BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD SCHIFFMANN

Distributions centrales de type positif sur un groupe de Lie nilpotent

Bulletin de la S. M. F., tome 96 (1968), p. 347-355

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1968__96__347_0>

Bull. Soc. math. France,
96, 1968, p. 347 à 355.

DISTRIBUTIONS CENTRALES DE TYPE POSITIF SUR UN GROUPE DE LIE NILPOTENT

PAR

GÉRARD SCHIFFMANN.

Soient G un groupe de Lie réel, nilpotent, connexe, simplement connexe et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. On sait que l'application exponentielle est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique G et qu'elle transforme une mesure de Haar de $\mathfrak{g}$, considérée comme espace vectoriel réel, en une mesure de Haar de G. Dans toute la suite, on suppose choisie une mesure de Haar dX de $\mathfrak{g}$, et l'on prend comme mesure de Haar sur G l'image de dX par l'application exponentielle. Soient $\mathcal{D}(G)$ [resp. $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$] l'espace vectoriel des fonctions définies sur G (resp. sur $\mathfrak{g}$), à valeurs complexes, à support compact et de classe C^∞, et $\mathcal{D}'(G)$ [resp. $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$] l'espace des distributions sur G (resp. sur $\mathfrak{g}$). Ces espaces sont munis des topologies usuelles. L'application exponentielle permet d'identifier, d'une part $\mathcal{D}(G)$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$, et d'autre part $\mathcal{D}'(G)$ et $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$. Avec le choix des mesures de Haar, ces identifications sont compatibles avec les plongements de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{D}'(G)$ et de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$. Une distribution sur G (resp. sur $\mathfrak{g}$) est dite centrale si elle est invariante par automorphismes intérieurs (resp. par la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}$). Si T est une distribution sur $\mathfrak{g}$, et si t est son image par l'application exponentielle, alors T est centrale si et seulement si t l'est. Si t est une distribution sur G, on dit que t est de type positif si, quelle que soit $f \in \mathcal{D}(G)$, on a $t(f \star f^*) \geqq 0$, où f^* est la fonction $x \mapsto \overline{f(x^{-1})}$ et où le produit de convolution est défini par

$$(f \star f^*)(x) = \int_G f(xy^{-1}) f^*(y)\, dy.$$

De même, une distribution T sur $\mathfrak{g}$ est dite de type positif si, quelle que soit $F \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, on a $T(F \star F^*) \geqq 0$, où F^* est la fonction $X \mapsto \overline{F(-X)}$ et où le produit de convolution est défini par

$$(F \star F^*)(X) = \int_{\mathfrak{g}} F(X - Y) F^*(Y) \, dY.$$

L'objet du présent travail est de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Soient T une distribution sur $\mathfrak{g}$, et t son image par l'application exponentielle. Supposons T, donc aussi t, centrale. Dans ces conditions, pour que T soit de type positif, il faut et il suffit que t soit de type positif.*

Ce résultat avait été conjecturé par R. Godement.

1. Désintégration suivant le centre.

Soient Z le centre de G, et $\mathfrak{z}$ son algèbre de Lie qui est le centre de $\mathfrak{g}$. Soient $\hat{Z}$ le groupe dual de Z, et $\hat{\mathfrak{z}}$ le groupe dual de $\mathfrak{z}$.

Lemme 1. — *Soit t une distribution de type positif sur G. Il existe une mesure positive μ sur $\hat{Z}$ et une application $\chi \mapsto t_\chi$ de $\hat{Z}$ dans $\mathcal{D}'(G)$, les conditions ci-dessous étant satisfaites :*

(a) Les distributions t_χ sont de type positif.

(b) Quels que soient l'élément χ de $\hat{Z}$, l'élément φ de $\mathcal{D}(G)$ et l'élément z de Z, on a $t_\chi(\varphi^z) = \chi(z) t_\chi(\varphi)$, où φ^z est la fonction $x \mapsto \varphi(xz)$.

(c) Quels que soient les éléments φ et ψ de $\mathcal{D}(G)$, la fonction $\chi \mapsto t_\chi(\varphi \star \psi)$ est μ-intégrable et

$$t(\varphi \star \psi) = \int_{\hat{Z}} t_\chi(\varphi \star \psi) \, d\mu(\chi).$$

Si, de plus, t est centrale, on peut supposer toutes les distributions t_χ centrales.

La technique de démonstration est classique. Soit H l'espace de Hilbert séparé complété de $\mathcal{D}(G)$ pour le produit hermitien

$$(\varphi \mid \psi) = t(\varphi \star \psi^*).$$

En faisant opérer G par translations à droite, on obtient une représentation continue unitaire de G dans H; soit π cette représentation. La restriction de π à Z est une représentation unitaire continue de ce groupe abélien. D'après le théorème de Stone, il existe une mesure positive μ sur $\hat{Z}$ et un champ mesurable $(H_\chi)_{\chi \in \hat{Z}}$ d'espaces de Hilbert, de base $(\hat{Z}, \mu)$, de somme H, les opérateurs $\pi(z)$ étant, pour $z \in Z$, diagonalisables et définis par les champs d'opérateurs scalaires $\chi \mapsto \chi(z) I_\chi$ où I_χ est l'application identique de H_χ. Les opérateurs diagonalisables dans H sont ceux qui appartiennent à l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\pi(z)$ pour $z \in Z$. Cette algèbre étant contenue dans le centre de l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs $\pi(x)$ pour $x \in G$, la représentation π de G se désintègre. Il existe donc, pour tout $\chi \in \hat{Z}$, une représentation unitaire π_χ de G dans H_χ, ces représentations étant telles que, pour tout $x \in G$, le champ d'opérateurs $\pi_\chi(x)$ soit mesurable, essentiellement borné et de somme $\pi(x)$. Soit u l'application canonique de $\mathcal{D}(G)$ dans H. Comme $\mathcal{D}(G)$ est nucléaire, u est nucléaire. Il existe donc ([2], p. 117), pour tout élément χ de $\hat{Z}$, une application linéaire continue u_χ de $\mathcal{D}(G)$ dans H_χ, ces applications étant telles que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, le champ de vecteurs $\chi \mapsto u_\chi(\varphi)$ soit de carré intégrable et égal à $u(\varphi)$. Soit χ un élément de $\hat{Z}$; posons, pour φ et ψ appartenant à $\mathcal{D}(G)$,

$$B_\chi(\varphi, \psi) = (u_\chi(\varphi) \mid u_\chi(\psi)).$$

Le « noyau » B_χ est continu et hermitien positif. Soient $x \in G$ et φ^x (resp. ψ^x) la translatée à droite de φ (resp. ψ) par x. Comme,

$$\pi(x)(u(\varphi)) = u(\varphi^x),$$

on a, pour presque tout χ, la relation

$$u_\chi(\varphi^x) = \pi_\chi(x)(u_\chi(\varphi)),$$

et de même pour ψ. Il existe donc un ensemble $N(\varphi, \psi, x)$ contenu dans $\hat{Z}$, de μ-mesure nulle, tel que, pour $\chi \notin N(\varphi, \psi, x)$, on ait

$$B_\chi(\varphi^x, \psi^x) = B_\chi(\varphi, \psi).$$

Soient x_n une suite partout dense dans G, et φ_n une suite partout dense dans $\mathcal{D}(G)$. Il existe un ensemble N, contenu dans $\hat{Z}$, de μ-mesure nulle, tel que

$$B_\chi(\varphi_n^{x_p}, \varphi_m^{x_p}) = B_\chi(\varphi_n, \varphi_m)$$

pour $\chi \notin N$ et quels que soient les entiers n, m et p. Par continuité, on en déduit que, pour $\chi \notin N$, le noyau B_χ est invariant par translations à droite. Si $\chi \in N$, on posera désormais $B_\chi = 0$. Les noyaux B_χ sont donc tous invariants à droite. Ils sont donc définis par des distributions de type positif sur G [2]. De façon plus précise, il existe, pour tout χ, une distribution t_χ sur G, de type positif, telle que, quelles que soient φ et ψ appartenant à $\mathcal{D}(G)$, on ait

$$B_\chi(\varphi, \psi) = t_\chi(\varphi \star \psi^*).$$

La condition (c) du lemme est clairement satisfaite par les distributions t_χ. De plus, si $z \in Z$ et si $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, on a, μ-presque partout

$$u_\chi(\varphi^z) = \chi(z)\, u_\chi(\varphi).$$

En considérant des suites partout denses dans Z et dans $\mathcal{D}(G)$, on prouve, comme précédemment, qu'il existe un sous-ensemble N' de $\hat{Z}$, de μ-mesure nulle, tel que, pour $\chi \notin N'$, on ait, quelles que soient φ et ψ appartenant à $\mathcal{D}(G)$,

$$B_\chi(\varphi^z, \psi) = \chi(z)\, B_\chi(\varphi, \psi).$$

On suppose désormais que $B_\chi = 0$ si $\chi \in N'$. On a donc, quel que soit χ,

$$t_\chi(\varphi^z \star \psi^*) = \chi(z)\, t_\chi(\varphi \star \psi^*).$$

Comme z appartient au centre de G, on a $\varphi^z \star \psi^* = (\varphi \star \psi^*)^z$, d'où

$$t_\chi((\varphi \star \psi^*)^z) = \chi(z)\, t_\chi(\varphi \star \psi^*).$$

Or les produits $\varphi \star \psi^*$ sont denses dans $\mathcal{D}(G)$, donc

$$t_\chi(\varphi^z) = \chi(z)\, t_\chi(\varphi).$$

Il nous reste à examiner le cas où t est centrale. Si $x \in G$, on a, quelles que soient φ et ψ appartenant à $\mathcal{D}(G)$, la relation

$$(\varphi \star \psi^*) \circ ad\,x = (\varphi \circ ad\,x) \star (\psi \circ ad\,x)^*.$$

Appliquant la distribution t aux deux membres, on en déduit que $ad\,x$ laisse invariant le produit scalaire hermitien $(\varphi \mid \psi) = t(\varphi \star \psi^*)$. On peut donc le prolonger en un opérateur unitaire $d(x)$ de H dans H. Cet opérateur commute aux opérateurs $\pi(z)$ pour $z \in Z$, il est donc décomposable. Soit $d_\chi(x)$ une décomposition. Il existe, pour φ et ψ éléments de $\mathcal{D}(G)$, un sous-ensemble $N''(\varphi, \psi, x)$ de $\hat{Z}$, de μ-mesure nulle, tel que, pour $\chi \notin N''(\varphi, \psi, x)$, on ait

$$B_\chi(\varphi \circ ad\,x, \psi \circ ad\,x) = B_\chi(\varphi, \psi).$$

Un argument analogue à celui utilisé pour prouver la première partie du lemme montre qu'on peut supposer, à une modification sur un ensemble de mesure nulle près, toutes les distributions t_χ centrales. On prouve de même le lemme suivant :

LEMME 2. — *Soit T une distribution de type positif sur $\mathfrak{g}$. Il existe une mesure positive μ sur $\hat{\mathfrak{z}}$ et une application $\chi \mapsto T_\chi$ de $\hat{\mathfrak{z}}$ dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$, les conditions ci-dessous étant satisfaites :*

(a) *Les distributions T_χ sont de type positif.*

(*b*) *Quels que soient l'élément* χ *de* $\hat{\mathfrak{z}}$, *l'élément* Φ *de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ *et l'élément* Z *de* $\mathfrak{z}$, *on a* $T_\chi(\Phi^Z) = \chi(Z)\, T_\chi(\Phi)$, *où* Φ^Z *est la fonction* $X \mapsto \Phi(X+Z)$.

(*c*) *Quels que soient les éléments* Φ *et* Ψ *de* $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$, *la fonction* $\chi \mapsto T_\chi(\Phi \star \Psi^*)$ *est* μ*-intégrable et*

$$T(\Phi \star \Psi^*) = \int_{\hat{\mathfrak{z}}} T_\chi(\Phi \star \Psi^*)\, d\mu(\chi).$$

Si, de plus, la distribution T *est centrale, on peut supposer toutes les distributions* T_χ *centrales.*

2. **Réduction à un groupe de dimension inférieure.**

Soient T une distribution centrale sur g, et t son image par l'application exponentielle. On suppose, dans tout ce paragraphe qu'il existe un caractère unitaire χ de Z tel que, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, on ait, pour $z \in Z$, la relation $t(\varphi^z) = \chi(z)\, t(\varphi)$. On vérifie de suite, que cette condition équivaut à la suivante : si $X \in \mathfrak{z}$ et si $\Phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, alors $T(\Phi^X) = \chi(e^X)\, T(\Phi)$. On distingue les deux cas usuels de la théorie.

Premier cas. — Il existe un sous-groupe fermé connexe Z_0 de Z, de dimension au moins 1, tel que χ soit trivial sur Z_0. Soit $\mathfrak{z}_0$ l'algèbre de Lie de Z_0. On pose $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{z}_0$ et $G' = G/Z_0$. On sait que G' est un groupe de Lie nilpotent, connexe et simplement connexe; son algèbre de Lie s'identifie à $\mathfrak{g}'$. Soit π l'application canonique de G sur G'; sa différentielle à l'origine d_π est l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$. Soit f une fonction à valeurs complexes, définie sur G, de classe C^∞ et dont le support a une intersection compacte avec l'image réciproque dans G d'un compact quelconque de G'. A une telle fonction, on associe la fonction f' définie sur G' par

$$f'(\pi(x)) = \int_{Z_0} f(xz_0)\, dz_0,$$

où dz_0 est une mesure de Haar de Z_0. Si $f \in \mathcal{D}(G)$, alors $f' \in \mathcal{D}(G')$. De même, si F est une fonction à valeurs complexes, définie sur $\mathfrak{g}$, de classe C^∞ et dont le support a une intersection compacte avec l'image réciproque dans $\mathfrak{g}$ d'un compact quelconque de $\mathfrak{g}'$, on pose

$$F'(d_\pi(X)) = \int_{\mathfrak{z}_0} F(X + X_0)\, dX_0,$$

où dX_0 est une mesure de Haar de z_0. Si $F \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, alors $F' \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}')$. Si, de plus, on suppose que $dz_0 = \exp(dX_0)$ alors, si $\exp'$ est l'application exponentielle de G', on a $\exp' \circ f' = (\exp \circ f)'$.

LEMME 3. — *Il existe une, et une seule, distribution t' (resp. T') sur G (resp. sur $\mathfrak{g}'$) telle que, $t'(f') = t(f)$ [resp. $T'(F') = T(F)$] quelle que soit l'élément f (resp. F) de $\mathcal{D}(G)$ [resp. de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$]. Les distributions t' et T' sont centrales et $t' = \exp'(T')$. Enfin, pour que t (resp. T) soit de type positif, il faut et il suffit que t' (resp. T') soit de type positif.*

La restriction à $\mathcal{D}(G)$ de l'application $f \mapsto f'$ est une application linéaire continue u de $\mathcal{D}(G)$ dans $\mathcal{D}(G')$. On sait ([1], p. 130) que u est un homomorphisme surjectif. Par suite, pour les topologies usuelles (c'est-à-dire les topologies faibles), la transposée u^t de u est continue, et son image est fermée, donc est l'orthogonal du noyau de u. Comme elle est de plus injective, t', si elle existe, est unique. Pour prouver qu'elle existe, il suffit de montrer que, pour un élément s de $\mathcal{D}'(G)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(*a*) La distribution s appartient à l'image de u^t.

(*b*) Quels que soient $f \in \mathcal{D}(G)$ et $z_0 \in Z_0$, on a $s(f) = s(f^{z_0})$.

(*a*) implique (*b*). En effet, soit $s' \in \mathcal{D}'(G')$ telle que $s = u^t(s')$. Comme $(f^{z_0})' = f'$, on a $s(f^{z_0}) = s'(f') = s(f)$. Inversement, pour prouver que (*b*) implique (*a*), il suffit de montrer que s est orthogonale au noyau de u. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{D}(G)$. Les fonctions $(f' \circ \pi)\, g$ et $(g' \circ \pi) f$ appartiennent à $\mathcal{D}(G)$. Prouvons que $s((f' \circ \pi)\, g) = s((g' \circ \pi) f)$. On a

$$s((f' \circ \pi)\, g) = s\left(\int_{Z_0} g(x)\, f(xz_0)\, dz_0\right).$$

La fonction $(x, z_0) \mapsto g(x) f(xz_0)$ appartient à $\mathcal{D}(G \times Z_0)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini à la distribution $s \otimes dz_0$, d'où

$$s((f' \circ \pi)\, g) = \int_{Z_0} s(g(x)\, f(xz_0))\, dz_0.$$

D'après (*b*), on a alors

$$s((f' \circ \pi)\, g) = \int_{Z_0} s(g(xz_0^{-1})\, f(x))\, dz_0.$$

Il suffit d'appliquer à nouveau le théorème de Fubini pour obtenir l'égalité cherchée. Si maintenant $f' = 0$, alors quelle que soit $g \in \mathcal{D}(G)$, on a $s(f(g' \circ \pi)) = 0$. Or, on montre facilement qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{D}(G)$, telle que $g' \circ \pi = 1$ sur le support de f (BOURBAKI, *Intégration*, chapitre 7, § 2, proposition 8). Par suite, $s(f) = 0$. Comme t satisfait par hypothèse à la condition (*b*), elle satisfait à (*a*). La deuxième partie du lemme résulte de l'unicité de t'. Enfin, soient f et g deux éléments de $\mathcal{D}(G)$. On a

$$(f \star g)'(\pi(x)) = \int_{G \times Z_0} f(xz_0 y^{-1})\, g(y)\, dy\, dz_0.$$

Soit dy' la mesure de Haar de G' telle que $dy = dy'\, dz_0$. Il vient, avec l'abus de notation usuel,

$$(f \star g)'(\pi(x)) = \int_{G' \times Z_0 \times Z_0} f(xz_0 z_0'^{-1} y'^{-1})\, g(yz_0')\, dy'\, dz_0\, dz_0'.$$

Effectuons le changement de variables $z_0 \mapsto z_0 z_0'^{-1}$, il vient

$$(f \star g)'(\pi(x)) = \int_{G' \times Z_0 \times Z_0} f(xz_0 y'^{-1})\, g(y' z_0')\, dy'\, dz_0\, dz_0'.$$

Comme Z_0 est contenu dans le centre de G, on en déduit, en intégrant d'abord par rapport à Z_0, l'égalité

$$(f \star g)' = f' \star g'.$$

De plus, notons que $(g')^* = (g^*)'$. L'application u étant surjective, ces formules impliquent trivialement la dernière assertion du lemme. On procède exactement de la même façon pour T.

Deuxième cas. — On suppose que le caractère χ n'est trivial sur aucun sous-groupe non discret de Z. Ce dernier est donc de dimension 1, et χ n'est pas le caractère trivial de Z. Soient $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{z}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ de dimension 2 et $\mathfrak{g}'$ son centralisateur dans $\mathfrak{g}$. On sait que $\mathfrak{g}'$ est de codimension 1 et que $\mathfrak{a}$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{g}'$. Soient X_1 un élément non nul de $\mathfrak{z}$ et X_2 un élément de $\mathfrak{a}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{z}$. Il existe un élément X_3 de $\mathfrak{g}$, n'appartenant pas à $\mathfrak{g}'$ tel que $[X_3, X_2] = X_1$. Soit G' le sous-groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$; il est simplement connexe. Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{g}'$. La distribution T étant centrale, elle est en particulier invariante par les automorphismes $\exp(\mathrm{rad}\,(X_2))$. Soit F un élément de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$; on considère F comme une fonction de trois variables $F(x_1, H, x_3)$ où $H \in h$ et où x_1 et x_3 sont les coordonnées par rapport à X_1 et à X_3. On a

$$\exp(r\, adX_2)\,(x_1 X_1 + H + x_3 X_3) = (x_1 - rx_3)\, X_1 + H + x_3 X_3.$$

On a donc

$$T(F(x_1, H, x_3)) = T(F(x_1 - rx_3, H, x_3)).$$

En dérivant par rapport à r, pour $r = 0$, il vient

$$T\left(x_3 \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, H, x_3)\right) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad x_3 \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0.$$

Soit k tel que $\chi\,(\exp(rX_1)) = e^{irk}$. Par hypothèse, k est non nul. On a

$$T(F(x_1 + r, H, x_3)) = e^{irk}\, T(F(x_1, H, x_3)).$$

En dérivant par rapport à r, pour $r = 0$, on obtient cette fois

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = -ikT.$$

Comparant avec la première équation, on en déduit $x_3 T = 0$. Par suite, T peut être considérée comme une distribution sur $\mathfrak{g}'$. Pour éviter des confusions, on notera T' la distribution T considérée comme élément de $\mathcal{D}'(\mathfrak{g}')$. On a donc, pour $F \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, l'égalité $T'(F_{|\mathfrak{g}'}) = T(F)$. Si t' est l'image de T' par l'application exponentielle, on a, de suite, pour $f \in \mathcal{D}(G)$, la relation $t'(f_{|G'}) = t(f)$. On a ainsi partiellement prouvé le lemme suivant :

LEMME 4. — *Il existe une, et une seule, distribution t' (resp. T') sur G' (resp. sur g') telle que, quelle que soit $f \in \mathcal{D}(G)$ [resp. $F \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$], on ait $t(f) = t'(f_{|G'})$ [resp. $T(F) = T'(F_{|\mathfrak{g}'})$]. Les distributions T' et t' sont centrales. Enfin, pour que T (resp. t) soit de type positif, il faut et il suffit que T' (resp. t') soit de type positif.*

L'unicité étant évidente, la première partie est démontrée. La deuxième résulte par exemple de l'unicité. Soit B le sous-groupe à un paramètre de générateur X_3. On a $G = G'B$, le produit étant semi-direct. Soient db une mesure de Haar de B et dy' une mesure de Haar de G', ces mesures étant choisies telles que, dy désignant la mesure de Haar de G, on ait $dy = dy'\, db$. Supposons t de type positif. Soient $f' \in \mathcal{D}(G')$ et $\varphi \in \mathcal{D}(B)$; on suppose que $\varphi \star \varphi^\star(e) = 1$. La fonction f, définie sur G par $f(y'b) = \varphi(b) f'(y')$, appartient à $\mathcal{D}(G)$. On a

$$(f \star f^\star)(x') = \int_{G' \times B} f'(x'y')\, \varphi(b)\, \overline{f'(y')}\, \overline{\varphi(b)}\, dy'\, db,$$

où $x' \in G'$. En séparant les deux intégrations, on en déduit que

$$(f \star f^\star)_{|G'} = f' \star f'^\star.$$

Par suite, $t'(f' \star f'^\star) = t(f \star f^\star) \geqq 0$, et t' est de type positif. Réciproquement, si t' est de type positif, montrons que t est de type positif. Soit $f \in \mathcal{D}(G)$. En un point x' de G', on a

$$(f \star f^\star)(x') = \int_G f(x'y)\, \overline{f(y)}\, dy = \int_{G' \times B} f(x'y'b)\, \overline{f(y'b)}\, dy'\, db.$$

Si φ_b est la fonction définie sur G' par $\varphi_b(y') = f(y'b)$, on a

$$(f \star f^\star)(x') = \int_B (\varphi_b \star \varphi_b^\star)(x')\, db.$$

La fonction $(x', b) \mapsto (\varphi_b \star \varphi_b^\star)(x')$ appartient à $\mathcal{D}(G' \times B)$, on peut donc appliquer le théorème de Fubini, d'où

$$t(f \star f^\star) = t'(f \star f^\star_{|G'}) = t' \int_B (\varphi_b \star \varphi_b^\star)\, db = \int_B t'(\varphi_b \star \varphi_b^\star)\, db.$$

Par hypothèse, $t'(\varphi_b \star \varphi_b^\star) \geqq 0$, donc $t(f \star f^\star) \geqq 0$. L'assertion relative à T et T' se prouve de manière analogue.

3. Démonstration du théorème.

On procède par récurrence sur la dimension de G. Si cette dimension est 1, alors $G = \mathbf{R}$, et le théorème est évident. Supposons-le prouvé pour des groupes de dimension au plus n, et considérons G de dimension $n+1$. Supposons d'abord qu'il existe un caractère unitaire χ de Z tel que $t(f^z) = \chi(z)\, t(f)$, pour $z \in Z$ et $f \in \mathcal{D}(G)$. La distribution T vérifie la condition analogue sur l'algèbre. Distinguons les deux cas du paragraphe 2. Dans le premier cas, avec les notations du lemme 3, la distribution t est de type positif si et seulement si t' est de type positif, c'est-à-dire, hypothèse de récurrence, si et seulement si T' est de type positif ce qui, d'après le lemme 3, équivaut à T de type positif. Dans le deuxième cas du paragraphe 2, on procède de même à l'aide du lemme 4. Dans le cas général, supposons t de type positif Appliquons le lemme 1; il existe des distributions centrales de type positif t_χ, telles que

$$t = \int_{\hat{Z}} t_\chi \, d\mu(\chi).$$

Pour tout χ, la distribution t_χ est l'image par l'application exponentielle d'une distribution centrale T_χ. D'après la première partie de la démonstration, T_χ est de type positif. Comme on a visiblement

$$T = \int_{\hat{\mathfrak{z}}} T_\chi \, d\mu(\chi),$$

la distribution T est de type positif. Si l'on suppose maintenant T de type positif, on procède de même avec le lemme 2.

Rappelons qu'une distribution sur G est dite tempérée si elle est l'image par l'application exponentielle d'une distribution tempérée sur $\mathfrak{g}$.

Corollaire. — *Toute distribution centrale, de type positif sur un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, est tempérée.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bruhat (François). — Représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. math. France*, t. 84, 1956, p. 97-205.

[2] Gel'fand (I. M.) and Vilenkin (N. Ja). — *Generalized functions.* Volume 4 : *Applications of harmonic analysis.* — New-York, London, Academic Press, 1964.

(Manuscrit reçu le 3 janvier 1968.)

Gérard Schiffmann,
12, rue des Fossés-Saint-Marcel,
75-Paris, 5e.