HENRI HOGBE-NLEND

Sur une question de J. Dieudonné

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 201-208
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__201_0>

Bull. Soc. math. France
98, 1970, p. 201 à 208.

SUR UNE QUESTION DE J. DIEUDONNÉ

PAR

HENRI HOGBE-NLEND.

1. Introduction.

Dans [4], J. DIEUDONNÉ a étudié les « conditions de dénombrabilité » dans les espaces localement convexes, et fourni une caractérisation intrinsèque des duals forts d'espaces de Fréchet-Montel par le théorème suivant :

(1) *Soit E un espace tonnelé admettant une base dénombrable de convexes compacts, E est le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel.*

Dans le même article, DIEUDONNÉ a établi qu'en supprimant les hypothèses de convexité sur la famille des compacts de E on obtenait le résultat suivant :

(2) *Soit E un espace tonnelé ou bornologique admettant une base dénombrable de compacts, E est dense dans le dual fort E_1 d'un espace de Fréchet-Montel.*

Relativement à ce dernier résultat, DIEUDONNÉ posa notamment les questions suivantes :

(*a*) Le résultat (2) est-il vrai si E est supposé seulement quasi tonnelé?

(*b*) E est-il toujours égal à E_1, autrement dit : E est-il le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel? Ces questions ont suscité des travaux de plusieurs auteurs, dont notamment [3], [5], [6], [9].

Nous nous proposons, dans le présent article, de montrer que les questions posées par DIEUDONNÉ *sont en dernière analyse des questions de bornologie. Les réponses affirmatives à ces questions, et les résultats des auteurs sus-cités, découlent tous d'un seul résultat nouveau et très général de bornologie où n'intervient* a priori *aucune trace de topologie. Nous donnons en outre une* *caractérisation intrinsèque des espaces D.-F. Schwartz, et montrons qu'il existe une remarquable dualité entre ces espaces et les espaces de Fréchet-Montel.*

2. Notions de bornologie.

Étant donné un ensemble E, on appelle *bornologie* sur E une famille $\mathcal{B}$ de parties de E formant un recouvrement de E, héréditaire pour l'inclusion, et stable par réunion finie. Un couple $(E, \mathcal{B})$ d'un ensemble E et d'une bornologie sur E est appelé *ensemble bornologique.* Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés « *bornés* » de E. Une application d'un ensemble bornologique dans un autre est dite bornée si elle transforme un borné en un borné. Une bornologie $\mathcal{B}_1$ sur E est plus fine qu'une bornologie $\mathcal{B}_2$ sur E si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ c'est-à-dire si l'identité de $(E, \mathcal{B}_1)$ dans $(E, \mathcal{B}_2)$ est bornée. On définit de façon naturelle les notions de bornologie produit, bornologie induite, bornologie quotient, etc. Une bornologie sur un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{K}$ égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est dite vectorielle si les deux applications

$$(x, y) \to x + y \quad \text{et} \quad (\lambda, x) \to \lambda x$$

de $E \times E$ dans E et de $\mathbf{K} \times E$ dans E sont bornées lorsqu'on munit $E \times E$ et $\mathbf{K} \times E$ des bornologies produits naturelles. Une bornologie sur un espace vectoriel est vectorielle si, et seulement si, elle est stable par somme finie, par homothétie et par passage à l'enveloppe équilibrée. Un *espace vectoriel bornologique* est un espace vectoriel muni d'une bornologie vectorielle. Une bornologie vectorielle est dite convexe si elle est stable par passage à l'enveloppe convexe. Nous entendons par *espace bornologique*, un espace vectoriel muni d'une bornologie vectorielle et convexe. Les espaces vectoriels topologiques localement convexes bornologiques sont appelés, par nous, e.l.c. *bornologiques.* On trouvera notamment dans [2] et [8] de plus amples informations sur les espaces bornologiques.

3. Notations et terminologie.

Pour tout ensemble E et pour toute famille $\mathcal{B}$ de parties de E, on appellera *base de Dieudonné* de $\mathcal{B}$ une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{B}$ telle que tout élément de $\mathcal{B}$ soit contenu dans un élément de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{B}$ est une bornologie sur E, on dit que $\mathcal{F}$ est une *base de bornologie* de E. De façon générale, nous suivons la terminologie de Bourbaki [1]. Cependant un espace localement convexe séparé sera dit *ultra-bornologique* s'il est limite inductive d'espaces de Banach. Nous appelons *espace semi-Montel* un espace de type (M) au sens de Grothendieck, c'est-à-dire un espace localement convexe séparé dans lequel tout borné est relativement compact.

4. Un résultat simple et fondamental.

THÉORÈME 1. — *Soit E un espace vectoriel bornologique (e.v.b.) non nécessairement convexe; soit $\mathcal{B}$ sa bornologie. Soit $\mathcal{B}_{0,m}$ la bornologie sur E définie par les suites convergeant vers zéro au sens de Mackey. Soit $\mathcal{B}'$ une bornologie vectorielle sur E, et soit $\mathcal{B}''$ une famille de parties de E telles que*

$$\mathcal{B} \supset \mathcal{B}'' \supset \mathcal{B}' \supset \mathcal{B}_{0,m}.$$

Si la bornologie $\mathcal{B}'$ est à base dénombrable, toute base de bornologie de $\mathcal{B}'$ est une base de Dieudonné de $\mathcal{B}''$.

Démonstration. — Soit (B_n) une base de $\mathcal{B}'$. En vertu des hypothèses sur $\mathcal{B}'$, pour tout entier n, il existe un entier m tel que $B_n \subset n\mathrm{B}_n B \subset \mathrm{B}_m$. Il suffit par conséquent de montrer que $\mathcal{B}'_1 = \{nB_n\}$ est une base de Dieudonné de $\mathcal{B}''$. Supposons le contraire, et soit B un élément de $\mathcal{B}''$ contenu dans aucun nB_n. Il existe alors une suite (x_n) de B telle que, pour tout entier n, $x_n \notin nB_n$. La suite (x_n/n) tend vers zéro au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B})$ (l'espace vectoriel E muni de la bornologie $\mathcal{B}$), donc, en vertu des hypothèses, (x_n/n) est une suite bornée dans $(E, \mathcal{B}')$. Il existe par conséquent un entier n_0, tel que $(x_{n_0}/n_0) \in B_{n_0}$, ce qui est contraire à la construction de la suite (x_n).

5. Application aux espaces vectoriels topologiques.

Soit E un espace vectoriel topologique. Sur E, on peut considérer plusieurs bornologies « naturelles » dont notamment :

— $\mathcal{B}$ la bornologie sur E formée des bornés au sens e. v. t. : une partie de E est bornée dans $(E, \mathcal{B})$ si, et seulement si, elle est absorbée par tout voisinage de zéro;

— $\mathcal{B}_0$ la bornologie engendrée par les suites de E tendant vers zéro ;

— $\mathcal{B}_c$ *la bornologie compacte* : une partie de E est bornée dans $(E, \mathcal{B}_c)$ si, et seulement si, elle est relativement compacte;

— $\mathcal{B}_p$ *la bornologie précompacte* engendrée par les parties précompactes de E.

Si, de plus, E est localement convexe séparé, on peut considérer :

— $\mathcal{B}_{\gamma 0}$ (resp. $\mathcal{B}_{\gamma c}$) la bornologie formée des enveloppes convexes des éléments de $\mathcal{B}_0$ (resp. de $\mathcal{B}_c$);

— $\mathcal{B}_{cc}$ la bornologie formée des convexes compacts de E;

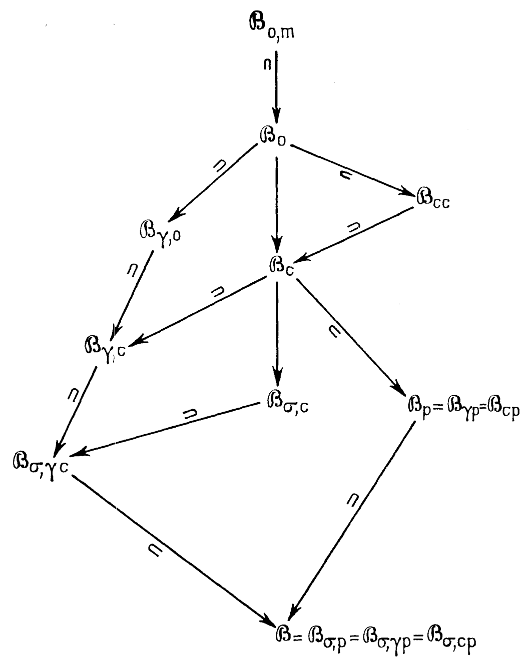
— $\mathcal{B}_{\sigma,c}$ la bornologie compacte dans l'espace E muni de la topologie faible $\sigma(E, E')$;

— $\mathcal{B}_{\sigma,\gamma c}$ la bornologie formée des enveloppes convexes des éléments de $\mathcal{B}_{\sigma,c}$.

— Avec des notations analogues, on définit les bornologies $\mathcal{B}_{\gamma p}$, $\mathcal{B}_{cp}$, $\mathcal{B}_{\sigma, p}$ et $\mathcal{B}_{\sigma, cp}$. Du fait que l'enveloppe convexe d'un ensemble précompact est précompact, on a $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}_{\gamma p} = \mathcal{B}_{cp}$ et du fait que les parties bornées d'un espace localement convexe séparé sont identiques aux parties précompactes pour $\sigma(E, E')$, on a

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\sigma, p} = \mathcal{B}_{\sigma, \gamma p} = \mathcal{B}_{\sigma, cp}.$$

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bornologies comparables sur E telles que $\mathcal{B}_2$ soit moins fine que $\mathcal{B}_1$, on notera $\mathcal{B}_1 \overset{\subset}{\rightarrow} \mathcal{B}_2$. On notera $\mathcal{B}_{0, m}$ la bornologie sur E formée des suites convergeant vers zéro au sens de Mackey dans $(E, \mathcal{B})$. Les relations entre les diverses bornologies ci-dessus sont résumées dans le diagramme suivant :



Toutes les bornologies ci-dessus étant vectorielles, il est possible de former, à partir du shéma ci-dessus, plusieurs couples $(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ répondant aux conditions du théorème 1. L'application de ce théorème fournit alors de nombreux résultats intéressants sur les conditions de dénombrabilité dans les espaces localement convexes suivant l'esprit de DIEUDONNÉ. Nous nous bornerons à énoncer ceux de ces résultats qui nous semblent les plus remarquables.

PROPOSITION 1. — *Soit E un espace localement convexe séparé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La bornologie $\mathcal{B}_c$ est à base dénombrable.*

(ii) *La bornologie $\mathcal{B}_{cc}$ est à base dénombrable.*

Si l'une d'elles est satisfaite, E est un espace semi-Montel, et de plus

$$\mathcal{B}_c = \mathcal{B}_{cc} = \mathcal{B}_{\gamma c}.$$

Démonstration. — La condition (ii) entraîne (i) en vertu du théorème 1 et du schéma ci-dessus. De même, si $\mathcal{B}_c$ est à base dénombrable, $\mathcal{B}_c = \mathcal{B}_{\gamma c} = \mathcal{B}$, donc E est semi-Montel, donc quasi complet, d'où

$$\mathcal{B}_{\gamma c} = \mathcal{B}_{\gamma_{cc}} \qquad \text{(théorème de Krein)}$$

d'où la proposition.

Remarque. — On a montré que tout espace localement convexe séparé, admettant une base dénombrable de compacts, est nécessairement quasi complet, résultat qui rend inutile une précaution de DIEUDONNÉ ([4], p. 368, § 3).

COROLLAIRE 1 (Réponse à DIEUDONNÉ). — *Soit E un espace localement convexe séparé. Pour que E soit le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel il faut et il suffit que E soit quasi tonnelé et que $\mathcal{B}_c$ soit à base dénombrable.*

Démonstration. — La nécessité est évidente. Inversement, E, étant quasi tonnelé et semi-Montel, est un espace de Montel, donc réflexif. Comme $E'_\beta = E'_k$ (en notant E'_k le dual de E muni de la topologie de la convergence compacte), E'_β est métrisable. Comme c'est un espace de Montel, c'est donc un Fréchet-Montel, d'où le corollaire.

La proposition 1 nous permet aussi de donner une caractérisation intrinsèque des espaces (DF)-Montel au moyen de la bornologie précompacte, résultat qui retrouve de manière remarquablement simple et renforce un théorème de B. S. BRUDOVSKIĬ [3].

COROLLAIRE 2. — *Soit F un espace localement convexe séparé. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel.*

(ii) *$F = \hat{E}$ complété d'un espace quasi tonnelé E dont la bornologie précompacte $\mathcal{B}_p$ est à base dénombrable.*

Démonstration. — Supposons (i). Alors F est complet en tant que dual fort d'un espace localement convexe bornologique. Posons $E = F$. E est tonnelé en tant que dual fort d'un espace de Fréchet réflexif, et E est un espace de Montel en tant que dual fort d'un espace de Montel, donc tout borné de E est précompact, d'où (ii). Inversement, si la condition (ii) est satisfaite, E est un espace (DF), et par conséquent tout borné de $\hat{E}$ est contenu dans l'adhérence d'un borné de E [7]. Comme E admet une base dénombrable d'ensembles précompacts, $\hat{E}$ admet alors une base dénombrable de compacts, et comme $\hat{E}$ est tonnelé (car E est quasi tonnelé), $\hat{E}$ est le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel en vertu du corollaire 1.

On en déduit un résultat de Funakosi [5] par une démonstration nettement plus courte et plus simple :

Corollaire 3 (Funakosi [5]). — *Soit E un espace nucléaire quasi complet dont la bornologie $\mathcal{B}$ est à base dénombrable et telle que toute suite fortement bornée de son dual soit équicontinue. E est le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel.*

Démonstration. — L'espace E est nécessairement quasi tonnelé : En effet, son dual fort E'_β est un espace de Montel métrisable. Il en résulte que tout borné de E_β est séparable (car métrisable et relativement compact), donc est contenu dans l'adhérence dans E'_β d'une suite fortement bornée donc équicontinue, d'où notre assertion. E étant quasi tonnelé est alors un espace (DF). Comme il est quasi complet, il est complet. Comme $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}$, le corollaire 3 résulte du corollaire 2.

La condition de dénombrabilité sur la bornologie précompacte fournit également une caractérisation intrinsèque des espaces (DF)-Schwartz. En effet, on a la proposition suivante :

Proposition 2. — *Soit E un espace localement convexe séparé. Pour que E soit un espace (DF)-Schwartz, il faut et il suffit qu'il soit quasi tonnelé et que sa bornologie précompacte $\mathcal{B}_p$ soit à base dénombrable.*

Démonstration. — Démontrons tout d'abord la *suffisance.* D'après le théorème 1, $\mathcal{B}_p = \mathcal{B}$, donc E est un espace (DF) (car il est quasi-tonnelé) donc tout borné est précompact. Il en résulte que c'est un espace de Schwartz. En effet, il suffit pour cela de vériffer que E est « quasi normable » au sens de Grothendieck [7] ce qui revient à vérifier (puisque E est quasi tonnelé) que E'_β vérifie la condition de convergence de Mackey-stricte [7], ce qui est vrai puisque E'_β est métrisable. Démontrons la *nécessité.* Notons E'_c le dual de E muni de la topologie de la convergence précompacte. La bornologie précompacte de E étant évidemment à base dénombrable (car dans un espace de Schwartz tout borné est précompact), il suffit de montrer que *tout espace (DF) dans lequel tout borné est précompact est quasi tonnelé.* Soit B' un borné fort de E'. Ce borné est relativement compact dans E'_β : il suffit en effet pour cela de montrer que de toute suite de B' on peut extraire une sous-suite convergente, car $E'_\beta = E'_c$ est métrisable. Or une suite (x_n) de B' est équicontinue, car E est un (DF), donc faiblement relativement compacte, donc relativement compacte dans E'_c ([1], chap III, § 3, n° 5, prop. 5), c'est-à-dire dans E'_β. Comme E'_β est un espace de Fréchet, toute partie relativement compacte de E'_β est contenue dans l'enveloppe disquée fermée d'une suite tendant vers zéro, donc d'une suite équicontinue [car E est un (DF)], et par conséquent est équicontinue. On a donc montré que E est quasi tonnelé, d'où la proposition.

Comme conséquence, on établit une dualité remarquable entre les espaces (DF)-Schwartz et les espaces de Fréchet-Montel.

Corollaire 1. — *Le dual fort d'un espace (DF)-Schwartz est un espace de Fréchet-Montel et le dual fort d'un espace de Fréchet-Montel est un espace (DF)-Schwartz.*

La première assertion résulte de la démonstration de la proposition 2 où l'on a établi que tout borné fort du dual d'un espace (DF)-Schwartz est relativement compact dans E'_β. La seconde assertion résulte immédiatement de la proposition 2, puisque le dual fort d'un Fréchet-Montel est ultrabornologique, donc tonnelé, et ses parties précompactes sont relativement compactes.

Tirons comme autre conséquence de la proposition 2, un équivalent d'un résultat de Dieudonné ([4], prop. 3).

Corollaire 2. — *Tout espace localement convexe métrisable possédant une bornologie précompacte à base dénombrable est de dimension finie.*

Enfin, les conditions de dénombrabilité sur la bornologie faiblement compacte permettent, moyennant le théorème 1, de donner une caractérisation intrinsèque des duals forts d'espaces de Fréchet réflexifs, retrouvant ainsi, dûment renforcé, un résultat de J. H. Garling [6].

Proposition 3. — *Soit E un espace localement convexe séparé. Pour que E soit le dual fort d'un espace de Fréchet réflexif, il faut et il suffit que E soit quasi tonnelé et que sa bornologie faiblement compacte $\mathcal{B}_{\sigma,c}$ soit à base dénombrable.*

Démonstration. — La nécessité est évidente, le dual fort d'un espace de Fréchet réflexif étant un espace (DF) ultra-bornologique et réflexif. Inversement, l'hypothèse entraîne, en vertu du théorème 1, que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\sigma,c}$, donc E est semi-réflexif d'après Mackey-Arens. Comme $\mathcal{B}_{\sigma,c}$ est à base dénombrable et E quasi tonnelé, E est un (DF) réflexif, c'est-à-dire le dual fort d'un espace de Fréchet réflexif, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1. — *Tout espace localement convexe métrisable, dont la bornologie faiblement compacte $\mathcal{B}_{\sigma, c}$ est à base dénombrable, est un espace de Banach réflexif.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques.* chap. 1-2, 3-5. — Paris, Hermann, 1953-1955 (*Act. scient. et ind.*, 1189 et 1229; *Bourbaki*, 15 et 18).

[2] BUCHWALTER (H.). — Espaces vectoriels bornologiques, *Publications du Département Sc. Mathématiques de la Faculté des Sciences de Lyon*, t. 2, 1965, fasc. 1, p. 2-53.

[3] BRUDOVSKIǏ (B. S.). — Countability conditions in locally convex spaces, *Soviet Math.*, t. 4, 1963, p. 1472-1474.

[4] DIEUDONNÉ (J.). — Denumerability conditions in convex vector spaces, *Proc. amer. math. Soc.*, t. 8, 1957, p. 367-372.

[5] FUNAKOSI (S.). — On nuclear spaces with fundamental system of bounded sets, II. *Proc. Japan Acad* ., t. 44, 1968, p. 807-810.

[6] GARLING (D. J. H.). — Locally convex spaces with denumerable systems of weakly compact sets, *Proc. Cambr. phil. Soc.*, t. 60, 1964, p. 813-815.

[7] GROTHENDIECK (A.). — Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Bras, Math.*, t. 3, 1952-1956, p. 57-123.

[8] HOGBE-NLEND (H.). — *Complétion, tenseurs et nucléarité en bornologie,* Thèse Sc. math. Bordeaux, 1969; à paraître *J. Math. pures et appl.*

[9] MAHOWALD (M.) and GOULD (G.). — Quasi-barreled locally convex spaces, *Proc. Amer. math. Soc.* t. 11, 1960, p. 811-816.

(Texte reçu le 11 février 1970.)

Henri HOGBE-NLEND,
Maître de Conférences
Faculté des Sciences de Bordeaux
Département de Mathématiques,
351, cours de la Libération,
33-Talence.