dans un ouvert Ω_1 contenu dans Ω. D'après (N 1) nous avons $\langle E_p(x, y), v(x) \rangle_x \in \mathcal{D}'(R^n)$. Soit ω un ouvert d'adhérence contenue dans Ω_1, et relativement compact. Soit $\alpha(x)$ une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\Omega_1)$ et égale à 1 dans ω. Alors $\langle E_p(x, y), \alpha(x)\, v(x) \rangle_x$ est régulière en y' dans R^n d'après (N 2). Soient V et W des ouverts de $R^{n'}$ et de $R^{n''}$ respectivement, tels que $V \times W \subset \omega_1$, où ω_1 est un ouvert d'adhérence contenue dans ω. Alors on voit facilement que

$$(2.1) \qquad (\Omega - \omega_1) \times V \subset \Omega \times V - \{(x', x'', y');\, x' = y',\, x'' \in W\}.$$

Donc, d'après (N 3) et (2.1), pour $\varphi \in \mathcal{D}(W)$, nous avons

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} &\langle\langle E_p(x, y),\ (1 - \alpha(x))\, v(x) \rangle_x,\ \varphi(y'') \rangle_{y''} \\ &= \langle (1 - \alpha(x))\, v(x),\ \langle E_p(x, y),\ \varphi(y'') \rangle_{y''} \rangle_x. \end{aligned}$$

Car $(1 - \alpha(x))\, v(x) = 0$ dans ω. D'autre part le second membre de (2.2) est dans $C^\infty_{y'}(V)$. D'où $\langle E_p(x, y),\ v(x) \rangle_x$ est régulière en y' dans Ω_1.

Supposons maintenant que $u(x)$ soit une distribution sur Ω, solution de $P^*(x, D)\, u = f$, où f est une distribution sur Ω et régulière en x' dans un ouvert $\Omega_0 \subset \Omega$. Soit $\beta(x)$ une fonction appartenant à $\mathcal{D}(\Omega)$ et égale à 1 dans un ouvert borné dont l'adhérence est contenue dans Ω_0. Cela entraîne que $\beta u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ et $P^*(\beta u)$ est régulière en x' dans Ω_1. Comme on l'a déjà vu au début, $\langle E_p(x, y),\ P^*(\beta u)(x) \rangle_x$ est régulière en y' dans Ω_1. En utilisant (P 1), (P 2) et (P 3), on déduit sans peine que

$$\beta(y)\, u(y) = \langle E_p(x, y),\ P^*(x, D)\, \beta u(x) \rangle_x + \langle L_p(x, y),\ \beta u(x) \rangle_x.$$

D'après (P 4), quel que soit s réel, il existe un p et un réel t tels que

$$\langle L_p(x, y),\ \beta u(x) \rangle_x \in H^{s,t}_{\text{loc}}(R^n).$$

---

[4] $f \in H^{s,t} \Longleftrightarrow$ (i) f est une distribution tempérée,

(ii) $|\hat{f}(\xi)|\,(1 + |\xi'|)^s (1 + |\xi''|)^t \in L^2_\xi$.

$f \in H^{s,t}_{\text{loc}}(\Omega) \Longleftrightarrow \psi f \in H^{s,t}$ pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

D'où βu est régulière en y' dans Ω_1. Ce qui entraîne que u est régulière en y' dans Ω_1. Donc le théorème est conclu du fait qu'on peut prendre Ω_1 arbitrairement dans Ω_0.

3. Dans ce paragraphe, nous donnerons une condition suffisante sous laquelle un opérateur sera partiellement hypoelliptique (PHE).

Soient d et A nombres positifs et $0 < d \leqq 1$. Alors posons

$$\Lambda(A, d) = \{\xi;\ (1 + |\xi'|^2)^d \geqq A(1 + |\xi''|^2)\}.$$

On dira qu'une fonction $\psi_1(\xi)$ est de type (A, d), si elle s'écrit sous la forme

$$\psi_1(\xi) = \rho(A(1 + |\xi''|^2)/(1 + |\xi'|^2)^d), \qquad \xi = (\xi', \xi''),$$

où $\rho(t) \in C^\infty([0, \infty))$, $0 \leqq \rho(t) \leqq 1$, $= 0$ pour $t > 1$ et $= 1$ pour $t < 1/2$.

DÉFINITION 3.1. — Un opérateur $P(x, D)$ est dit satisfaire la condition PHE en x' dans Ω, si

(*a*) $P(x, D)$ n'est identiquement nul dans aucune composante de Ω;

(*b*) Les coefficients sont dans $C^\infty(\Omega)$;

(*c*) Il existe des nombres d, k $(0 < d \leqq 1,\ 0 \leqq k < 1)$ et des fonctions $M_j(x, \xi)$ sur $\{(x, \xi);\ x \in \Omega,\ \xi \in \Lambda(A_x, d)\}$ tels que, pour tout α et β,

$$(3.1)\quad \begin{cases} |D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi)| \leqq C_{\beta,x}(1 + |\xi'|)^{-d|\alpha|} M^{\beta-\alpha}(x, \xi)\,|P(x, \xi)|, \\ \qquad\qquad \xi \in \Lambda(A_x, d); \end{cases}$$

$$(3.2)\quad \begin{cases} 1 \leqq M_i(x, \xi) \leqq C_x(1 + |\xi'|)^k (1 + |\xi''|)^{N_i}, & 1 \leqq i \leqq n', \\ 1 \leqq M_j(x, \xi) \leqq C_x(1 + |\xi''|)^{N_j}, & n' + 1 \leqq j \leqq n. \end{cases}$$

Ici, A_x, $C_{\beta,x}$ et C_x sont bornés quand x parcourt des sous-ensembles compacts de Ω, $N_j \in \mathbf{N}$ $(j = 1, \ldots, n)$, et $\xi = (\xi', \xi'')$ est une partition telle que $\xi' \in R^{n'}$, $\xi'' \in R^{n''}$. On pose

$$M^{\beta-\alpha} = M_1^{\beta_1-\alpha_1} \ldots M_n^{\beta_n-\alpha_n}.$$

PROPOSITION 3.1. — *Si un opérateur $P(x, D)$ vérifie la condition* PHE *en x' dans Ω, $P(x, D)$ n'est nul en aucun (x, ξ), $x \in \Omega$, $\xi \in \Lambda(A_x, d)$, et*

$$1/|P(x, \xi)| \leqq C_x(1 + |\xi|)^{m_x},\ \xi \in \Lambda(A_x, d),$$

où m_x est égale à l'ordre de $P(x, \xi)$ par rapport à ξ. Ici on désigne par C_x une quantité bornée si x parcourt un compact.

Démonstration. — Supposons que $P(x_0, \xi_0)$ soit nul pour un point $x_0 \in \Omega$ et un $\xi_0 \in \Lambda(A_{x_0}, d)$. De (3.1), on a

$$D_\xi^\alpha P(x_0, \xi_0) = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n.$$

Donc $P(x_0, \xi) = 0$ pour tout ξ. Les relations (3.1) et (3.2), avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, nous donne

$$|\operatorname{grad}_x P(x, \xi)| \leq C_{x,\xi} |P(x, \xi)|, \qquad \xi \in \Lambda(A_x, d).$$

Cela entraîne que $P(x, \xi) = 0$ pour tout ξ et tout x dans la composante de Ω contenant x_0, ce qui est en contradiction avec la condition PHE. Donc $P(x, \xi)$ n'est nul en aucun $x \in \Omega$, $\xi \in \Lambda(A_x, d)$.

Maintenant on voit facilement, de (3.1) et (3.2),

$$\tilde{P}(x, \xi) \leq C_x |P(x, \xi)|, \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \Lambda(A_x, d).$$

Le développement de Taylor nous montre que

$$\tilde{P}(x, 0) \leq C(1 + |\xi|)^{m_x} \tilde{P}(x, \xi).$$

Donc

$$1/|P(x, \xi)| \leq C_x(1 + |\xi|)^{m_x}/\tilde{P}(x, 0), \qquad \xi \in \Lambda(A_x, d).$$

On a vu, au début de la démonstration, que $\tilde{P}(x, 0) \neq 0$ dans Ω. D'où résulte la seconde moitié de la proposition.

Proposition 3.2. — *Si un opérateur $P(x, D)$ vérifie la condition* PHE *en x' dans Ω, il existe des fonctions $K_j(x, \xi)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ sur $\{(x, \xi);$ $x \in \Omega,\ \xi \in \Lambda(A_x, d)\}$ telles que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$(3.3) \quad \begin{cases} |D_\xi^\alpha D_x^\beta K_j(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,x,j}(1 + |\xi'|)^{-d(|\alpha|+j)} M^{\beta-\alpha}(x, \xi)/|P(x, \xi)|, \\ \qquad\qquad \xi \in \Lambda(A_x, d), \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} (2\pi)^n \varphi(x) = P(x, D) \displaystyle\int e^{ix\xi} \{K_0(x, \xi) + \ldots + K_j(x, \xi)\} \psi_1(\xi) \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \\ \qquad + \displaystyle\int e^{ix\xi} \{P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi) \psi_1(\xi) + \psi_0(\xi)\} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \\ \qquad\qquad \textit{pour } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega'), \end{cases}$$

$\Omega' \subset \Omega$ étant un ouvert relativement compact dans Ω, ψ_1 une fonction de type (A, d) $\left(A = \sup_{x \in \Omega'} A_x\right)$ et $\psi_0 = 1 - \psi_1$ [$M(x, \xi)$ et A_x ont la même signification qu'en (3.1)] [5].

Démonstration. — D'abord nous définissons des fonctions $K_j(x, \xi)$ sur $\{(x, \xi); x \in \Omega,\ \xi \in \Lambda(A_x, d)\}$ comme dessous :

$$(3.5) \quad \begin{cases} P(x, \xi) K_0(x, \xi) = 1, \\ P(x, \xi) K_j(x, \xi) + \displaystyle\sum_{\alpha \neq 0} P^\alpha(x, \xi) D_x^\alpha K_{j-1}(x, \xi)/\alpha! = 0. \end{cases}$$

---

[5] La proposition 3.1 et la formule (3.3) montrent que les intégrales figurant dans (3.4) sont absolument convergentes.

On va démontrer la relation (3.3) par induction. Pour des raisons de convenance, on pose $K_{-1} = 0$. Dans ce cas, on n'a qu'à démontrer :

(a) (3.3) est vraie pour j, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ si elle est vraie pour tout $j' < j$ et α, β;

(b) (3.3) est vérifiée si elle est vraie pour tout $j' \leq j$ et tout ν, $\mu \in \mathbf{N}^n$ tels que $|\nu| + |\mu| < |\alpha| + |\beta|$.

(a) est clair. Pour (b) on opère $D_\xi^\alpha D_x^\beta$ à (3.5), ce qui montre que $P(x, \xi) D_\xi^\alpha D_x^\beta K_j(x, \xi)$ est combinaison linéaire des termes

$$D_\xi^\gamma D_x^\delta P(x, \xi) \cdot D_\xi^\nu D_x^\mu K_j(x, \xi) \quad (\gamma + \nu = \alpha, \delta + \mu = \beta, |\nu| + |\mu| < |\alpha| + |\beta|)$$

et des termes

$$D_\xi^{\gamma+\varepsilon} D_x^\delta P(x, \xi) \cdot D_\xi^\nu D_x^{\mu+\varepsilon} K_{j-1} \quad (\gamma + \nu = \alpha, \delta + \mu = \beta, 0 \neq \varepsilon \in \mathbf{N}^n),$$

de sorte que la relation (3.3) avec j, α, β est déduite de l'hypothèse de l'induction au moyen de (3.1) et (3.3).

Maintenant nous voulons établir (3.4). En additionnant les équations (3.5) jusqu'à $j+1$, on aura

$$P(x, D_x + \xi)(K_0 + \ldots + K_j) + P(x, \xi) K_{j+1} = 1, \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \Lambda(A_x, d).$$

Par conséquent,

$$P(x, D_x + \xi)(K_0 + \ldots + K_j) \psi_1(\xi) + P(x, \xi) K_{j+1} \psi_1(\xi) + \psi_0 = 1,$$
$$x \in \Omega, \quad \xi \in R^n.$$

(3.4) résulte alors de la formule d'inversion de Fourier.

COROLLAIRE. — *Soit $P(x, D)$ un opérateur sur Ω vérifiant la condition* PHE *en x' dans Ω. Alors K_j ayant la même signification que dans la proposition* 3.2, *on a*

$$(3.6) \qquad |D_x^\beta(P(x, \xi) K_j(x, \xi))| \leq C_{\beta,x,j}(1 + |\xi'|)^{-dj}(1 + |\xi|)^{N|\beta|},$$

$$(3.7) \quad |D_\xi^\alpha D_x^\beta K_j(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,x,j}(1 + |\xi'|)^{m_x - d(|\alpha|+j) + k|\beta'|}(1 + |\xi''|)^{m_x + N|\beta|}$$

pour $\xi \in \Lambda(A_x, d)$, où $N = \max\{1, N_1, \ldots, N_n\}$ et $\beta = (\beta', \beta'')$.

PROPOSITION 3.3. — *Si $P(x, D)$ vérifie la condition* PHE *en x' dans Ω, l'opérateur adjoint la vérifie aussi.*

Démonstration. — Si l'on écrit

$$P(x, D) = \sum a_j(x) P_j(D),$$

où $P_j(D)$ sont les opérateurs D^α indexés comme une suite, alors

$$P^*(x, D) v = \sum_{\alpha, j} ((-D_x)^\alpha a_j(x)) \cdot P_j^\alpha(-D) v / \alpha!.$$

D'où

$$(3.8) \qquad P^*(x, -\xi) = \sum_\alpha (-1)^\alpha D_x^\alpha P^\alpha(x, \xi)/\alpha!,$$

ce qui entraîne, d'après (3.1) et (3.2),

$$|P^*(x, -\xi) - P(x, \xi)| \leq C_x(1 + |\xi'|)^{-d} |P(x, \xi)|, \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \Lambda(A_x, d).$$

Par conséquent, on peut trouver une constante $B_x \geq A_x$ telle que

$$(3.9) \qquad |P(x, \xi)| \leq 2\,|P^*(x, -\xi)|, \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \Lambda(B_x, d).$$

De (3.8), (3.1) et (3.2), on déduit immédiatement, en utilisant (3.9),

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta P^*(x, -\xi)| \leq C_{\beta, x}(1 + |\xi'|)^{-d|\alpha|} M^{\beta - \alpha}(x, \xi)\, |P^*(x, -\xi)|,$$
$$x \in \Omega, \quad \xi \in \Lambda(B_x, d),$$

ce qui démontre la proposition.

Énoncons maintenant le théorème principal de cet article :

THÉORÈME 3.1. — *Si un opérateur différentiel $P(x, D)$ sur Ω vérifie la condition* PHE *en x' dans Ω, il est partiellement hypoelliptique en x' dans Ω.*

Sommaire de la démonstration de ce théorème. — D'abord nous introduisons des noyaux de la manière suivante. Si $F(x, y)$ est dans $C_0^\infty(\Omega' \times R^n)$, nous posons

$$\hat{F}(x, \xi) = \int e^{-iy\xi} F(x, y)\, dy,$$

et écrivons

$$(3.10) \qquad \langle E_j(x, y), F(x, y)\rangle = (2\pi)^{-n} \iint e^{ix\xi} K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi)\, \hat{F}(x, \xi)\, d\xi\, dx,$$

$$(3.11) \qquad \begin{cases} \langle L_j(x, y), F(x, y)\rangle \\ \quad = (2\pi)^{-n} \displaystyle\iint e^{ix\xi} \{P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi)\, \psi_1(\xi) + \psi_0(\xi)\}\, \hat{F}(x, \xi)\, dx\, d\xi. \end{cases}$$

Ici K_j, Ω', ψ_1 et ψ_0 ont la même signification que dans la proposition 3.2. Les égalités (3.10) et (3.11) définissent bien des distributions sur $\Omega' \times R^n$, car chaque K_j est bornée par une puissance de ξ à l'infini, d'après le corollaire de la proposition 3.2. De ce même corollaire, on déduit aisément que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$, les fonctions

$$(3.12) \qquad \langle E_j(x, y), \varphi(y)\rangle_y = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi)\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi,$$

$$(3.13) \qquad \begin{cases} \langle L_j(x, y), \varphi(y)\rangle_y \\ \quad = (2\pi)^{-n} \displaystyle\int e^{ix\xi} \{P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi)\, \psi_1(\xi) + \psi_0(\xi)\}\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi \end{cases}$$

sont indéfiniment dérivables pour $x \in \Omega'$. Donc E_j et L_j sont régulières en x.

D'autre part, la formule d'inversion de Fourier, jointe à (3.4), montre que l'égalité (P 1) est vérifiée. Pour établir le théorème, il nous suffira donc d'établir (P 2) et (P 4) : ceci sera l'objet du paragraphe 4.

4. Proposition 4.1. — *Pour chaque j, $\langle E_j(x, y), f(x)\rangle_x$ est régulière en y' dans R^n, si $f(x) \in \mathcal{E}'(\Omega')$ est régulière en x' dans Ω', où Ω' est un ouvert contenu dans Ω et relativement compact dans Ω.*

Démonstration. — Soit $f(x) \in \mathcal{E}'(\Omega')$ régulière en x' dans Ω'; quel que soit l'entier $s \geq 0$, il existe un entier $t_s \geq 0$ tel que $f \in H^{s, -t_s}$ et $t_s \geq t_{s'}$ si $s \geq s'$ (*voir* [2]). D'où il résulte qu'il existe une constante $C_s > 0$ telle que

$$(4.1) \qquad \langle D^s_{x'} f, \psi(x)\rangle \leq C_s \|\psi\|_{0, t_s} \quad (^6), \qquad \psi \in \mathcal{D}(R^n).$$

On déduit de (3.7) et (3.12)

$$\langle\langle E_j(x, y), f(x)\rangle_x, \varphi(y)\rangle = (2\pi)^{-n} \int \langle f(x), e^{ix\xi} K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi)\rangle\, \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi,$$
$$\varphi \in \mathcal{D}(R^n),$$

d'où

$$\mathcal{F}^*_y [\langle E_j(x, y), f(x)\rangle_x] \quad (^7) \quad = (2\pi)^{-n} \langle f(x), e^{ix\xi} K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi)\rangle.$$

De là, pour tout α',

$$(4.2) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{F}^*_y [\langle E_j(x, y), f(x)\rangle_x] (\xi')^{\alpha'} \\ &= (2\pi)^{-n} \langle f(x), (D^{\alpha'}_{x'} e^{ix\xi}) K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi)\rangle \\ &= \sum_{\beta' + \gamma' = \alpha'} C_{\beta', \gamma'} \langle D^{\gamma'}_{x'} f(x), e^{ix\xi} (D^{\beta'}_{x'} K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\rangle. \end{aligned}$$

Soit $\alpha(x) \in \mathcal{D}(\Omega')$, et égale à 1 sur le support de f. Alors en utilisant (4.1),

$$(4.3) \qquad \begin{aligned} &|\langle D^{\gamma'}_{x'} f(x), e^{ix\xi} D^{\beta'}_{x'} (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\rangle| \\ &\leq C_{\gamma'} \| D^{\beta'}_{x'} (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, e^{ix\xi} \alpha(x) \|_{0, t_{|\gamma'|}} \\ &\leq C_{\gamma'} \left\| \sum_{|\mu'' + \nu''| = t_{|\gamma'|}} C_{\mu'', \nu''} D^{\mu''}_{x''} D^{\beta'}_{x'} (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, D^{\nu''}_{x''} (e^{ix\xi} \alpha(x)) \right\|_{L^2_x}, \end{aligned}$$

où μ'', $\nu'' \in \mathbf{N}^{n''}$.

---

(6) $\|f\|^2_{s,t} = \int |\hat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi'|^2)^s (1 + |\xi''|^2)^t\, d\xi$ pour $f \in H^{s,t}$.

(7) On désigne par $\mathcal{F}^*$ la transformée réciproque de Fourier.

D'après (3.7), il résulte que

$$(4.4)\qquad \| D^{\mu''}_{x''} D^{\beta'}_{x'} (K_j(x,\xi)\,\psi_1(\xi))\, D^{\nu''}_{x''}(e^{ix\xi}\alpha(x))\|_{L^2_x} \\ \leq C\,(1+|\xi'|)^{m-dj+k|\alpha'|}\,(1+|\xi''|)^{m+N(|\alpha'|+t_{|\alpha'|})}$$

avec

$$\beta'+\gamma'=\alpha', \qquad |\mu''+\nu''|\leq t_{|\alpha'|}.$$

Ici $m=\max_{x\in\Omega'} m_x$.

Il suit de (4.2), (4.3) et (4.4) que

$$|\mathcal{F}^\star_y[\langle E_j(x,y), f(x)\rangle_x]| \leq C(1+|\xi'|)^{m-dj-(1-k)r}(1+|\xi''|)^{m+N(r+t_r)}$$

pour tout $r\in\mathbf{N}$. Soit s un nombre quelconque. Prenons r assez grand pour que

$$s+m-dj-(1-k)\,r<-n'/2,$$

et posons

$$l=n''/2+m+N(r+t_r)+1.$$

Alors nous obtenons

$$\mathcal{F}^\star_y[\langle E_j(x,y), f(x)\rangle_x]\,(1+|\xi'|)^s\,(1+|\xi''|)^{-l}\in L^2_\xi.$$

Donc $\langle E_j(x,y), f(x)\rangle_x$ est régulière en y' dans Ω' (*voir* [2]).

PROPOSITION 4.2. — *Pour chaque j, $E_j(x,y)$ est indéfiniment dérivable dans $\Omega'\times R^n-\{(x,x);\, x\in\Omega\}$.*

Démonstration. — Pour $\alpha\in\mathbf{N}^n$ et $F(x,y)\in\mathcal{D}(\Omega'\times R^n)$, on a

$$(4.5)\qquad \langle (x-y)^\alpha E_j(x,y), F(x,y)\rangle \\ =(2\pi)^{-n}\iint(-D_\xi)^\alpha\,(K_j(x,\xi)\,\psi_1(\xi))\,e^{ix\xi}\hat{F}(x,\xi)\,d\xi\,dx,$$

où l'on a utilisé la formule

$$\mathcal{F}_y[(x-y)^\alpha\,F(x,y)]=e^{-ix\xi}\,D^\alpha_\xi\big(e^{ix\xi}\,\hat{F}(x,\xi)\big).$$

D'après (3.7), on a

$$(-D_\xi)^\alpha\,(K_j(x,\xi)\,\psi_1(\xi))\,|\leq C(1+|\xi'|)^{m-d(|\alpha|+j)}(1+|\xi''|)^m \\ \leq C(1+|\xi'|)^{m+(m+n''+1)d-d(|\alpha|+j)}(1+|\xi''|)^{-(n''+1)}, \qquad x\in\Omega',$$

puisqu'on peut facilement déduire

$$|D^{\alpha'}_{\xi'}D^{\alpha''}_{\xi''}\psi_1(\xi)|\leq C_\alpha(1+|\xi'|)^{-d|\alpha|}, \qquad \alpha=(\alpha',\alpha''),$$

de la définition de $\psi_1(\xi)$, et puisque $\psi_1(\xi) = 0$ en dehors de $\Lambda(A, d)$. Prenons α assez grand pour que

$$(4.6) \qquad m + (m + n'' + 1)\, d - d(|\alpha| + j) < -n'.$$

Alors on déduit de (4.5) que

$$\langle (x-y)^\alpha E_j(x, y), F(x, y) \rangle$$
$$= \iint dx\, dy\, F(x, y)\, (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} (-D_\xi)^\alpha (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, d\xi,$$

pour α vérifiant (4.6), d'où

$$(4.7) \quad (x-y)^\alpha E_j(x, y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\xi} (-D_\xi)^\alpha (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, d\xi.$$

Si l'on pose

$$D_x^\beta D_y^\gamma \{ D_\xi^\alpha (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, e^{ix\xi - iy\xi} \}$$
$$= \sum_{\nu+\mu=\beta} C_{\nu,\mu} D_x^\mu D_\xi^\alpha (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi)) . \xi^{\nu+\gamma} e^{ix\xi - iy\xi}$$

($\nu, \mu \in \mathbf{N}^n$), on trouve d'après (3.7) que

$$| D_x^\beta D_y^\gamma \{ D_\xi^\alpha (K_j(x, \xi)\, \psi_1(\xi))\, e^{i(x-y)\xi} \} |$$
$$\leq C(1 + |\xi''|)^{m+|\beta|+|\gamma|-d(|\alpha|+j)} (1 + |\xi''|)^{m+N|\beta|+|\gamma|}$$
$$\leq C(1 + |\xi'|)^{m+|\beta|+|\gamma|-d(|\alpha|+j)+(m+N|\beta|+|\gamma|+n''+1)d} (1 + |\xi''|)^{-(n''+1)}.$$

On voit donc que le second membre de (4.7) a des dérivées continues jusqu'à l'ordre p inclusivement par rapport à (x, y), si l'on prend α assez grand pour que

$$(4.8) \qquad m + p - d(|\alpha| + j) + (m + Np + n'' + 1)\, d < -n'.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.2.

De la proposition 4.2, il est clair que les noyaux $E_j(x, y)$ vérifient la propriété (N 3). On va finalement démontrer que les noyaux $L_j(x, y)$ vérifient (P 4).

PROPOSITION 4.3. — *Soit $S \in \mathcal{E}'(\Omega')$. Alors, quel que soit le nombre réel s, il existe un j et un t tels que*

$$\langle L_j(x, y), S(x) \rangle \in H^{s,t}(R^n),$$

où Ω' est le même que dans la proposition 4.1.

Démonstration. — Notons d'abord que $L_j(x, y)$ est régulière en x. On a alors, d'après (3.13),

$$(4.9) \qquad \mathcal{F}_y^\star [\langle L_j(x, y), S(x) \rangle]$$
$$= (2\pi)^{-n} \langle S(x), e^{ix\xi} P(x, \xi)\, K_{j+1}(x, \xi)\, \psi_1(\xi) \rangle + (2\pi)^{-n} \hat{S}(-\xi)\, \psi_0(\xi).$$

Il est clair qu'il existe une constante $C > 0$ et un entier $l \geqq 0$ tels que

$$|\hat{S}(-\xi)| \leqq C(1+|\xi|)^l, \qquad \xi \in R^n.$$

En utilisant le fait que $\psi_0(\xi) = 0$ dans $\Lambda(2A, d)$, on déduit

$$(4.10) \quad \int |\hat{S}(-\xi)\psi_0(\xi)|^2 (1+|\xi'|)^{2s}(1+|\xi''|)^{2t} d\xi$$
$$\leqq C \int_{\complement \Lambda(2A,d)} (1+|\xi'|)^{-(n'+\varepsilon)}(1+|\xi'|)^{2s+2l+n'+\varepsilon}(1+|\xi''|)^{2t+2l} d\xi$$
$$\leqq C \int (1+|\xi'|)^{-(n'+\varepsilon)}(1+|\xi''|)^{\frac{1}{d}(2s+2l+n'+\varepsilon)+2t+2l} d\xi,$$

où ε est un nombre positif et vérifie l'inégalité

$$2s+2l+n'+\varepsilon \geqq 0.$$

Si l'on prend t de manière que

$$\frac{1}{d}(2s+2l+n'+\varepsilon)+2t+2l < -n'',$$

le dernier membre de (4.10) est fini.

Maintenant, il est aussi clair qu'il existe une constante $C > 0$ et un entier $r > 0$ tels que

$$|\langle S, \varphi \rangle| \leqq C \sum_{|\delta| \leqq r} \sup_{x \in \mathrm{Supp}[S]} |D^\delta \varphi(x)|, \qquad \varphi \in \mathcal{E}.$$

Ceci entraîne évidemment que

$$|I_j(\xi)| \leqq C \sum_{|\delta| \leqq r} \sup_{x \in \mathrm{Supp}[S]} |D_x^\delta (P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi) \psi_1(\xi) e^{ix\xi})|,$$

où

$$I_j(\xi) = \langle S(x), e^{ix\xi}(P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi) \psi_1(\xi) e^{ix\xi}) \rangle.$$

Si $\beta + \gamma = \delta$, on déduit de (3.6)

$$\sup_{x \in \mathrm{Supp}[S]} |D_x^\beta (P(x, \xi) K_{j+1}(x, \xi) \psi_1(\xi)) D_x^\gamma e^{ix\xi}|$$
$$\leqq C(1+|\xi'|)^{-d(j+1)+N|\delta|}(1+|\xi''|)^{N|\delta|}.$$

Soient s et t des nombres quelconques. Alors,

$$|I_j(\xi)|(1+|\xi'|)^s(1+|\xi''|)^t \leqq C(1+|\xi'|)^{s-d(j+1)+N|\delta|}(1+|\xi''|)^{N|\delta|+t}.$$

Si l'on prend j et t de manière que

$$s - d(j+1) + N|\delta| < -n'/2,$$
$$N|\delta| + t < -n''/2,$$

on a

$$I_j(\xi)(1+|\xi'|)^s(1+|\xi''|)^t \in L^2_\xi.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition 4.3.

5. — Dans le dernier paragraphe, nous démontrerons le théorème dont on déduit qu'un opérateur, appartenant à la classe d'opérateurs (formellement partiellement hypoelliptiques) que MIZOHATA a introduit dans [4], vérifie la condition PHE. Et d'après HÖRMANDER, nous donnerons quelques exemples d'opérateurs qui vérifient la condition PHE, mais pas formellement partiellement hypoelliptiques.

THÉORÈME 5.1. — *Soit $P(x, D)$ un opérateur à coefficients appartenant à $C^\infty(\Omega)$ et n'étant identiquement nul dans aucune composante de Ω. Pour que $P(x, D)$ vérifie la condition* PHE *en x' dans Ω, il faut et il suffit qu'il s'écrive sous la forme*

$$P(x, D) = P_0(x, D_{x'}) + \sum_{j>0} P_j(x, D_{x'})\, Q_j(D_{x''}),$$

avec

$$(5.1)\quad \begin{cases} |D_{\xi'}^{\alpha'} D_{x}^{\beta} P_j(x, \xi')| \\ \qquad \leq C_{\beta,x}(1+|\xi'|)^{-d(|\alpha'|+l_j)} M^{\beta-\alpha'}(x, \xi')\, \tilde{P}_0(x, \xi'), \qquad \xi \in R^n, \\ 1 \leq M_i(x, \xi') \leq C_x(1+|\xi'|)^k, \qquad 1 \leq i \leq n', \\ 1 \leq M_j(x, \xi') \leq C_x, \qquad n'+1 \leq j \leq n \end{cases}$$

pour tout α', β, les $Q_j(\xi'')$ étant des opérateurs à coefficients constants, les d, k et l_j constants avec $0 < d \leq 1$, $0 \leq k < 1$, $l_0 = 0$, $1 \geq l_j > 0$ $(j > 0)$, et C_x, $C_{\beta,x}$ bornés quand x parcourt un compact de Ω.

Démonstration de la suffisance. — D'abord nous notons que, pour un A_x,

$$P_0(x, \xi') \leq 2|P_0(x, \xi')|, \qquad |\xi'| \geq A_x.$$

Supposons que (5.1) ait lieu. Soit $l = \min_{j>0} l_j$, $p = \max_j (\deg Q_j, 1)$ et $d' = dl/p$. Si $B_x(\geq 1)$ est assez grand, $\xi \in \Lambda(B_x, d')$ entraîne $|\xi'| \geq A_x$. Pour $\xi \in \Lambda(B_x, d')$ et $j > 0$, alors

$$(5.2)\quad \begin{aligned} &|D_\xi^\alpha D_x^\beta(P_j(x, \xi')\, Q_j(\xi''))| \\ &\quad \leq C_{x,\beta}(1+|\xi'|)^{-d(|\alpha'|+l)} M^{\beta-\alpha'}(x, \xi')(1+|\xi''|)^{p-|\alpha''|}|P_0(x, \xi')| \\ &\quad \leq C_{x,\beta}(1+|\xi'|)^{-d(|\alpha'|+l)+d'(p-|\alpha''|)} M^{\beta-\alpha'}(x, \xi')|P_0(x, \xi')| \\ &\quad \leq C_{x,\beta}(1+|\xi'|)^{-d'|\alpha'|} M^{\beta-\alpha'}(x, \xi')|P_0(x, \xi')|, \end{aligned}$$

où $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ et $p - |\alpha''| \geqq 0$. De plus,

$$
\begin{aligned}
(5.3) \qquad |P(x, \xi)| &\geqq |P_0(x, \xi')| - C\sum_{j>0} |P_j(x, \xi')| (1 + |\xi''|)^p \\
&\geqq |P_0(x, \xi')| (1 - B_x^{-p} C_x) \\
&\geqq \frac{1}{2} |P_0(x, \xi')|, \qquad \xi \in \Lambda(B_x, d'),
\end{aligned}
$$

si l'on prend B_x suffisamment grand.

De (5.1), (5.2) et (5.3), on déduit que $P(x, D)$ vérifie la condition PHE en x'.

Démonstration de la nécessité. — Supposons que $P(x, \xi)$ vérifie la condition PHE en x'. Alors $P(x, \xi)$ peut s'écrire sous la forme

$$P(x, \xi) = P_0(x, \xi') + \sum_{\gamma''>0} P_{\gamma''}(x, \xi'')\, Q_{\gamma''}(\xi'') \qquad (\gamma'' \in \mathbf{N}^{n''}),$$

avec

$$
\begin{aligned}
P_{\gamma''}(x, \xi') &= P^{\gamma}(x, \xi)\,|_{\xi''=0} \\
Q_{\gamma''}(\xi'') &= C_{\gamma''}(\xi'')^{\gamma''} \qquad (C_{\gamma''} \text{ sont constants}).
\end{aligned}
$$

D'où il résulte que pour tout γ'' et quelques $B_x \geqq A_x$,

$$
\begin{aligned}
(5.4) \qquad &|D_{\xi'}^{\alpha'} D_x^{\beta} P_{\gamma''}(x, \xi')| \\
&\leqq C_{\beta,x}(1 + |\xi'|)^{-d(|\alpha'|+|\gamma''|)} M^{\beta-\alpha'}(x, \xi, 0)\, |P_0(x, \xi')|, \qquad |\xi'| \geqq B_x.
\end{aligned}
$$

On vérifie aisément qu'il existe une constante C_x telle que

$$(5.5) \qquad |P_0(x, \xi')| \leqq C_x \tilde{P}_0(x, \xi')$$

(*voir* proposition 3.1). De (5.4) et (5.5), la nécessité résulte.

EXEMPLE 1. — L'opérateur

$$P(x, y, D_x, D_y) = 1 + |x|^{2\nu} a(x, y)\, \Delta_x^{\mu} + \sum_{0 \leqq |\alpha| < 2\mu} b_\alpha(x, y)\, D_x^{\alpha} Q_\alpha(D_y)$$

vérifie la condition PHE en x, si

$$\nu > \mu, \qquad \nu, \mu \in \mathbf{N}, \qquad a(x, y) \in C_{x,y}^{\infty}, \qquad (-1)^{\mu} a(x, y) > 0,$$

$$b_\alpha(x, y) \in C_{x,y}^{\infty}, \qquad D_x^{\beta} b_\alpha(x, y) = 0 \quad \text{à } x = 0 \quad \text{pour } |\beta| \leqq \frac{\nu}{\mu} |\alpha|,$$

les $Q_\alpha(D_y)$ étant des opérateurs à coefficients constants.

EXEMPLE 2. — L'opérateur

$$P(x, t, y, D_x, D_t, D_y) = 1 + |x|^{2\nu} a(x, t, y) \left\{ \Delta_x^\mu + i \left(\frac{\partial}{i\,\partial t} \right)^m \right\}$$
$$+ \sum_{\alpha, i} b_{\alpha,i}(x, t, y) D_x^\alpha D_t^i Q_{\alpha,i}(D_y), \qquad \left(\frac{|\alpha|}{2\mu} + \frac{i}{m} < 1 \right)$$

vérifie la condition PHE en (x, t), si

$$\nu > \mu, \qquad m \leqq 2\mu,$$
$$a(x, t, y) \in C^\infty_{x,t,y}, \qquad (-1)^\mu a(x, t, y) > 0,$$
$$b_{\alpha,i}(x, t, y) \in C^\infty_{x,t,y},$$
$$D_x^\beta b_{\alpha,i}(x, t, y) = 0 \quad \text{à } x = 0 \qquad \text{pour } |\beta| \leqq 2\nu \left(\frac{|\alpha|}{2\mu} + \frac{i}{m} \right),$$

les $Q_{\alpha,i}(D_y)$ étant des opérateurs à coefficients constants.

EXEMPLE 3. — L'opérateur

$$P(x, y, D_x, D_y) = 1 + D_{x_1}^{2m} + D_{x_2}^{2n} + ia(x, y) D_{x_1}^a D_{x_2}^b$$
$$+ \sum_{i,j} b_{ij}(x, y) D_{x_1}^i D_{x_2}^j Q_{ij}(D_y), \qquad \left(\frac{i}{2m} + \frac{j}{2n} < 1 \right)$$

$(x = (x_1, x_2))$ vérifie la condition PHE en x, si

$$\frac{a-1}{2m} + \frac{b}{2n} < 1, \qquad \frac{a}{2m} + \frac{b-1}{2n} < 1,$$
$$a(x, y) \in C^\infty_{x,y} \text{ à valeurs réelles,}$$
$$b_{ij}(x, y) \in C^\infty_{x,y},$$

les $Q_{ij}(D_y)$ étant des opérateurs à coefficients constants.

D'après le théorème 5.1 et les exemples donnés par HÖRMANDER [3], on peut vérifier que les opérateurs figurant dans les exemples 1, 2 et 3 satisfont la condition PHE avec

$$M(x, \xi) = \{ (1 + |\xi|^{2\mu})/(1 + |x|^{2\nu} |\xi|^{2\mu}) \}^{\frac{1}{2\nu}},$$
$$M(x, \xi, \eta) = \{ (1 + |\xi|^{2\mu} + |\eta|^m)/(1 + |x|^{2\nu}(|\xi|^{2\mu} + |\eta|^m)) \}^{\frac{1}{2\nu}},$$

et

$$M(\xi) = (1 + \xi_1^{2m} + \xi_2^{2n} + |\xi_1^a \xi_2^b|)/(1 + \xi_1^{2m} + \xi_2^{2n})$$

respectivement; chacun des opérateurs

$$1 + |x|^{2\nu} a(x, y) \Delta_x^\mu, \quad 1 + |x|^{2\nu} a(x, t, y) \left\{ \Delta_x^\mu + i \left(\frac{\partial}{i\,\partial t} \right)^m \right\},$$

et

$$1 + D_{x_1}^{2m} + D_{x_2}^{2n} + ia(x, y) D_{x_1}^a D_{x_2}^b$$

correspond à P_0 du théorème 5.1.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] FRIBERG (J.). — Estimates for partially hypoelliptic differential operators, *Meddel. Lunds Univ. Mat. Semin.*, t. 17, 1963, 97 pages.

[2] GÅRDING (L.) et MALGRANGE (B.). — Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques, *Math. Scand.*, t. 9, 1961, p. 5-21.

[3] HÖRMANDER (L.). — Hypoelliptic differential operators, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, t. 11, 1961, p. 477-492.

[4] MIZOHATA (S.). — Une remarque sur les opérateurs différentiels hypoelliptiques et partiellement hypoelliptiques, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. 1, 1961-1962, p. 411-423.

[5] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*, t. 1, 2e édition. — Paris, Hermann, 1957 (Act. scient. et ind., 1091-1245; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9).

(Manuscrit reçu le 13 juin 1966.)

Yoshio KATO,
Mathematical Institute,
Faculty of Science,
Nagoya University,
Chikusa-ku,
Nagoya (Japon).