YVONNE CHOQUET-BRUHAT

Théorème global d'unicité pour les solutions des équations d'Einstein

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 181-192

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__181_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 181 à 192.

THÉORÈME GLOBAL D'UNICITÉ POUR LES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN

PAR

Mme Yvonne CHOQUET-BRUHAT,
Institut Poincaré Paris.

Introduction.

On connaît depuis longtemps un théorème d'existence local, et depuis encore plus longtemps (Stellmacher, 1937) un théorème d'unicité « géométrique » local des solutions du problème de Cauchy pour les équations d'Einstein du vide (théorème en fait d'isométrie locale). On a démontré depuis de nombreux théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations de divers milieux matériels, théorèmes toujours locaux.

Il n'est pas question de démontrer un théorème général d'existence global. Un tel théorème ne peut pas exister pour des équations non linéaires comme celle de la Relativité générale. D'ailleurs, plusieurs théorèmes récents, dus essentiellement à R. Penrose et à S. Hawking montrent, dans un certain nombre de cas, que les espaces-temps einsteiniens développent effectivement des singularités : de nombreux travaux sont encore à faire sur ce sujet (1).

Je me propose, dans cet article, de donner un théorème global d'unicité géométrique pour les espaces-temps einsteiniens prolongeant un espace-temps donné, vérifiant certaines hypothèses locales et globales de régularité. Nous faisons ici la démonstration pour les espaces-temps einsteiniens du vide auxquels nous réservons cette dénomination. La démonstration s'étendrait aisément aux équations relativistes des divers milieux matériels couplées avec les équations d'Einstein, si ces

(1) En particulier, l'existence globale d'un espace-temps einsteinien régulier partout non minkowskien, mais ayant un comportement minkovskien à l'infini, par exemple sous des hypothèses de champ gravitationnel faible, est toujours un problème ouvert, bien que le « problème des conditions initiales » correspondant ait été résolu par Araki (cas initialement statique) et par Mme Vaillant (cas général).

équations forment un système hyperbolique strict ou non, au sens de J. LERAY.

Un des intérêts du théorème d'unicité donné ici, ou plutôt de sa démonstration, est de mettre en évidence la nécessité de ses hypothèses pour avoir cette unicité.

1. Définitions.

Un espace-temps est une variété V_4, de dimension 4, séparée, dénombrable à l'infini, différentiable de classe C^p ($p \geqq 1$) munie d'une métrique riemannienne hyperbolique normale, tenseur deux fois covariant symétrique g, de type $(+ - - -)$; l'espace-temps (V_4, g) est dit de classe C^q si g est de classe C^q ($q \leqq p - 1$).

Deux espaces-temps (V_4, g) et (V'_4, g') sont considérés comme physiquement identiques [2] s'ils sont isométriques, c'est-à-dire s'il existe un difféomorphisme f de V'_4 sur V_4

$$V'_4 \xrightarrow{f} V_4$$

tel que le tenseur g' soit l'image réciproque par f du tenseur g

$$g' = f^\star g.$$

Un espace-temps (V_4, g) est dit einsteinien si le tenseur de Ricci correspondant à son tenseur métrique est nul. Ce tenseur est défini de façon classique si g est deux fois dérivable [3].

DÉFINITION 1. — *Nous dirons dans la suite qu'un espace-temps est* régulier *si*

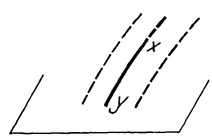

Fig. 1.

(*a*) (V_4, g) *est muni d'une orientation temporelle globale;*

(*b*) *pour tout point* $x \in V_4$ *et tout arc géodésique strictement temporel* γ *aboutissant en* x, *il existe des coordonnées de Gauss, relatives à un morceau d'hypersurface différentiable orthogonale à* γ *en un point* $y \neq x$, *et totalement géodésique en ce point, qui sont définies dans un ouvert contenant* x; *dans ces coordonnées, la métrique est régulière* [4] *au sens de* [3], § 4.

---

(2) Cette identité joue un rôle important dans les travaux récents de J. A. WHEELER [9].

(3) Nous étudions ailleurs les espaces-temps munis de métriques peu régulières, avec un tenseur de Ricci défini au sens des distributions.

(4) L'hypothèse de régularité implique que g est de classe C^1, elle est vérifiée, en particulier, si g est de classe C^5.

DÉFINITION 2. — *Un espace-temps sera dit* complet vers le futur *s'il existe un nombre k tel que les coordonnées de Gauss définies ci-dessus dans un voisinage de $y \in \gamma$ sont définies, quels que soient γ et y dans un voisinage tubulaire de γ de longueur k (pour la métrique définie > 0 induite sur γ par g). Toutes les géodésiques temporelles peuvent alors être prolongées indéfiniment vers le futur.*

2. Globale hyperbolicité.

Cette notion a été introduite par J. LERAY [6] pour la démonstration de théorèmes d'existence globaux de solutions d'équations hyperboliques linéaires, elle implique (*cf.* Y. CHOQUET-BRUHAT [2]) la propriété de « forte causalité » introduite par PENROSE et HAWKING ([8], [4]).

DÉFINITION 3. — *Un espace-temps est dit globalement hyperbolique si l'ensemble des chemins temporels ou isotropes, joignant deux points, est compact ou vide, pour la topologie de l'espace des chemins.*

Il est immédiat que cette définition entraîne qu'il ne peut exister de chemins temporels fermés. On montre qu'il ne peut pas exister non plus de chemin temporel presque fermé (forte causalité) : tout ouvert de V_4 contient un ouvert sur lequel la trace d'un chemin temporel est un ensemble connexe.

DÉFINITION 4. — *L'ensemble $P \subset V_4$ est dit compact vers le passé si l'ensemble des chemins temporels, issus de P, aboutissant en un point x, est compact ou vide pour tout x.*

On désigne par ε_P^+ l'ensemble (considéré comme sous-ensemble de V_4) des chemins temporels issus de l'ensemble $P \subset V_4$, par ε_P^- ceux aboutissant en P.

3. Énoncé du théorème global d'unicité.

HYPOTHÈSE (1). — *(V_4, g) et (V'_4, g') sont deux espaces-temps einsteiniens réguliers et globalement hyperboliques, (V'_4, g') est complet* (5) *vers le futur.*

HYPOTHÈSE (2). — *P (resp. P') étant un ensemble compact vers le passé de (V_4, g) [resp. (V'_4, g')], tel que $P = \varepsilon_P^+$ (resp. $P' = \varepsilon_{P'}^+$), il existe une isométrie f de* (6) *$\complement P$ sur $\complement P'$.*

Conclusion. — Il existe une isométrie de (V_4, g) sur (D', g'), où D' est un ouvert de V'_4.

La démonstration du théorème reposera sur les lemmes suivants.

(5) La nécessité de cette hypothèse de complétude m'a été soulignée par GEROCH dans des conversations au Battelle Institute, à Seattle.

(6) $\complement P$ désigne le complémentaire de P.

4. Quelques lemmes.

LEMME 1. — *A tout point* $x \in \partial \varepsilon_p^+$, *on peut faire correspondre un point* $x' \in \partial \varepsilon_p^+$, *tel que* x *et* x' *admettent respectivement des voisinages ouverts* U *et* U' *qui peuvent être rapportés à des coordonnées* $\{x^\alpha\}$ *et* $\{x^{\alpha'}\}$ *qui sont :*

(*a*) *adaptées à l'isométrie* f *dans* $U_- = \complement \varepsilon_p^+ \cap U$ *et* $U'_- = f(U_-) \subset U'$, *c'est-à-dire que, si* $x \in U_-$ *et* $x' = f(x)$, *on a* $x^\alpha = x'^\alpha$ *et*

$$g_{\lambda\mu}(x^\alpha) = g'_{\lambda\mu}(x'^\alpha) \qquad \text{pour} \quad x^\alpha = x'^\alpha;$$

(*b*) *dans les fermetures* $\overline{U}_-$ *et* $\overline{U}'_-$ *de* U_- *et* U'_- *relativement à* U *et* U', *les relations* (1) *sont valables, ainsi que des relations analogues pour les dérivées partielles d'ordre* $\leqq 1$.

Preuve.

(*a*) Soient γ un arc géodésique strictement temporel aboutissant à $x \in \partial \varepsilon_p^+$, y un point sur γ telle que les coordonnées de Gauss relatives à Σ (orthogonale à γ et totalement géodésique en y) soient définies dans un ouvert U contenant x. Puisque y est intérieur à ε_x^- (*cf.* [2] et [1], lemme § 9), il est intérieur à $\complement \varepsilon_p^+$ et l'on peut toujours prendre le morceau Σ intérieur à $\complement \varepsilon_p^+$, ce que nous supposons fait. Les coordonnées de Gauss d'un point $x \in U$ sont alors définies par x^i, coordonnées du point de Σ où la géodésique temporelle orthogonale à Σ passant par x coupe Σ, et x^0 distance, sur cette géodésique, de x à Σ.

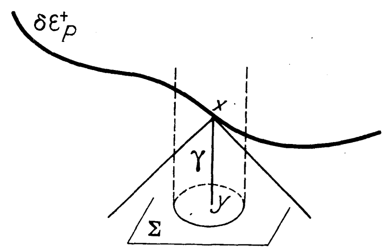

Fig. 2.

$\partial \varepsilon_p^+ \cap U$ sépare U en deux ouverts disjoints, U_- et U_+, puisque les géodésiques temporelles (lignes coordonnées) coupent $\partial \varepsilon_p^+ \cap U$ en un point, unique car deux points de $\partial \varepsilon_p^+$ ne peuvent jamais être joints par un chemin temporel (*cf.* [2], lemme § 9).

Désignons par Σ', γ' l'image de Σ et γ (privé du point x) par l'isométrie f. Le morceau d'hypersurface Σ' est orthogonal à la géodésique γ' en $y' = f(y)$ et totalement géodésique en ce point : l'image par f ainsi construite des coordonnées de Gauss (x^α) dans U_- donne des coordonnées de Gauss (x'^α) dans $U'_- = f(U_-)$ et, dans ces coordonnées, l'isométrie f entre U_- et U'_- est donnée par

$$g_{\lambda\mu}(x^\alpha) = g'_{\lambda\mu}(x'^\alpha) \qquad (x^\alpha = x'^\alpha).$$

(*b*) D'après l'hypothèse (1), les coordonnées de Gauss définies en (*a*) peuvent être étendues à un voisinage tubulaire $U' \supset U'_-$ de γ', qui peut lui-même être prolongé jusqu'à une distance k de $y' = f(y)$ (dans la métrique g', sur l'arc γ'). Soit x' le point de cet arc prolongé, situé à la même distance de x' sur γ' (pour la métrique induite par g') que y l'était de x sur γ (pour la métrique induite par g).

Montrons que x' est sur $\partial\varepsilon^+_{p'}$: soit x_n une suite de points de γ tendant vers x, alors, sur γ, dans la métrique induite sur γ par g :

$$d(x, x_n) = x^0 - x^0_n \to 0 \qquad (x^i_n = x^i).$$

La suite $x'_n = f(x_n)$ sur γ' tend alors vers x', d'après les hypothèses et la définition de x' donc, puisque $x'_n \in \complement\,\varepsilon^+_{p'}$, $x' \in \complement\,\varepsilon^+_{p'} \cap U' = \overline{U'}$; mais x' ne peut être un point intérieur à $\complement\,\varepsilon^+_{p'}$, sinon on pourrait prolonger γ' à l'intérieur de $\complement\,\varepsilon^+_{p'}$, donc par l'isométrie f^{-1}, on prolongerait γ à l'intérieur de $\complement\,\varepsilon^+_{p}$, ce qui est impossible puisque $x \in \partial\varepsilon^+_{p}$. D'où

$$x' \in \partial\varepsilon^+_{p'} \cap U'.$$

La correspondance entre $\partial\varepsilon^+_p \cap U$ et $\partial\varepsilon^+_{p'} \cap U'$, que nous venons de définir, est fournie dans les coordonnées de Gauss considérées par l'application bijective $x^\alpha = x'^\alpha$ (puisque $\partial\varepsilon^+_{p'}$ est coupé en un seul point, comme $\partial\varepsilon^+_p$ par les arcs géodésiques temporels).

L'hypothèse faite sur les métriques g et g' d'être de classe C^4 montre alors que, dans les coordonnées de Gauss envisagées, on a

$$(4.1) \qquad g_{\lambda\mu}(x^\alpha) = g'_{\lambda\mu}(x'^\alpha) \qquad (x^\alpha = x'^\alpha)$$

et des égalités analogues pour les dérivées partielles d'ordre $\leqq 1$ si $\{x^\alpha\}$ et $\{x'^\alpha\}$ sont respectivement les coordonnées d'un point $x \in \overline{U}_-$ et du point $x' = \overline{f}(x) \in \overline{U}'$.

Remarque. — Dans les coordonnées de Gauss, les métriques g et g' se réduisent en fait à

$$g: \quad (dx^0)^2 - g_{ij}(x^\alpha)\, dx^i dx^j,$$
$$g': \quad (dx'^0)^2 - g_{ij}(x'^\alpha)\, dx^i dx^j,$$

$\partial \varepsilon_P^+$ et $\partial \varepsilon_{P'}^+$ ont pour équation locale dans ces coordonnées au voisinage de x et x' respectivement,

$$x^0 + \tau(x^i) = 0 \qquad \text{et} \qquad x'^0 + \tau(x^i) = 0,$$

où τ est une fonction continue des x^i.

(4.1) se réduit à

$$(4.2) \qquad g_{ij}(x^\alpha) = g'_{ij}(x^\alpha) \qquad \text{pour} \quad x^0 + \tau(x^i) \leqq 0.$$

LEMME 2. — *La correspondance locale entre $\partial \varepsilon_P^+$ et $\partial \varepsilon_{P'}^+$, établie par le lemme* 1, *ne dépend pas du choix de γ, et est injective.*

Preuve. — Montrons d'abord que la correspondance, définie dans la preuve du lemme 1, ne dépend pas du choix de l'arc γ aboutissant en $x \in \partial \varepsilon_P^+$. Soit $\tilde{\gamma}$ un autre arc géodésique temporel aboutissant en x. Soient $\{ x_n \}$ (resp. $\tilde{x}_n$) une suite de points sur γ (resp. $\tilde{\gamma}$) tendant vers x tels que pour $n > N$, x_n et $\tilde{x}_n \in U$; désignons par $\| x - y \|$ la distance de deux points x et y dans une métrique elliptique régulière g_e définie sur U. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver N tel que

$$\| x - x_n \| < \varepsilon, \qquad \| x - \tilde{x}_n \| < \varepsilon, \quad \forall\, n > N,$$

d'où

$$\| x_n - \tilde{x}_n \| < 2\varepsilon.$$

Pour ε assez petit, il existe une géodésique de g_e, joignant x_n et $\tilde{x}_n$, située dans une boule de centre x_n, intérieur à $\complement \varepsilon_P^+ \cap U$, et réalisant le minimum de la distance entre x_n et $\tilde{x}_n$.

Prenons pour g_e la métrique elliptique donnée dans les coordonnées de Gauss précédentes par

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}\, dx^i dx^j.$$

Soit $x'_n = f(x_n)$ et $\tilde{x}'_n = f(\tilde{x}_n)$. L'image par f de l'arc géodésique de g_e joignant x_n et $\tilde{x}_n$ est un arc de $\complement \varepsilon_P^+ \cap U'$ ayant même longueur dans la métrique elliptique g'_e

$$g'_e\colon \quad (dx'^0) + g'_{ij}\, dx'^i dx'^j$$

que l'arc précédent dans g_e, puisque, d'après (4.2),

$$g_e = f^* g'_e \qquad \text{dans} \quad \complement \varepsilon_P^+ \cap U,$$

on a aussi

$$\| x'_n - \tilde{x}'_n \|_{g'_e} < 2\varepsilon.$$

La suite x'_n a donc même limite x' que la suite $\tilde{x}'_n$.

Un raisonnement analogue montre que l'application $x \to x'$ est injective.

Remarque. — L'application $x \to x'$ de $\partial\varepsilon_p^+$ dans $\partial\varepsilon_{p'}^+$ peut ne pas être surjective (dans la figure 3, le domaine intérieur au pointillé, et sa frontière, ne font pas partie de V_4).

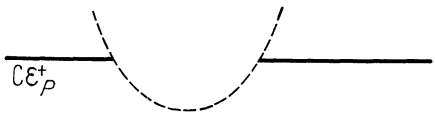

Fig. 3.

Fig. 4.

LEMME 3. — *Tout point spatial $x \in \partial\varepsilon_p^+$ admet un voisinage ouvert V isométrique à un voisinage ouvert V′ de $x' \in \partial\varepsilon_{p'}^+$, par une isométrie φ ayant même restriction que f à $V \cap \complement\varepsilon_p^-$.*

Preuve. — On appelle point spatial ([7]) de ε_p^+ un point tel que $\varepsilon_x^- \cap \varepsilon_p^+ = x$: si l'on appelle S l'ensemble des points spatiaux, on montre que $S \subset \partial\varepsilon_p^+$ et $\varepsilon_S^+ = \varepsilon_p^+$.

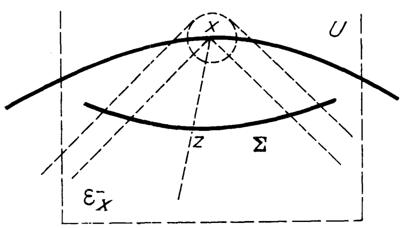

Fig. 5.

Considérons le voisinage U de x rapporté à des coordonnées de Gauss. Soit Σ un morceau compact d'hypersurface différentiable spatiale, $\Sigma \subset U_-$, passant par un point z voisin de x sur γ, d'équation $x^0 = z^0$, tel que $\varepsilon_\Sigma^+ \cap \varepsilon_x^-$ (compact) soit contenu dans U et que

$$\partial\varepsilon_\Sigma^+ \cap \varepsilon_x^- = \Sigma \cap \varepsilon_x^- \subset U_-.$$

([7]) *Cf.*, par exemple, [2].

Soit V un voisinage de x tel que $W=\varepsilon^-_V \cap \varepsilon^+_\Sigma \subset U$ et que

$$\partial\varepsilon^+_\Sigma \cap \varepsilon^-_V = \Sigma \cap \varepsilon^-_V \subset U_-.$$

L'existence de Σ et V résulte des propriétés locales d'une métrique hyperbolique différentiable, des propriétés de continuité de l'émission (due à la globale hyperbolicité) et du fait que x est point spatial.

Considérons les équations (conditions d'harmonicité) aux fonctions inconnues f^α :

$$\Delta f^\alpha = g^{\lambda\mu}\partial^2_{\lambda\mu} f^\alpha - F^\lambda \partial_\lambda f^\alpha = 0$$

et le problème de Cauchy

$$f^\alpha = x^\alpha, \qquad \partial_\lambda f^\alpha = \delta^\alpha_\lambda \quad \text{sur } \Sigma \qquad (x^0 = z^0).$$

Ce problème de Cauchy a une solution unique dans le domaine W, d'après l'hypothèse de régularité du § 1 (*cf.* [3], § 4) ([8]). Les quatre fonctions f^α sont indépendantes sur Σ (jacobien égal à 1), donc, dans W, si z a été choisi assez voisin de x et V (donc W) assez petit : elles déterminent un système de coordonnées harmoniques dans W, $y^\alpha = f^\alpha(x^\lambda)$.

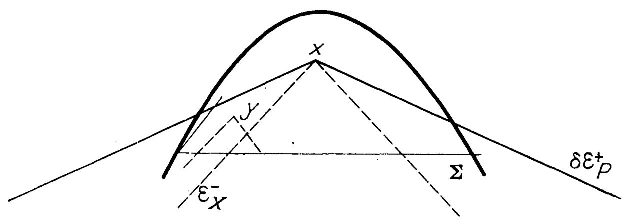

Fig. 6.

La solution f^α en un point $y \in W$ ne dépend que de la métrique g dans $\varepsilon^-_y \cap \varepsilon^+_\Sigma$, or, si l'on pose $\overline{W}_- = W \cap \complement \varepsilon^+_P$,

$$\varepsilon^-_y \cap \varepsilon^+_\Sigma \subset \overline{W}_- \qquad \text{si} \quad y \in \overline{W}.$$

Donc $f^\alpha(x^\lambda)$ ne dépend, dans $\overline{W}_-$, que de la métrique g dans $\overline{W}_-$.

Les coordonnées harmoniques $y'^\alpha = f'^\alpha(x'^\lambda)$, construites de façon analogue (en prenant pour Σ' l'image de Σ par f) dans W', voisinage de x' dans $U' \subset V'_4$ (avec $W' = \varepsilon^-_{V'} \cap \varepsilon^+_{\Sigma'}$), seront donc telles que

$$(4.3) \qquad f'^\alpha(x'^\lambda) = f^\alpha(x^\lambda) \qquad \text{pour} \quad x^\lambda = x'^\lambda,$$
$$x \in \overline{W}_-, \qquad x' \in \overline{W}'_-, \qquad x' = f(x).$$

([8]) Si l'on avait supposé *a priori* l'existence des coordonnées harmoniques, il aurait suffi de supposer g de classe C^1, à dérivées premières lipchitziennes.

Les potentiels en coordonnées harmoniques vérifient donc

$$(4.4)\qquad \begin{cases} g'_{\lambda\mu}(y'^{\alpha}) = g_{\lambda\mu}(y^{\alpha}), \\ y^{\alpha} = y'^{\alpha}, \quad \text{coordonnées de } x \in \overline{W}_{-},\ x' = f(x) \in \overline{W}'_{-} \end{cases}$$

et des équations analogues pour les dérivées partielles d'ordre $\leqq 4$.

Considérons maintenant les équations d'Einstein en coordonnées harmoniques, respectivement dans V et V',

$$R^{(h)}_{\alpha\beta} = 0, \qquad R'^{(h)}_{\alpha\beta} = 0.$$

Ce sont des équations hyperboliques, non linéaires, dont la solution dans un domaine de la forme $W = \varepsilon_{\overline{V}} \cap \varepsilon^{+}_{\Sigma}$ ne dépend, sous l'hypothèse de régularité du § 1, que des données de Cauchy sur $\varepsilon_{\overline{V}} \cap \Sigma$. Ces métriques g et g' vérifient donc, dans les coordonnées respectivement (y^{α}) et (y'^{α}), l'égalité (4.4), si (y^{α}) [resp. (y'^{α})] sont les doordonnées d'un point de W (resp. de W') tels que $y^{\alpha} = y'^{\alpha}$: l'application ainsi définie en coordonnées locales est une isométrie φ de

$$\tilde{W} = W \cap \Phi^{-1}\Phi' W' \qquad \text{sur} \qquad \tilde{W}' = W' \cap \Phi'^{-1}\Phi W,$$

où Φ et Φ' sont les homéomorphismes définissant les coordonnées locales (y^{α}) et (y'^{α}).

D'après l'équation (4.4),

$$(4.5)\qquad \Phi(\overline{W}_{-}) = \Phi'(\overline{W}'_{-}),$$

donc

$$\Phi^{-1}(\Phi' \overline{W}'_{-}) = \overline{W}_{-} \subset \tilde{W}, \qquad \Phi'^{-1}(\Phi \overline{W}_{-}) = \overline{W}'_{-} = f(\overline{W}_{-}) \subset \tilde{W}'$$

l'isométrie φ a, d'après (4.5), même restriction à $\overline{W}_{-}$ que l'isométrie f. Les intérieurs de $\tilde{W}$ et $\tilde{W}'$ sont les ouverts V et V' du lemme.

COROLLAIRE. — *L'isométrie f peut être prolongée en une isométrie φ_1 de $\bigcap \varepsilon^{+}_{P_1}$ sur $\bigcap \varepsilon^{+}_{P'_1}$, où $\bigcap \varepsilon^{+}_{P}$ $\left(\text{resp. } \bigcap \varepsilon^{+}_{P'}\right)$ est strictement contenu dans $\bigcap \varepsilon^{+}_{P_1}$ $\left(\text{resp. } \bigcap \varepsilon^{+}_{P'_1}\right)$.*

Preuve.

(*a*) On peut trouver un voisinage ouvert V_1 de x (resp. V'_1 de x') tels que

$$W_1 = \varepsilon_{\overline{V}_1} \cap \varepsilon^{+}_{\Sigma} \subset \tilde{W}, \qquad \varphi(W_1) = W'_1 = \varepsilon_{\overline{V}'_1} \cap \varepsilon^{+}_{\Sigma} \subset \tilde{W}'.$$

Il suffit pour cela de prendre V_1 tel que, dans R^4 (où sont les images de $\tilde{W}$ et $\tilde{W}'$ par les coordonnées locales y^α et y'^α), on ait

$$\Phi V_1 = \Phi \varepsilon^-_V \cap \Phi' \varepsilon^-_{V'},$$

donc

$$\varepsilon^-_{V_1} = \varepsilon^-_V \cap \Phi^{-1} \Phi' \varepsilon^-_{V'}$$

puisque les métriques Φg et $\Phi' g'$ coincident dans $\Phi \varepsilon^-_{V_1}$.

(*b*) L'application φ_1 donnée dans $\varepsilon^{-0}_{V_1} \cup \complement \varepsilon^+_P = W_1 \cup \complement \varepsilon^+_P$ comme la restriction de φ à W_1 et donnée par f dans $\complement \varepsilon^+_P$ est bien définie puisque φ a même restriction que f à $W_1 \cap \complement \varepsilon^+_P$.

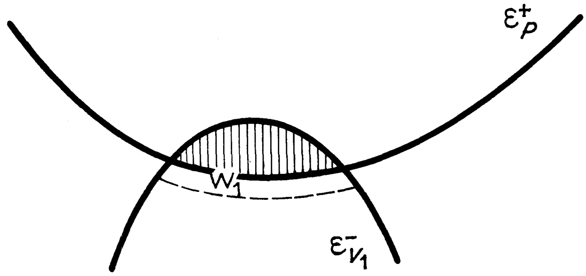

Fig. 7.

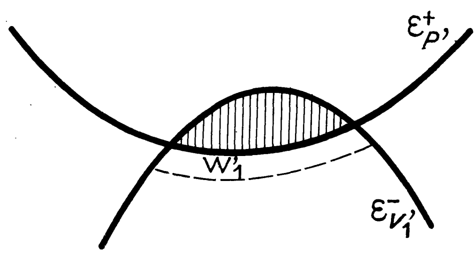

Fig. 8.

C'est une application bijective de $W_1 \cup \complement \varepsilon^+_P$ dans $W'_1 \cup \complement \varepsilon^+_{P'}$ puisqu'elle est bijective de $\complement \varepsilon^+_P$ $\left[\text{resp. de } \left(W_1 \cup \complement \varepsilon^+_P\right) \cap \varepsilon^+_P\right]$ dans $\complement \varepsilon^+_{P'}$ $\left[\text{resp. } \left(W'_1 \cup \complement \varepsilon^+_{P'}\right) \cap \varepsilon^+_{P'}\right]$ qui sont respectivement des ensembles disjoints. On en conclut que φ est une isométrie globale de $W_1 \cup \complement \varepsilon^+_P$ sur $W'_1 \cup \complement \varepsilon^+_{P'}$[1].

(c) $W_1 \cup \complement \varepsilon^+_P = \varepsilon^-_{V_1} \cup \complement \varepsilon^+_P = \complement \varepsilon^+_{P_1^0}$, où $P_1 = \complement \varepsilon^-_{V_1} \cap \varepsilon^+_{P_1}$; en effet, on a toujours

$$\varepsilon^+_{(\complement \varepsilon^-_V)} = \complement \varepsilon^-_V, \qquad \text{d'où} \qquad \varepsilon^+_{P_1} = P_1.$$

5. Unicité globale.

Soit E l'ensemble des couples (A, φ), où A est un ouvert de V_4 tel qu'il existe Q compact vers le passé avec $A = \complement \varepsilon^+_Q \supset \complement \varepsilon^+_P$ et où φ est une isométrie de $\complement \varepsilon^+_Q$ sur un ouvert $\complement \varepsilon^+_{Q'}$ dont la restriction à $\complement \varepsilon^+_P$ est égale à f.

Ordonnons E par la relation

$$(A_1, \varphi_1) \leqq (A_2, \varphi_2)$$

si

$$A_1 \subset A_2 \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = \varphi_1 \quad \text{sur } A_1.$$

LEMME. — *Toute partie linéairement ordonnée F, d'éléments (A_i, φ_i), $i \in I$, admet un majorant (A, φ), où $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ et $\varphi = \varphi_i$ sur A_i (définition consistante, car, de deux éléments (A_i, φ_i) et (A_j, φ_j) de F, l'un précède l'autre, soit (A_i, φ_i), alors $A_i \subset A_j$, sur A_i, $\varphi_i = \varphi_j$, φ est dit* (9) *le prolongement des φ_i sur A).*

Preuve. — Il suffit de vérifier que le couple (A, φ) est un élément de E, car il est évident qu'il majore tous les (A_i, φ_i), or

$$A_i = \complement \varepsilon^+_{Q_i}, \qquad A_j = \complement \varepsilon^+_{Q_j}, \qquad A_i \subset A_j$$

implique

$$\complement A_i = \varepsilon^+_{Q_i}, \qquad \complement A_j = \varepsilon^+_{Q_j}, \qquad \complement A_j \subset \complement A_i$$

et

$$\complement A_i \cap \complement A_j = \varepsilon^+_{Q_i} \cap \varepsilon^+_{Q_j} = \varepsilon^+_{Q_j} = \varepsilon^+_{\varepsilon^+_{Q_i} \cap \varepsilon^+_{Q_j}},$$

$$\bigcap_{i \in I} \complement A_i = \varepsilon^+_{\bigcap_{i \in I} \varepsilon^+_{Q_i}}.$$

D'où (10), pour A, la forme demandée

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i = \complement \varepsilon^+_Q,$$

(9) *Cf.* BOURBAKI, Livre II, chap. II, § IV, n° 6.

(10) *Cf.* KURATOVSKI [5], § 1, V.

où Q est l'ensemble compact vers le passé (puisque sous-ensemble fermé de ε_P^+) :

$$Q = \bigcap_{i \in I} \varepsilon_{Q_i}^+ \subset \varepsilon_P^+.$$

D'autre part, φ est bien une isométrie de A sur

$$A' = \bigcup_{i \in I} A'_i = \complement \varepsilon_{Q'}^+, \qquad Q' = \bigcap_{i \in I} \varepsilon_{Q'_i}^+ \subset \varepsilon_{P'}^+.$$

Toute partie linéairement ordonnée de E admettant un majorant, l'ensemble E admet au moins un élément maximal [lemme de Zorn ([11]), soit (D, φ).

Supposons que $D = \complement \varepsilon_R^+ \neq V_4$, alors, d'après le corollaire du lemme 3, il existerait $\complement \varepsilon_{R_1}^+$ contenant strictement D et une isométrie de $\complement \varepsilon_{R_1}^+$ sur $\complement \varepsilon_{R'_1}^+$ dont la restriction à D est φ : l'élément (D, φ) de E ne serait donc pas maximal. On en conclut $D = V_4$ et le théorème annoncé.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bruhat (Yvonne). — Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Acta Math.*, Uppsala, t. 88, 1952, p. 141-225 (Thèse Sc. math., Paris, 1951).

[2] Choquet-Bruhat (Yvonne). — *Hyperbolic differential equations on a manifold*, Battelle Seattle Rencontre 1967 (à paraître).

[3] Choquet-Bruhat (Yvonne). — Espaces-temps einsteiniens généraux, chocs gravitationnels, *Ann. Inst. H. Poincaré*, Section A (à paraître).

[4] Hawking (S. W.). — The occurrence of singularities in cosmology, *Proc. Roy. Soc. London*, Series A, t. 294, 1966, p. 511-521; t. 295, 1966, p. 490-493.

[5] Kuratowski (K.). — *Topology*. — New York, London, Academic Press, 1966.

[6] Leray (Jean). — *Hyperbolic differential equations*. — Princeton, Institute for advanced Study, 1952 (multigr.).

[7] Lichnerowicz (André). — *Théories globales de la gravitation et de l'électromagnétisme*. — Paris, Masson, 1955 (*Collection d'Ouvrages de Mathématiques à l'usage des Physiciens*).

[8] Penrose (R.). — *An analysis of the structure of space time*. — Princeton, 1966 (multigr.).

[9] Wheeler (J.). — *Geometrodynamics*. — New York and London, Academic Press, 1962 (Topics of modern Physics, 1).

(Manuscrit reçu le 12 février 1968.)

Mme Yvonne Choquet-Bruhat,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
16, avenue d'Alembert, 92-Antony, Hauts-de-Seine.

([11]) *Cf.* [5], *loc. cit.*