

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MARGUERITE FLEXOR-MANGENEY  
**Étude de l'assassin du complété d'un anneau  
local noethérien**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 98 (1970), p. 117-125

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1970\\_\\_98\\_\\_117\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__117_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE DE L'ASSASSIN DU COMPLÉTÉ D'UN ANNEAU LOCAL NOETHÉRIEN

PAR

M<sup>me</sup> MARGUERITE FLEXOR-MANGENEY.

Soient  $A$  un anneau local noethérien,  $\mathfrak{m}$  son idéal maximal,  $\hat{A}$  son complété pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique. Nous nous intéresserons à la comparaison de  $\text{Ass } A$  et de  $\text{Ass } \hat{A}$ .

Par fidèle platitude, on a la relation

$$\text{Ass } \hat{A} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass } A} \text{Ass } \hat{A}/\mathfrak{p} \hat{A},$$

de sorte que le problème est ramené au cas où  $A$  est intègre. Rappelons plusieurs résultats :

(1) Dire que  $\hat{A}$  est équidimensionnel est équivalent à dire que  $A$  est universellement caténaire (cf. [7], ou le théorème 3).

(2) Si  $A$  est universellement japonais,  $\hat{A}$  est réduit, et il en est de même pour toute  $A$ -algèbre locale de type fini réduite ([2], 7.6.4).

Nous nous intéresserons au problème suivant :

(P)  $\hat{A}$  est-il sans idéaux associés immergés ?

Rappelons que, pour  $\dim A = 1$ , (1) est toujours vrai,  $\hat{A}$  est réduit si et seulement si la clôture intégrale de  $A$  est finie, et (P) est toujours vrai. Nous supposons par la suite  $\dim A \geq 2$ .

Nous allons donner quelques rappels de cohomologie locale ([2], § 5.9, ou [5]).

Soit  $X$  un schéma localement noethérien; nous dirons qu'une partie  $\mathfrak{Z}$  de  $X$  est stable par spécialisation, si l'adhérence de toute partie finie de  $\mathfrak{Z}$  est encore dans  $\mathfrak{Z}$ , ou encore, ce qui revient au même, que

$X - \mathfrak{Z} = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha$ , la famille  $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  étant une famille filtrante décroissante d'ouverts. On construit alors un foncteur :

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}_{X/\mathfrak{Z}}^0(\mathcal{F}) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} (i_\alpha)_*(\mathcal{F}|U_\alpha)$$

sur la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules,  $i_\alpha$  étant l'injection canonique :  $U_\alpha \rightarrow X$ . On vérifie que ce foncteur ne dépend pas de la famille  $U_\alpha$  définissant  $X - \mathfrak{Z}$ .

On a alors le théorème et le corollaire suivants :

**THÉORÈME 1** ([2], 5.11.1). — *Soient  $X$  un schéma localement noethérien,  $\mathfrak{Z}$  une partie stable par spécialisation,  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $\mathcal{H}_{X/\mathfrak{Z}}^0(\mathcal{F})$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent.  
 (b) Pour tout  $x \in \text{Ass } F \cap (X - \mathfrak{Z})$  (nous désignerons encore par  $\overline{\{x\}}$  le sous-schéma réduit de  $X$ , ayant  $\{x\}$  pour espace sous-jacent), le  $\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}}$ -module  $\mathcal{H}_{\overline{\{x\}}/Y \cap \overline{\{x\}}}^0(\mathcal{O}_{\overline{\{x\}}})$  est cohérent.

Elles impliquent la condition suivante :

- (c) Pour tout  $x \in \text{Ass } F \cap (X - \mathfrak{Z})$ ,

$$\text{codim}(\mathfrak{Z} \cap \overline{\{x\}}, \overline{\{x\}}) \geq 2$$

et lui sont équivalentes si  $X$  est localement immergeable dans un schéma régulier.

Gardons les notations  $X = \text{Spec } A$ ,  $X' = \text{Spec } \hat{A}$ ,  $f: X' \rightarrow X$ . Nous noterons  $\mathfrak{Z}^{(k)}$  l'ensemble des  $x$  de  $X'$  tels que

$$\dim \mathcal{O}_{X', x} \geq k \quad \text{et} \quad A^k = \mathcal{H}_{X'/\mathfrak{Z}^{(k)}}^0(\mathcal{O}_{X'}).$$

On a alors le corollaire suivant

**COROLLAIRE 1.** — *Supposons  $A$  universellement caténaire, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) La  $\hat{A}$ -algèbre  $A^k$  est finie et contient  $\hat{A}$ ;  
 (ii) Pour tout entier  $k$  tel que  $\dim A \geq k \geq 2$ , la  $\hat{A}$ -algèbre  $A^k$  est finie et contient  $\hat{A}$ ;  
 (iii)  $\hat{A}$  est sans idéaux associés immergés.

En effet, dire que  $\hat{A} \subset A^k$  est équivalent à dire que  $\text{Ass } \mathcal{O}_{X'} \cap \mathfrak{Z}^{(k)} = \emptyset$ , et dire que  $A^k$  est fini est équivalent à dire, si  $X'$  est biéquidimensionnel,

que  $\text{Ass } \mathcal{O}_X$  n'a pas de cycle associé de codimension  $k-1$ . D'où le corollaire ci-dessus :

**COROLLAIRE 2.** — *Supposons que la clôture intégrale  $A'$  de  $A$  soit une  $A$ -algèbre finie, et soit  $Y = \text{Spec } A$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Pour tout point fermé  $y$  de  $Y$ ,  $\dim \mathcal{O}_{Y,y} \geq 2$ ;*
- (2) *Pour tout  $z \in \text{Ass } \mathcal{O}_X$ ,  $\dim \overline{\{z\}} \geq 2$ ;*
- (3) *Pour tout point maximal  $z$  de  $X'$ ,  $\dim \overline{\{z\}} \geq 2$ ;*
- (4) *Si  $U = X - \{m\}$ , alors l'homomorphisme*

$$A \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A(U) = \bigcap_{\mathfrak{p} \neq m} A_{\mathfrak{p}}$$

est fini.

Montrons que (1)  $\Rightarrow$  (2). Raisonnons par l'absurde. Nous avons le diagramme commutatif suivant;

$$\begin{array}{ccc} Y' = Y \times_X X' & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \end{array}$$

$Y'$  s'identifiant au spectre du complété de  $A'$ . Soit  $z$  un élément de  $\text{Ass } \mathcal{O}_X$  tel que  $\dim \overline{\{z\}} = 1$ . Soit  $K$  le corps des fractions de  $A$ . On a

$$Y' \times_Y \text{Spec } K \simeq X' \times_X \text{Spec } K,$$

donc

$$\text{Ass } \mathcal{O}_{X'} \simeq \text{Ass } \mathcal{O}_{Y'}.$$

et, par suite, si  $z'$  est l'unique point de  $Y'$  au-dessus de  $z$ ,  $z' \in \text{Ass } \mathcal{O}_{Y'}$ . Comme le morphisme  $Y' \rightarrow X'$  est entier, il en est de même du morphisme  $\overline{\{z'\}} \rightarrow \overline{\{z\}}$ , et par suite  $\dim \overline{\{z'\}} = 1$ . Il existe donc un point fermé  $y'$  de  $Y'$  tel que  $z' \in \text{Spec } \mathcal{O}_{Y',y'}$  et que

$$\dim \overline{\{z'\}} = \dim_{\text{Spec } (\mathcal{O}_{Y',y'})} \overline{\{z'\}} = 1.$$

Comme  $z' \in \text{Ass } \mathcal{O}_{Y',y'}$ , on a  $\text{prof } \mathcal{O}_{Y',y'} = 1$  (cf. [1], chap. 0, 16.4.6.3).

Soit  $y$  la projection de  $y'$  sur  $Y$ ;  $y$  est un point fermé de  $Y$ . Comme  $Y' \rightarrow Y$  est fidèlement plat,  $\text{prof } \mathcal{O}_{X,y} = 1$ , et comme  $\mathcal{O}_{Y,y}$  est intégralement clos,  $\dim \mathcal{O}_{Y,y} = 1$ , d'après le critère de Serre.

(2)  $\Rightarrow$  (3) est évident.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Soient  $y_1, \dots, y_r$  les points fermés de  $Y$ , et soient  $y'_1, \dots, y'_r$  leurs images réciproques dans  $Y'$ . On a  $Y' = \bigcup_{i=1}^r Y'_i$  (somme disjointe),

où  $Y'_i = \text{Spec } \mathcal{O}_{Y'_i}$ . Supposons qu'il existe un  $i$  tel que  $\dim \mathcal{O}_{Y, Y'_i} = 1$ . Alors  $\dim \mathcal{O}_{Y'_i} = 1$ . Soit  $z' \in \text{Ass } \mathcal{O}_{Y'_i}$ . On a

$$\dim_{Y'_i}(\overline{\{z'\}}) = \dim \overline{\{z'\}} = 1$$

et  $z'$  est nécessairement un point maximal de  $Y'_i$ , donc de  $Y'$ . Comme  $Y \times_Y \text{Spec } K \simeq X' \times_X \text{Spec } K$ , si  $z$  est la projection de  $z'$  dans  $X'$ ,  $z$  est encore un point maximal de  $X'$ , et  $\dim \overline{\{z\}} = 1$  puisque  $\overline{\{z'\}} \rightarrow \overline{\{z\}}$  est un morphisme entier.

(2)  $\Leftrightarrow$  (4) découle du corollaire suivant :

**COROLLAIRE 3** ([2], 7.2.2). — *Soit  $U$  l'ouvert complémentaire du point fermé de  $X$ . Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $A \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X) = A(U)$  est fini;
- (2) Pour tout  $x \in \text{Ass } \mathcal{O}_X$ ,  $\dim \overline{\{x'\}} \geq 2$ .

Ces corollaires montrent, dans des cas particuliers, l'intérêt du foncteur  $\mathcal{H}_{X/\mathcal{O}}^0(\mathcal{O}_X)$  pour des parties  $\mathcal{Z}$  convenablement choisies, dans l'étude du problème (P) envisagé précédemment. Nous allons voir qu'en fait le problème (P) est équivalent au problème suivant :

(P') *Soit  $A$  un anneau local intègre noethérien unibranche, de dimension  $\geq 2$ . Soient  $X = \text{Spec } A$  et  $U$  l'ouvert complémentaire du point fermé. L'homomorphisme  $A \rightarrow A(U)$  est-il fini ?*

Pour voir cette équivalence, nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant. Nous reprenons les hypothèses et notations du début.

**PROPOSITION 1.** — *Soit  $z \in \text{Ass } \mathcal{O}_X$ . Il existe un schéma affine local  $Y$  et un élément  $z'$  de  $\text{Ass } \mathcal{O}_{Y'}$ , où  $Y'$  est le spectre du complété de  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ , tels que :*

1° *il existe un morphisme  $Y \rightarrow X$  essentiellement de type fini et birationnel;*

2° *Soient  $x$  et  $y$  les points fermés respectifs de  $X$  et  $Y$ ; l'homomorphisme  $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_y$  est local;*

3°  $\dim \mathcal{O}_{X', z} = \dim \mathcal{O}_{Y', z'}$ , et  $\dim_{Y'}(\overline{\{z'\}}) = 1$ .

Soit  $\mathfrak{q}$  l'idéal premier associé à  $z$ . L'anneau  $C = \hat{A}/\mathfrak{q}$  est un anneau local intègre, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}C$ . Soit  $(u = u_1, u_2, \dots, u_r)$  un système de générateurs non nuls de  $\mathfrak{m}$ , et considérons la sous- $C$ -algèbre  $C' = C[u_2/u, \dots, u_r/u]$  de  $C \otimes_A K$ . Comme  $A \subset C$ , on voit que le morphisme de  $A$ -modules  $\hat{A} \rightarrow C'$  se factorise en

$$\hat{A} \rightarrow \hat{A} \otimes_A A[u_2/u, \dots, u_r/u] \rightarrow C',$$

le dernier homomorphisme étant surjectif. Posons

$$B_0 = A[u_2/u, \dots, u_r/u], \quad B'_0 = \hat{A} \otimes_A B_0.$$

Soit  $\mathfrak{p}'_0$  le noyau de  $B'_0 \rightarrow C'$ , de sorte que  $B'_0/\mathfrak{p}'_0 \simeq C'$ , donc  $\mathfrak{p}'_0$  est un idéal premier, et il est immédiat que  $\mathfrak{p}'_0 \cap \hat{A} = \mathfrak{q}$ . De plus, on a  $\mathfrak{m}C' = uC'$ . Soit  $\mathfrak{r}$  un idéal premier de  $C'$  minimal contenant  $uC'$ , donc  $\dim C'_r = 1$ . Soient  $\mathfrak{n}'_0$  l'image réciproque de  $\mathfrak{r}$  dans  $B'_0$ , et  $\mathfrak{n}_0$  la trace de  $\mathfrak{n}'_0$  dans  $B_0$ . Comme  $uB_0 = \mathfrak{m}B_0$  et que  $\hat{A}/\mathfrak{m}^n \hat{A} \simeq A/\mathfrak{m}^n$  on voit que

$$B_0/u^n B_0 \simeq B'_0/u^n B'_0.$$

Ainsi  $\mathfrak{n}'_0$  est le seul idéal premier de  $B'_0$  au-dessus de  $\mathfrak{n}_0$ , et  $\mathfrak{n}'_0 = \mathfrak{n}_0 B'_0$ . De plus,  $\mathfrak{n}_0 \cap A = \mathfrak{m}$ .

Posons  $B = (B_0)_{\mathfrak{n}_0}$ ,  $B' = (B'_0)_{\mathfrak{n}'_0}$ ,  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'_0 B'$ ,  $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 B$ ,  $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}'_0 B'$ . Alors le couple d'anneaux locaux  $(B, B')$  possède les propriétés suivantes :

(a) Il existe un idéal premier  $\mathfrak{p}'$  de  $B'$  tel que  $\mathfrak{p}' \in \text{Ass}_B B'$ ,

$$\dim B'_{\mathfrak{p}'} = \dim \hat{A}_{\mathfrak{q}} \quad \text{et} \quad \dim B'/\mathfrak{p}' = 1;$$

(b) L'homomorphisme  $B \rightarrow B'$  est fidèlement plat,  $B$  et  $B'$  ont même corps résiduel et même complété.

En effet,  $B' \otimes_B K$  est un localisé de  $\hat{A} \otimes_A K$ , ce qui montre que

$$\mathfrak{p}' \in \text{Ass} B' \quad \text{et} \quad \dim B'_{\mathfrak{p}'} = \dim \hat{A}_{\mathfrak{q}}.$$

D'où (a), puisque  $B'/\mathfrak{p}' \simeq C'_r$ .

L'homomorphisme  $B \rightarrow B'$ , se déduisant de l'homomorphisme  $A \rightarrow \hat{A}$  par extension de la base, est donc fidèlement plat. Comme  $B/u^n B \simeq B'/u^n B'$ , on a

$$B/u^n B \simeq B'/u^n B' \simeq B'/\mathfrak{n}^n,$$

d'où (b).

Terminons la démonstration de la proposition 1. L'homomorphisme  $B \rightarrow B/\mathfrak{n}^n$  se factorisant par  $B \rightarrow B' \rightarrow B'/\mathfrak{n}^n$ , on voit que  $B \rightarrow \hat{B}$  se factorise en  $B \rightarrow B' \rightarrow \hat{B}$ . Soit  $\mathfrak{q}'$  un idéal premier de  $\hat{B}$  minimal contenant  $\mathfrak{p}'\hat{B}$ . Comme  $B' \rightarrow \hat{B}$  est fidèlement plat,  $\dim \hat{B}_{\mathfrak{q}'} = \dim B'_{\mathfrak{p}'}$  et  $\mathfrak{q}' \in \text{Ass} \hat{B}$ . De même,  $B'/\mathfrak{p}' \rightarrow \hat{B}/\mathfrak{p}'\hat{B}$  étant fidèlement plat et local,  $\dim \hat{B}/\mathfrak{p}'\hat{B} = 1$ , donc  $\dim \hat{B}/\mathfrak{p}' = 1$ . D'où la proposition, en prenant pour  $Y = \text{Spec} B$  et pour  $z'$  le point de  $Y'$  associé à l'idéal premier  $\mathfrak{q}'$ .

**THÉORÈME 2.** — Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\mathcal{O}_X$  est sans cycles associés immergés;

(ii) pour tout schéma local affine intègre essentiellement de type fini  $Y$  au-dessus de  $X$ , tel que :

(a) si  $x$  et  $y$  sont les points fermés de  $X$  et de  $Y$ , l'homomorphisme  $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_y$  est local,  $\mathcal{O}_y$  est unibranche, et  $\dim \mathcal{O}_y \geq 2$ ;

(b)  $Y \rightarrow X$  est birationnel.

Alors si  $U = Y - \{y\}$ , l'homomorphisme canonique  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  est fini.

Avant de montrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme préliminaire suivant :

LEMME 1. — Soit  $A$  un anneau local intègre noethérien unibranche de dimension  $\geq 2$ . Soit  $U'$  l'ouvert complémentaire du point fermé de  $\text{Spec } \hat{A}$ . Alors  $U'$  est connexe.

Soient  $X = \text{Spec } A$ ,  $U = X - \{\text{rad } A\}$ ,  $A'$  la clôture intégrale de  $A$ ,  $Y = \text{Spec } A'$ ,  $V = Y - \{\text{rad } A'\}$ ,  $\varphi : Y \rightarrow X$ . Comme  $\varphi^{-1}(U) = V$ , puisque  $A$  est unibranche, et que  $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_y$ , l'anneau  $A(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$  est contenu dans  $\Gamma(V, \mathcal{O}_V) = A'(V)$ . Comme  $A'$  est un anneau de Krull, on sait que  $A'(V) \simeq A'$ , et par suite,  $A(U)$  est entier et local. On peut donc décrire  $A(U)$  comme une limite inductive de  $A$ -algèbres locales finies  $A_\lambda$ . Par conséquent,  $\hat{A}(U') = A(U) \otimes_A \hat{A} = \varinjlim \hat{A}_\lambda$ . Comme  $\hat{A}_\lambda$  est local,  $\hat{A}(U')$  est local, et par suite  $U'$  est connexe.

Revenons à la démonstration du théorème. Montrons que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Posons

$$Y = \text{Spec } B, \quad Y' = Y \times_X X', \quad Y' = \text{Spec } B', \quad Z = \text{Spec } \hat{B}.$$

Comme  $Y$  est essentiellement de type fini,  $Y'$  est localement noethérien. Comme  $Y' \times_Y \text{Spec } K \simeq X' \times_X \text{Spec } K$ , où  $K$  est le corps des fractions de  $A$ , on voit que  $\text{Ass } \mathcal{O}_{X'} \simeq \text{Ass } \mathcal{O}_{Y'}$ , donc  $\mathcal{O}_{Y'}$  est sans cycles associés immergés. L'hypothèse «  $\mathcal{O}_x \rightarrow \mathcal{O}_y$  est un homomorphisme local » entraîne que  $B$  et  $B'$  ont même complété, donc  $Z = \text{Spec } \hat{B}'$ . D'autre part, comme  $X'$  est un sous-schéma fermé d'un schéma régulier, il en est de même de  $Y'$ . On sait alors ([2], 6.3.8) que les fibres du morphisme  $Y' \rightarrow Z$  sont des schémas de Cohen-Macaulay. Il en résulte que  $\mathcal{O}_Z$  est sans cycle associé immergé.

Comme  $\mathcal{O}_y$  est unibranche, le lemme 1 montre que, pour tout point maximal  $z$  de  $Z$ , on a  $\dim_Z \overline{\{z\}} \geq 2$  (sinon  $z$  serait isolé dans  $Z - \{\text{rad } \hat{B}\}$ ). On termine en appliquant le corollaire 3 du théorème 1.

Montrons que (ii)  $\Rightarrow$  (i). A l'aide de ce même corollaire et de la proposition 1, on aura montré l'assertion, si l'on peut supposer, de plus,  $\mathcal{O}_{Y,y}$  unibranche dans la proposition 1. En effet, (cf. loc. cit.) si  $\dim \mathcal{O}_{X',z} \geq 1$ ,

on a  $\dim \mathcal{O}_{Y', y'} \geq 2$ ,  $y'$  étant le point fermé de  $Y'$ , et par conséquent  $\dim \mathcal{O}_Y \geq 2$ .

LEMME 2. — *En gardant les notations et hypothèses de la proposition 1, on peut supposer  $\mathcal{O}_Y$  unibranche.*

En effet, si  $C$  est la clôture intégrale de l'anneau intègre local  $B$  tel que  $Y = \text{Spec } B$ , on sait qu'il existe une  $B$ -algèbre finie  $B_1$  telle que le morphisme  $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } B_1$  soit un homéomorphisme ([1], chap. 0, 23.2.5). Comme  $\hat{B}_1$  s'identifie à  $B_1 \otimes_B \hat{B}$  et que  $B_1 \otimes_B K \simeq \hat{B} \otimes_B K$ , on voit qu'il existe un idéal premier  $q_1$  de  $\text{Ass } \hat{B}_1$  tel que

$$q_1 \cap \hat{B} = q' \quad \text{et} \quad B_{q'} \simeq (\hat{B}_1)_{q_1}.$$

Comme  $\hat{B}_1/q_1$  est entier sur  $\hat{B}/q'$ , on a  $\dim \hat{B}_1/q_1 = 1$ . Soit  $\pi'_1$  un idéal maximal de  $\hat{B}_1$  tel que  $q_1 \subset \pi'_1$ . On sait que  $\pi'_1$  est de la forme  $\pi_1 B_1$ , où  $\pi_1$  est un idéal maximal de  $B_1$ . Alors l'anneau  $(B_1)_{\pi_1}$  est unibranche, et vérifie la conclusion de la proposition 1.

Donnons, pour terminer, une démonstration du résultat précédemment cité de Ratliff, basée sur le lemme 1 du théorème 2.

THÉORÈME 3. — *Soit  $A$  un anneau local intègre noethérien. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $A$  est universellement caténaire;
- (ii)  $\hat{A}$  est équidimensionnel.

[Pour (ii)  $\Rightarrow$  (i), voir [2], 7.1.11.] Nous ne montrerons que l'implication (i)  $\Rightarrow$  (ii). Pour cela, nous allons procéder en plusieurs étapes.

(a) *Réduction au cas où  $A$  est un anneau hensélien.* — Soit  $C$  la clôture intégrale de  $A$ , et soit  $A'$  une  $A$ -algèbre finie telle que  $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } A'$  soit un homéomorphisme ([1], chap. 0, 23.2.5). Comme  $A$  est universellement caténaire, il en est de même de  $A'$ , et on a, pour tout idéal maximal  $\pi$  de  $A'$ ,

$$\dim A'_\pi = \dim A \quad ([2], 5.6.10).$$

Soient  $\pi_1, \dots, \pi_r$  les idéaux maximaux de  $A'$ ,  $C_i = A'_{\pi_i}$ , donc  $\dim C_i = \dim A$  et  $\hat{A} = \prod C_i$ . Posons  $\pi'_i = \pi_i \hat{A}$ . Soit  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \hat{A}$ . Comme le morphisme  $\hat{A} \rightarrow \hat{A}'$  est entier, il existe un élément  $\mathfrak{p}'$  de  $\text{Spec } \hat{A}'$  au-dessus de  $\mathfrak{p}$  et, si  $\mathfrak{p}$  est minimal, il en est de même de  $\mathfrak{p}'$ . D'autre part, si  $\pi'_i \supset \mathfrak{p}'$ , on a

$$\dim \hat{A}/\mathfrak{p} = \dim \hat{A}'/\mathfrak{p}' = \dim \hat{C}_i/\mathfrak{p}' \hat{C}_i,$$

la dernière égalité ayant lieu puisque  $\hat{A}/\mathfrak{p}$  est universellement caténaire et intègre, et que  $\hat{A}'/\mathfrak{p}'$  est fini sur  $\hat{A}/\mathfrak{p}$  (cf. [2], 5.6.10).



Pour démontrer que  $\hat{A}$  est équidimensionnel, on est donc ramené à démontrer que  $\hat{C}_i$  est équidimensionnel, c'est-à-dire au cas où l'anneau de départ est unibranche. Mais alors si  $A$  est unibranche, le hensélisé  ${}^hA$  de  $A$  est intègre et universellement caténaire ([3], 18.7.5). Comme  ${}^hA$  et  $A$  ont même complété, on peut supposer  $A$  hensélien.

(b) *Supposons qu'il existe un idéal premier minimal  $q \in \text{Spec } \hat{A}$  tel que  $\dim \hat{A}/q < \dim A$ . Alors, on peut même supposer  $\dim \hat{A}/q = r < \dim A$ .* — Supposons  $\dim \hat{A}/q \geq 2$ . Soient  $X' = \text{Spec } \hat{A}$ ,  $X = \text{Spec } A$ ,  $f: X' \rightarrow X$ . Regardons la partie  $F$  de  $Z = V(q)$ , constituée par les points de  $Z$  de codimension  $r$  et n'appartenant pas à  $f^{-1}(o)$ . Autrement dit, un idéal premier  $p$  appartient à  $F$ , si  $p$  est minimal pour la propriété de contenir un idéal de la forme  $q + u\hat{A}$ , où  $u$  est un élément non nul de  $A$ . Comme  $\dim \hat{A}/q \geq 2$ ,  $m\hat{A}$  n'est pas dans  $F$ , et  $F$  est infini, sinon  $m\hat{A}$  serait contenu dans une réunion finie d'idéaux premiers différents de lui-même.

Soient  $Z_i$  les composantes irréductibles de  $X'$ , différentes de  $Z$ . On a  $F \cap Z_i \subset Z \cap Z_i$ . Comme  $\text{codim } Z \cap Z_i \geq r$ ,  $F \cap Z_i$  est ou vide ou composé de points génériques de composantes irréductibles de  $Z \cap Z_i$ , et par suite  $F \cap Z_i$  est fini.

Par conséquent, il existe un point de  $F$  n'appartenant à aucun des  $F \cap Z_i$ . Soit  $q'$  l'idéal premier de  $\hat{A}$  associé à ce point. On a  $\dim \hat{A}/q' = r$ . De plus, si  $q' \cap A = p$ ,  $p$  est différent de  $(o)$ ,  $q'$  est minimal, contenant  $p\hat{A}$ , et  $\dim A/p = r$ . Comme  $A$  est intègre et caténaire,  $\dim A/p = \dim A - r$ . D'autre part, pour des raisons identiques,

$$\dim \hat{A}/q' = \dim \hat{A}/q - r \quad \text{et} \quad \dim \hat{A}/q' < \dim A/p - r.$$

Posons  $B = A/p$ , alors  $\dim B < \dim A$ ,  $B$  est encore hensélien, et  $\hat{B}$  n'est pas équidimensionnel. D'où, par récurrence, la réduction annoncée.

(c) *Fin de la démonstration.* — Comme  $\dim A \geq 2$ , et comme  $A$  est unibranche, il suffit d'appliquer le lemme 1. En effet, sinon  $\{q\}$  serait isolé dans  $X' - \{\text{rad } \hat{A}\}$ .

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] GROTHENDIECK (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés avec la collaboration de Jean DIEUDONNÉ. Chap. IV : *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* (Première partie). — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 20).

- [2] GROTHENDIECK (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés avec la collaboration de Jean DIEUDONNÉ. Chap. IV : *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* (Seconde partie). — Paris, Presses universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 24).
- [3] GROTHENDIECK (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*, rédigés avec la collaboration de Jean DIEUDONNÉ. Chap. IV : *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas* (Quatrième partie). — Paris Presses universitaires de France, 1967 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 32).
- [4] GROTHENDIECK (Alexander). — Cohomologie locale des faisceaux cohérents..., *Séminaire de géométrie algébrique*, 2<sup>e</sup> année, fasc. 1. — Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études scientifiques, 1962.
- [5] HARTSHORNE (Robin). — *Local cohomology*. A seminar given by A. GROTHENDIECK, Harvard University, 1961. — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Lecture Notes in Mathematics*, 41).
- [6] NAGATA (Masayoshi). — *Local rings*. — New York. Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 13).
- [7] RATLIFF (L. J.). — A characterization of analytically unramified semilocal rings and applications, *Pacific J. of Math.*, t. 27, 1968, p. 127-143.
- [8] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*. Vol. 1. — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1958 (*The University series in higher mathematics*).

(Texte reçu le 30 juin 1969.)

M<sup>me</sup> Marguerite FLEXOR-MANGENEY,  
85, rue Racine, 92-Montrouge.

---