BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER

Une propriété topologique des espaces q-convexes

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 319-328

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__319_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 319 à 328.

UNE PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE DES ESPACES q-CONVEXES

PAR

JOSEPH LE POTIER.

(Poitiers).

Introduction.

Tous les espaces analytiques seront supposés *complexes, dénombrables à l'infini et réduits.*

On connaît, depuis G. SORANI [8], le résultat suivant, qui concerne l'homologie des variétés analytiques q-convexes :

THÉORÈME 1. — *Soit X une variété analytique complexe, de dimension complexe n, q-convexe. Alors* $H_{n+i}(X, \mathbf{Z})$ *est de type fini dès que* $i > q$.

Si de plus, X est q-complète, X a le type d'homotopie d'un CW-complexe de dimension $\leq n+q$. *Il en résulte en particulier que*

$$H_{n+i}(X, \mathbf{Z}) = 0 \qquad \textit{pour} \quad i > q$$

et

$$H_{n+q}(X, \mathbf{Z}) \quad \textit{est libre.}$$

La démonstration, qui fait appel à la théorie des points critiques des fonctions différentiables de Marston Morse, ne se généralise évidemment pas aux espaces analytiques q-convexes. Cependant, dans le cas où $q = 0$, R. NARASIMHAN a montré le résultat suivant :

THÉORÈME 2 [5]. — *Soit X un espace de Stein de dimension complexe n. Alors* $H_{n+i}(X, \mathbf{Z}) = 0$ *pour* $i > 0$, *et* $H_n(X, \mathbf{Z})$ *est sans torsion.*

Nous nous proposons de généraliser le théorème 1 aux espaces analytiques. Sauf pour le cas $q = 0$ (propos. II.1), les résultats obtenus (propos. III.2) sont très incomplets puisqu'ils ne tiennent pas compte de la torsion.

I. Définitions et Rappels.

Soit X un espace analytique complexe. Une fonction $\varphi : X \to \mathbf{R}$ est dite *indéfiniment dérivable* si, pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x, un isomorphisme $\tau : U \to V$ de U sur un sous-espace analytique d'un ouvert V de $\mathbf{C}^N$ et une application $\psi : V \to \mathbf{R}$ indéfiniment dérivable telle que

$$\psi \circ \tau = \varphi \mid U.$$

Une telle fonction est dite *q-convexe* si on peut choisir, dans la définition précédente, la fonction ψ telle que la forme de Levi

$$\mathcal{L}(\psi, x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}(x)\, dz_i\, d\bar{z}_j$$

ait, pour tout $x \in V$, $n - q$ valeurs propres strictement positives.

Un espace analytique X est dit *q-convexe* s'il existe un compact K et une fonction φ, continue sur X et q-convexe sur $X - K$, telle que, pour tout réel c,

$$X_c = \{ x \in X,\ \varphi(x) < c \}$$

soit relativement compact dans X. Si on peut choisir $K = \emptyset$, on dit que X est *q-complet.*

Un espace analytique X est dit *cohomologiquement q-convexe* (*resp. cohomologiquement q-complet*) si, pour tout faisceau analytique cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on a, pour $i > q$,

$$\dim_{\mathbf{C}} H^i(X, \mathcal{F}) < \infty \quad [\text{resp. } H^i(X, \mathcal{F}) = 0].$$

La proposition bien connue qui suit, due à A. Andreotti et H. Grauert, est un des principaux résultats de [1].

Proposition I.1. — *Tout espace q-convexe (resp. q-complet) est cohomologiquement q-convexe (resp. q-complet).*

Dans le cas particulier où $q = 0$, on a le résultat plus précis suivant [6] :

Proposition I.2. — *Soit X un espace analytique.*

(*a*) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *X est* 0*-complet;*

(ii) *X est* 0*-cohomologiquement complet;*

(iii) *X est un espace de Stein.*

(*b*) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est 0*-convexe;*

(ii) *X est* 0*-cohomologiquement convexe;*

(iii) *X est « modification propre » d'espace de Stein par éclatement d'un nombre fini de points.*

La dernière assertion signifie qu'il existe un morphisme propre surjectif π de X sur un espace de Stein Y, et des points $y_1, \ldots, y_k$ de Y en nombre fini tels que, pour tout $y \in Y - \{ y_1, \ldots, y_k \}$, $\pi^{-1}(y)$ soit réduit à un point.

PROPOSITION I.3. — *Tout espace analytique de dimension complexe n est cohomologiquement n-complet.*

Ceci est un résultat dû à REIFFEN [7]. Il n'est pas évident qu'un espace analytique X de dimension complexe n soit n-complet. C'est vrai lorsque X est lisse; c'est encore vrai, mais déjà moins évident, lorsque l'ensemble singulier de X est de dimension o [10].

REMARQUE I.4. — Une variété analytique compacte de dimension n ne peut pas être q-complète pour $q < n$. Ceci résulte par exemple du principe du maximum. Ce résultat reste vrai pour les espaces (*voir* Remarque III.3).

II. Homologie des espaces o-convexes.

La proposition suivante est un complément au théorème **2.**

PROPOSITION II.1. — *Soit X un espace analytique* o*-convexe, de dimension complexe n. Alors $H_{n+i}(X, \mathbf{Z})$ est de type fini dès que $i >$ o.*

Démonstration. — En vertu de la proposition I.2, X est « modification propre » d'un espace de Stein Y par éclatement d'un nombre fini de points. Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme réalisant la modification; l'ensemble S des points $x \in X$, où $\pi^{-1}\pi(x) \neq \{ x \}$, est alors un sous-ensemble analytique compact de X, et $T = \pi(S)$ n'a qu'un nombre fini de points.

Montrons d'abord que le morphisme $(X, S) \to (Y, T)$ induit un isomorphisme en homologie. On sait que X et S sont des polyèdres, par conséquent A. N. R. (absolute neighborhood retract). On a donc (*voir* [4], chap. 27, ou encore [5])

$$H_k(X, S) = \varprojlim H_k(X, U)$$

la limite projective étant prise pour U parcourant un système fondamental de voisinages de S. Mais la projection π étant propre, donc fermée, les voisinages de S de la forme $\pi^{-1}(V)$, où V est un voisinage de T, forment un système fondamental de voisinage de S. On a donc

$$H_k(X, S) = \varprojlim_{V \text{ voisinage de } T} H_k(X, \pi^{-1}(V)).$$

On a de la même façon

$$H_k(Y, T) = \varprojlim_{V \text{ voisinage de } T} H_k(Y, V).$$

Il suffit donc de montrer que si V est un voisinage de T, le morphisme $(X, \pi^{-1}(V)) \to (Y, V)$ induit un isomorphisme en homologie. Mais ceci résulte du théorème d'excision, et du fait que π induit un isomorphisme : $X - S \to Y - T$.

On peut toujours supposer $n > 0$. On a la suite exacte

$$H_k(Y, \mathbf{Z}) \to H_k(Y, T; \mathbf{Z}) \to H_{k-1}(T, \mathbf{Z}).$$

On a évidement $H_{k-1}(T, \mathbf{Z}) = 0$ pour $k > 1$; il résulte du théorème 2 que l'on a alors

$$H_k(Y, T; \mathbf{Z}) = 0 \qquad \text{pour} \quad k > \dim_{\mathbf{C}} Y \quad \text{et} \quad k > 1,$$

et comme $n \geqq \dim_{\mathbf{C}} Y$, on obtient $H_k(X, S; \mathbf{Z}) = 0$ dès que $k > n$.

La suite exacte d'homologie montre alors que les homomorphismes canoniques

$$H_k(S, \mathbf{Z}) \to H_k(X, \mathbf{Z})$$

sont des isomorphismes pour $k > n$. S étant un ensemble analytique compact, ceci démontre la proposition II.1.

III. **Homologie des espaces analytiques q-cohomologiquement convexes.**

Soit X un espace analytique de faisceau structural $\mathcal{O}_X$. On note Ω_X^k le faisceau des k-formes différentielles holomorphes. Rappelons que si X est un modèle dans un ouvert U de $\mathbf{C}^m$, défini par un idéal $\mathcal{J}$, on a par définition :

$$\Omega_X^k = \Omega_U^k / d\mathcal{J} \wedge \Omega_U^{k-1} + \mathcal{J}\Omega_U^k.$$

Si X est quelconque, on peut définir Ω_X^k par recollement.

Il est évident que Ω_X^k est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Comme dans le cadre habituel, on a une différentielle $d : \Omega_X^k \to \Omega_X^{k+1}$ qui vérifie $d^2 = 0$. On note $\Omega_X^{\cdot}$ le complexe ainsi obtenu. En outre, on a une augmentation canonique $\mathbf{C} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_X^{\cdot}$. En général, $\mathbf{C} \xrightarrow{\varepsilon} \Omega_X^{\cdot}$ n'est pas une résolution de $\mathbf{C}$; de plus, si X est de dimension complexe n, on peut avoir $\Omega_X^k \neq 0$ pour $k > n$.

Rappelons maintenant les résultats de T. Bloom et M. Herrera. Ces derniers ont construit [2] :

1° une résolution $\mathbf{C} \xrightarrow{\nu} \mathcal{S}_X^{\cdot}$ de $\mathbf{C}$ ($\mathcal{S}_X^k$ est le faisceau des cochaînes semi-analytiques de degré k);

2° un morphisme $I^{\cdot} : \Omega_X^{\cdot} \to \mathcal{S}_X^{\cdot}$ (morphisme d'intégration) tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \Omega_X^{\cdot} \arrow[dd, "I^{\cdot}"] \\ \mathbf{C} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\nu"'] & \\ & \mathcal{S}_X^{\cdot} \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

De plus, lorsque X est de dimension complexe n, on a $I^k = 0$ pour $k > n$.

Soit $\tilde{\Omega}_X^{\bullet}$ le complexe défini par

$$\tilde{\Omega}_X^k = \begin{cases} \Omega_X^k & \text{si } k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

et de différentielle évidente. On a encore un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\Omega}_X^{\bullet} \arrow[d, "I^{\bullet}"] \\ \mathbf{C} \arrow[ur, "\varepsilon"] \arrow[r, "\nu"'] & \mathcal{S}_X^{\bullet} \end{tikzcd}$$

Appliquons à ce diagramme le foncteur hypercohomologie $\mathbf{H}^k(X, .)$ [c'est par définition le $k^{\text{ième}}$ foncteur hyperdérivé du foncteur section $\Gamma(X, .)$]. On obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{H}^k(X, \tilde{\Omega}_X^{\bullet}) \arrow[d, "\bar{I}^{\bullet}"] \\ H^k(X, \mathbf{C}) = \mathbf{H}^k(X, \mathbf{C}) \arrow[ur, "\bar{\varepsilon}"] \arrow[r, "\bar{\nu}"'] & \mathbf{H}^k(X, \mathcal{S}_X^{\bullet}) \end{tikzcd}$$

Proposition III.1. — *Dans les notations ci-dessus, l'application* $\bar{\varepsilon}$: $H^k(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{H}^k(X, \tilde{\Omega}_X^{\bullet})$ *possède un inverse à gauche canonique; de plus, si X est de dimension complexe n, et si S est l'ensemble singulier de X, c'est un isomorphisme pour* $k > n + 2\dim_{\mathbf{C}} S + 1$ *(avec la convention* $\dim_{\mathbf{C}} S = -\infty$ *lorsque S est vide).*

Démonstration. — $\mathcal{S}_X^{\bullet}$ étant une résolution de $\mathbf{C}$, $\bar{\nu}$ est un isomorphisme; $\bar{\varepsilon}$ a donc pour inverse à gauche $\eta = (\bar{\nu})^{-1}\bar{I}^{\bullet}$.

La deuxième partie de la proposition fait appel aux suites spectrales. On sait qu'il existe un foncteur spectral dont le terme E_2 est donné par

$$E_2^{k,l} = H^k(X, \mathcal{H}^l(.)),$$

et qui a pour aboutissement l'hypercohomologie $\mathbf{H}^{k+l}(X, .)$. $\mathcal{H}^l$ désigne ici le foncteur « $l^{\text{ième}}$ faisceau de cohomologie ».

Considérons le morphisme $E_\infty^{k,l}(\varepsilon)$.

(*a*) *Si* $l > 0$. — On a alors $E_2^{k,l}(\mathbf{C}) = 0$. D'autre part, le faisceau $\mathcal{H}^l(\tilde{\Omega}^{\bullet})$ a son support contenu dans S; il en résulte que $H^k(X, \mathcal{H}^l(\tilde{\Omega}^{\bullet})) = 0$ pour $k > 2\dim_{\mathbf{C}} S$. On a donc $E_2^{k,l}(\tilde{\Omega}^{\bullet}) = 0$ pour $k + l > n + 2\dim_{\mathbf{C}} S$.

(*b*) *Si* $l = 0$. — On a alors une suite exacte de faisceaux sur X :

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathcal{H}^0(\tilde{\Omega}) \to \mathcal{Q} \to 0,$$

qui donne naissance à la suite exacte de cohomologie :

$$H^{k-1}(X, \mathcal{Q}) \to H^k(X, \mathbf{C}) \xrightarrow{E_2^{k,0}(\varepsilon)} H^k(X, \mathcal{H}^0(\tilde{\Omega}^\cdot)) \to H^k(X, \mathcal{Q}),$$

$\mathcal{Q}$ ayant son support dans S, on obtient que $E_2^{k,0}(\varepsilon)$ est un isomorphisme pour $k > 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1$.

Mais il résulte de ce qui a été dit au (*a*) que dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E_2^{k,0}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{E_2^{k,0}(\varepsilon)} & E_2^{k,0}(\tilde{\Omega}^\cdot) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_\infty^{k,0}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{E_\infty^{k,0}(\varepsilon)} & E_\infty^{k,0}(\tilde{\Omega}^\cdot) \end{array}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes, pourvu que

$$k > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1.$$

Dans les deux cas $E_\infty^{k,l}(\varepsilon)$ est un isomorphisme pour

$$k + l > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1.$$

Il est alors clair que $\bar{\varepsilon} : H^k(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{H}^k(X, \tilde{\Omega}_X^\cdot)$ est un isomorphisme si $k > n + 2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1$. Ceci démontre la proposition.

Proposition III. 2. — *Soit X un espace analytique de dimension complexe n, cohomologiquement q-convexe (resp. q-complet). Alors, pour $i > q$,*

$$\dim_{\mathbf{C}} H_{n+i}(X, \mathbf{C}) < \infty \quad [\textit{resp.}\ H_{n+i}(X, \mathbf{C}) = 0].$$

Démonstration. — En vertu de la proposition III.1 et du théorème des coefficients universels, il suffit de montrer que

$$\dim_{\mathbf{C}} H^{n+i}(X, \tilde{\Omega}^\cdot) < \infty \quad [\text{resp.}\ \mathbf{H}^{n+i}(X, \tilde{\Omega}^\cdot) = 0].$$

On sait qu'il existe une suite spectrale, dont le terme E_2 est donné par

$$E_2^{k,l} = H^k(H^l(X, \tilde{\Omega}^\cdot)),$$

et qui a pour aboutissement $\mathbf{H}^{k+l}(X, \tilde{\Omega}^\cdot)$.

Les faisceaux Ω^k étant des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents, il résulte de la définition que si X est cohomologiquement q-complet, $H^l(X, \Omega^k) = 0$ pour $l > q$, d'où

$$E_2^{k,l} = 0 \qquad \text{pour} \quad k + l > n + q$$

et

$$\mathbf{H}^r(X, \tilde{\Omega}^\cdot) = 0 \qquad \text{pour} \quad r > n + q.$$

De même, si X est cohomologiquement q-convexe, $\dim_{\mathbf{C}} E_2^{k,l} < \infty$ pour $k+l > n+q$; on a alors le même résultat pour $E_\infty^{k,l}$, d'où il s'ensuit que

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{H}^r(X, \tilde{\Omega}^\cdot) < \infty \qquad \text{pour} \quad r > n+q.$$

Remarque III.3. — *Un espace analytique compact de dimension complexe n ne peut être cohomologiquement q-complet pour $q < n$.*

En effet, soit S l'ensemble singulier de X. Si X est cohomologiquement q-complet, il en est de même de S; si $q < n$, il résulte alors, de la proposition III.2 et du fait que $\dim_{\mathbf{C}} S \leq n-1$, que l'on a

$$H_{2n}(X, \mathbf{C}) = 0 \qquad \text{et} \qquad H_{2n-1}(S, \mathbf{C}) = 0.$$

Mais si X est compact, il en est de même de S, et on a la suite exacte d'homologie

$$H_{2n}(X, \mathbf{C}) \to H_{2n}^{\Phi}(X - S, \mathbf{C}) \to H_{2n-1}(S, \mathbf{C}),$$

où $H_{2n}^{\Phi}(X - S, \mathbf{C})$ désigne le groupe d'homologie de Borel-Moore de dimension $2n$, à support dans la famille Φ de tous les fermés de $X - S$. On obtient donc

$$H_{2n}^{\Phi}(X - S, \mathbf{C}) = 0,$$

ce qui est absurde, puisque $X - S$ étant une variété orientable ce groupe devrait contenir la classe fondamentale $[X - S]$.

La suite spectrale, utilisée dans la démonstration de la proposition III.2, permet encore d'obtenir le résultat suivant :

Proposition III.4. — *Soit X un espace analytique de dimension complexe n, d'ensemble singulier S. Il existe un homomorphisme canonique*

$$\theta^{n,q} : \quad H^q(X, \Omega^n) \to H^{n+q}(X, \mathbf{C}),$$

tel que la suite

$$H^q(X, \Omega^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H^q(X, \Omega^n) \xrightarrow{\theta^{n,q}} H^{n+q}(X, \mathbf{C}),$$

où ∂ est induit par la différentielle extérieure, soit une 0*-suite, et possédant les propriétés suivantes :*

(*a*) *si X est cohomologiquement q-complet* (*resp. q-convexe*), *alors $\theta^{n,q}$ est surjectif* (resp. $\dim_{\mathbf{C}} \operatorname{coker} \theta^{n,q} < \infty$);

(*b*) *si. de plus,* $2 \dim_{\mathbf{C}} S + 1 < q$, *le complexe*

$$H^q(X, \Omega^{n-1}) \to H^q(X, \Omega^n) \to H^{n+q}(X, \mathbf{C}) \to 0$$

est exact (*resp. a ses groupes de cohomologie de dimension finie*).

Démonstration. — On a, dans la suite spectrale de la proposition III.2,

$$E_2^{n,q} = \operatorname{coker}(H^q(X, \Omega^{n-1}) \to H^q(X, \Omega^n));$$

de plus, il existe un homomorphisme canonique

$$\rho^{n,q}: \quad E_2^{n,q} \to \mathbf{H}^{n+q}(X, \tilde{\Omega}^\cdot).$$

L'homomorphisme $\theta^{n,q}$ s'obtient en composant

$$H^q(X, \Omega^n) \to E_2^{n,q} \to \mathbf{H}^{n+q}(X, \tilde{\Omega}^\cdot) \xrightarrow{\eta} \mathbf{H}^{n+q}(X, \mathbf{C}),$$

où η désigne l'inverse à gauche de $\bar{\varepsilon}$. En vertu de la proposition III.1, il suffit de démontrer que — $\rho^{n,q}$ est un isomorphisme dans le cas où X est cohomologiquement q-complet. Mais ceci résulte du fait que dans la suite spectrale précédente :

$$E_\infty^{n,q} \simeq E_2^{n,q} \qquad \text{et} \qquad E_2^{k,n+q-k} = 0 \qquad \text{pour} \quad k \neq n;$$

— $\rho^{n,q}$ est un homomorphisme de noyau et conoyau de dimension finie dans le cas où X est cohomologiquement q-convexe. Ceci résulte du fait que l'on a alors dans la suite spectrale

$$\dim_{\mathbf{C}} E_2^{k,n+q-k} < \infty \qquad \text{pour} \quad k \neq n,$$
$$\dim_{\mathbf{C}} \operatorname{Ker}(E_2^{n,q} \to E_\infty^{n,q}) < \infty,$$

la dernière propriété étant une conséquence du fait que

$$\dim_{\mathbf{C}} E_2^{k,l} < \infty \qquad \text{pour} \quad k + l = n - 1, \quad l > q.$$

REMARQUE III.5. — L'homomorphisme $\theta^{n,q}$ peut encore s'obtenir de la manière suivante : soit $Z^n = \operatorname{Ker}(\mathcal{S}^n \to \mathcal{S}^{n+1})$. I^n induit un homomorphisme de faisceaux : $\Omega^n \to Z^n$. D'autre part, $\mathcal{S}^\cdot$ étant une résolution de $\mathbf{C}$, on a un homomorphisme canonique

$$H^q(X, Z^n) \to H^{n+q}(X, \mathbf{C}).$$

$\theta^{n,q}$ est alors l'homomorphisme composé

$$H^q(X, \Omega^n) \to H^q(X, Z^n) \to H^{n+q}(X, \mathbf{C}).$$

Ceci résulte de la définition de $\theta^{n,q}$, de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^q(X, \Omega^n) \arrow[r] \arrow[d, "\rho'"] & H^q(X, Z^n) \arrow[d, "\sigma'"] \\
\mathbf{H}^{n+q}(X, \tilde{\Omega}^\cdot) \arrow[r, "\bar{I}^\cdot"] \arrow[dr] & \mathbf{H}^{n+q}(X, \mathcal{S}^\cdot) \arrow[d, "\bar{\nu}^{-1}"] \\
 & H^{n+q}(X, \mathbf{C})
\end{tikzcd}$$

et du fait que $\bar{\nu}^{-1} \circ \sigma'$ s'identifie à l'homomorphisme canonique

$$H^q(X, Z^n) \to H^{n+q}(X, \mathbf{C})$$

(propriété bien connue utilisant le fait que $\mathcal{S}^\cdot$ est résolution de $\mathbf{C}$).

Dans le cas particulier où $q > 2 \dim S + 1$, $\theta^{n,q}$ peut encore s'obtenir en regardant les suites exactes de cohomologie associées aux courtes suites exactes :

$$0 \to \mathcal{C}^i \to \Omega^i \to \mathcal{B}^{i+1} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{B}^i \to \mathcal{C}^i \to \mathcal{H}^i \to 0,$$

où $\mathcal{C}^i = \mathrm{Ker}(\Omega^i \to \Omega^{i+1})$ et $\mathcal{B}^i = \mathrm{Im}(\Omega^{i-1} \to \Omega^i)$.

REMARQUE III.6. — Si $S = \emptyset$, X est alors une variété de dimension complexe n. Soient $\mathcal{E}^r(X)$ l'espace des formes différentielles C^∞ de degré r, et $\Omega^{k,l}(X)$ l'espace des formes différentielles de type (k, l). $\theta^{n,q}$ est alors isomorphe (modulo de Rham) à l'homomorphisme :

$$H^q(\Omega^{n,\cdot}(X)) \to H^{n+q}(\mathcal{E}^\cdot(X))$$

induit par l'inclusion $\Omega^{n,\cdot}(X) \to \mathcal{E}^{n+\cdot}(X)$.

La proposition III.4 contient donc le résultat de G. SORANI [9] selon lequel toute forme différentielle d-fermée de degré $n+q$ est cohomologue à une forme différentielle d''-fermée de type (n, q), pourvu que la variété X soit q-complète.

Après rédaction de cet article nous apprenons que A. FERRARI a annoncé, dans [3], qu'il avait obtenu notre proposition III.2, en utilisant aussi les résultats de T. BLOOM et M. HERRERA, et les suites spectrales.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H.). — Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 193-259.

[2] BLOOM (T.) and HERRERA (M.). — De Rham cohomology of an analytic space, *Invent. Math.*, Berlin, t. 7, 1969, p. 275-296.

[3] FERRARI (A.). — Cohomology and holomorphic differential forms on complex analytic spaces, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, t. 24, 1970, p. 65-77.

[4] GREENBERG (M.). — *Lectures on algebraic topology*. — New York, Amsterdam W. A. Benjamin, 1967 (*Mathematics Lecture Notes*).

[5] NARASIMHAN (R.). — On the homology groups of Stein spaces, *Invent. Math.*, Berlin, t. 2, 1967, p. 377-385.

[6] NARASIMHAN (R.). — The Levi problem for complex spaces, *Math. Annalen*, t. 142, 1961, p. 355-365; t. 146, 1962, p. 195-216.

[7] REIFFEN (H. J.). — Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompakten Träger, *Math. Annalen.* t. 164, 1966, p. 272-279.

[8] SORANI (G.). — Omologia degli spazi q-pseudoconvessi, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* t. 16, 1962, p. 299-304.

[9] SORANI (G.). — Homologie des q-paires de Runge, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* t. 17, 1963, p. 319-332.

[10] VILLANI (V.). — Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso, *Rend. Sem. mat. Univ. Padova,* t. 35, 1964, p. 47-55.

(Texte reçu le 25 juin 1970.)

Joseph LE POTIER,
Faculté des Sciences,
40, avenue du Recteur Pineau,
86-Poitiers.