GÉRARD RAUZY

Caractérisation des ensembles normaux

Bulletin de la S. M. F., tome 98 (1970), p. 401-414
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1970__98__401_0>

Bull. Soc. math. France,
98, 1970, p. 401 à 414.

CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES NORMAUX

PAR

GÉRARD RAUZY
(Marseille)

Introduction. — Rappelons que l'ensemble $B \subset \mathbf{R}$ est dit *normal pour la suite* $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *de* nombres réels si *la suite* $(\lambda u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est équirépartie* modulo 1 *si, et seulement si,* λ *appartient à* B, c'est-à-dire (critère de Weyl) si

$$\lambda \in B \quad \text{équivaut à } \forall\, q \in \mathbf{Z}^\star, \qquad \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e(\lambda q u_n) \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty$$

[en posant $e(x) = e^{2i\pi x}$].

Un ensemble est dit *normal* s'il existe une suite telle que l'ensemble est normal pour cette suite.

Introduisons alors une définition : Nous dirons qu'un ensemble E est *élémentaire* s'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\lambda \in E \quad \text{équivaut à } f_n(\lambda) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Le but de cette étude est de montrer la caractérisation suivante :

Un ensemble B est normal si, et seulement si,

(i) $0 \notin B$ *et* $\forall\, q \in \mathbf{Z}^\star$, $qB \subset B$;

(ii) *B est élémentaire.*

En modifiant légèrement la démonstration, on obtient également le résultat suivant :

Un ensemble B est normal pour une suite à termes dans $\mathbf{Z}$ *si, et seulement si, il possède les propriétés* (i), (ii), *du théorème précédent et si de plus on a :*

(iii) $\forall\, g \in \mathbf{Z}$, $g + B \subset B$.

De la caractérisation donnée résulte que la classe des ensembles normaux est très large : en effet, de manière presque évidente, *un fermé, ou* *un ouvert, sont des ensembles élémentaires* [pour un fermé F, on prend $f_n(x) =$ distance de x à F; pour un ouvert Ω, on prend

$$f_n(x) = 1 - \min\left(1, nd\left(x, \complement\Omega\right)\right)$$

où $d(x, K)$ est la distance de x à K].

D'autre part, il résulte de la deuxième partie de cette étude que la classe des ensembles élémentaires est stable par intersection dénombrable. Ceci montre que *la classe des ensembles normaux est stable par intersection dénombrable, et contient les intersections dénombrables d'ouverts satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii), *donc, en particulier, les ensembles discrets satisfaisant à ces conditions.* On retrouve ainsi les résultats de Dress, Mendès-France et Meyer ([1], [3], [4]).

Dans la troisième partie de cette étude, nous montrerons que toute union dénombrable de fermés disjoints est élémentaire : en particulier, *tout ensemble dénombrable satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii) *est normal* (par exemple $\mathbf{Q}^*$, [5]).

Enfin, la classe des ensembles élémentaires ne peut être stable par union dénombrable, sinon elle contiendrait tous les boréliens; or, de la définition résulte immédiatement qu'un ensemble élémentaire est intersection dénombrable d'union dénombrable de fermés : on sait qu'il existe des boréliens qui ne sont pas de cette forme. Une légère modification de cette démonstration montre qu'*il existe une famille dénombrable d'ensembles normaux dont la réunion n'est pas un ensemble normal.* Le problème reste ouvert pour les unions finies.

Pour en simplifier la compréhension, nous avons divisé cette étude en trois parties. Dans la première partie, nous démontrons :

Théorème 1. — *Un ensemble B est normal si, et seulement si, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, continues, définies positives et telles que $f_n(0) = 1$, pour lesquelles*

$$\lambda \in B \iff \forall q \in \mathbf{Z}^*, \quad f_n(q\lambda) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Dans la deuxième partie, nous montrons le théorème principal :

Théorème principal. — *Si B est un ensemble tel que $0 \notin B$, $B = -B$ (B symétrique par rapport à l'origine), les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues définies positives et telles que $f_n(0) = 1$, pour lesquelles*

$$\lambda \in B \iff f_n(\lambda) \to 0 \quad \textit{quand } n \to \infty;$$

(ii) *B est élémentaire.*

Compte tenu de la stabilité par intersection dénombrable et du fait que $R - \{0\}$ est élémentaire, si E est un ensemble élémentaire, l'ensemble B des $x \neq 0$ tels que $\forall\, q \in \mathbf{Z}^*$, $qx \in E$, est aussi un ensemble élémentaire. La caractérisation annoncée résulte donc des deux théorèmes précédents.

Enfin la troisième partie donne une condition suffisante pour qu'une union dénombrable de fermés soit élémentaire.

Première partie.

1. Rappel sur les fonctions définies positives.

1.1. — Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue est dite *définie positive* si, pour tout ensemble A fini de nombres réels, et toute application c de A dans $\mathbf{C}$, on a l'inégalité

$$\sum_{(x,y)\in A\times A} f(x-y)\, c(x)\, \overline{c(y)} \geq 0.$$

1.2. — De cette définition résulte immédiatement que toute combinaison linéaire positive de fonctions définies positives est définie positive : en particulier, la fonction $x \to e(ux)$ étant évidemment définie positive, il en est de même des sommes de Weyl :

$$\lambda \to \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e(\lambda q u_k) \qquad (q \in \mathbf{Z}^*)$$

relatives à une suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$, ce qui établit la partie directe du théorème 1.

1.3. — D'après le théorème de Bochner ([2], p. 97), une fonction continue est définie positive si, et seulement si, elle est la transformée de Fourier d'une mesure positive de masse totale bornée.

De ce théorème résultent immédiatement ou presque les lemmes suivants :

Lemme 1.3.1. — *Si f et g sont deux fonctions continues définies positives, il en est de même de fg. En particulier, $|f|^2 = f\bar{f}$ est définie continue positive.*

Lemme 1.3.2. — *Si f est une fonction continue définie positive, si K est un compact de $\mathbf{R}$, ε un réel > 0, il existe un entier $n \geq 1$ et une suite finie $(u_1, \ldots, u_n)$ telle que*

$$\sup_{x\in K}\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\, e(xu_k)\right| < \varepsilon \qquad (c_k \text{ réels} \geq 0).$$

En d'autres termes, toute fonction continue définie positive est limite au sens de la convergence uniforme sur tout compact d'une suite de combinaisons linéaires à coefficients positifs d'exponentielles complexes.

1.4. — Nous aurons en fait besoin d'un résultat plus précis qui constitue le lemme suivant :

LEMME 1.4.1. — *Soit f une fonction continue définie positive vérifiant $f(0)=1$, soient K un compact de $\mathbf{R}$ et ε un réel > 0. Alors, il existe un entier $N \geq 1$ et une suite finie $v_0, \ldots, v_{N-1}$ telle que*

$$\sup_{x \in K} \left| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e(xv_k) \right| < \varepsilon.$$

Démonstration. — D'après le lemme 1.3.2, il existe une suite $(u_1, \ldots, u_n)$ et des $c_k \geq 0$ tels que

$$\sup_{x \in K} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\, e(xu_k) \right| < \varepsilon.$$

On peut (quitte à l'agrandir) supposer que $0 \in K$, d'où

$$\left| 1 - \sum_{k=1}^{n} c_k \right| < \varepsilon.$$

Remplaçant c_k par $d_k = c_k/(1+\varepsilon)$, il vient

$$\sup_{x \in K} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} d_k\, e(xu_k) \right| < \varepsilon(2+\varepsilon),$$

$$d_k \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} < \sum_{k=1}^{n} d_k < 1.$$

Mais alors, si N est un entier $> n/\varepsilon$, et si M_k est l'entier immédiatement inférieur ou égal (la partie entière de ...) à Nd_k, on a

$$0 \leq \frac{M_k}{N} \leq d_k < \frac{M_k}{N} + \frac{1}{N},$$

d'où

$$\sup_{n \in K} \left| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} M_k\, e(xu_k) \right| < \varepsilon(3+\varepsilon),$$

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} - \varepsilon < \frac{1}{N} \sum_{k-1}^{n} M_k < 1, \qquad M_k \geq 0.$$

Soit alors

$$M_0 = N - \sum_{k=1}^{n} M_k, \qquad M_0 \geq 0, \qquad \sum_{k=0}^{n} M_k = N$$

et, si $u_0 = 0$,

$$\sup_{x \in K} \left| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{n} M_k\, e(xu_k) \right| < \varepsilon \frac{(2+\varepsilon)(3+\varepsilon)}{1+\varepsilon}.$$

Pour suite (v_k), nous prendrons alors

$$v_k = u_n \quad \text{si} \quad \sum_{h=-1}^{n-1} M_h \leq k < \sum_{h=-1}^{n} M_h \qquad \text{(en prenant } M_{-1} = 0\text{)}.$$

On a alors

$$\sup_{x \in K} \left| f(x) - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e(xv_k) \right| < \varepsilon \frac{(2+\varepsilon)(3+\varepsilon)}{1+\varepsilon},$$

ce qui achève la démonstration puisque $\varepsilon \dfrac{(2+\varepsilon)(3+\varepsilon)}{1+\varepsilon} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

1.5. Notations. — Nous appellerons $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions continues, définies positives, $\mathcal{L}_0$ l'ensemble des fonctions continues définies positives, telles que $f(0) = 1$, et $\mathcal{L}_0^+$ l'ensemble des $f \in \mathcal{L}_0$ telles que, $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0$. Remarquons que si $f \in \mathcal{L}_0$, on a $\overline{f(x)} = f(-x)$ et $|f(x)| \leq 1$, en particulier si $f \in \mathcal{L}_0^+$, f est paire et, $\forall x \in \mathbf{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, nous noterons $Z((f_n))_{n \in \mathbf{N}}$ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que $f_n(x) \to 0$ quand $n \to \infty$.

2. Composée d'une suite de suites finies.

2.1. — Soit ν une application de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}^*$, et pour chaque $n \in \mathbf{N}$, soit $(v_{n,0}, \ldots, v_{n,\nu(n)-1})$ une suite finie de réels à $\nu(n)$ éléments. Nous allons définir, de manière analogue au mixage de Dress [1], une suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ possédant la propriété suivante :

Propriété 2.1.1. — *Pour toute fonction bornée f de* $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\nu(n)} \sum_{k=1}^{\nu(n)-1} f(v_{n,k}) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(w_k)$$

et

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{\nu(n)} \sum_{k=1}^{\nu(n)-1} f(v_{n,k}) = \underline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(w_k).$$

Une telle suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$, nous l'appellerons *composée* des suites $(v_{n,1}, \ldots, v_{n,\nu(n)})_{n\in\mathbf{N}}$.

De la propriété précédente résulte immédiatement le lemme suivant :

LEMME 2.1.2. — *Si $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est composée des suites $(v_{n,1}, \ldots, v_{n,\nu(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ et si f est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, la suite de terme général*

$$\frac{1}{\nu(n)}\sum_{k=0}^{\nu(n)-1} f(v_{n,k}), \qquad n\in\mathbf{N}$$

converge vers zéro si, et seulement si, il en est de même pour la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(w_k).$$

(On remarque en effet que si $f = g + ih$, g et h étant à valeurs réelles, la suite correspondante à f converge vers zéro si, et seulement si, il en est de même pour les suites relatives à g et h.)

2.2. **Définition de la composée.** — Soit $g(n)$ une suite d'entiers telle que

$$\forall\, n\in\mathbf{N}, \quad g(n)\,\nu(n) \geqq \max\left((n+1)\,\nu(n+1),\ (n+1)\sum_{k=0}^{n-1} g(k)\,\nu(k)\right).$$

Posons $G(0) = 0$ et, pour $n \geqq 1$,

$$G(n) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)\,\nu(k).$$

Pour $G(n) \leqq N < G(n+1)$, nous définissons w_N en posant $w_N = v_{n,r}$, où r désigne le reste de la division de $N - G(n)$ par $\nu(n)$.

En d'autres termes, la suite w_N se présente en blocs répétés,

$$\underbrace{B_0, B_0, \ldots, B_0}_{g(0)},\quad \underbrace{B_1, \ldots, B_1}_{g(1)},\quad \ldots,\quad \underbrace{B_n, \ldots, B_n}_{g(n)},\quad \ldots,$$

où $B_n = (u_{n,0}, \ldots, u_{n,\nu(n)-1})$.

2.3. **Démonstration de la propriété** 2.1.1. — Nous posons

$$s(n) = \frac{1}{\nu(n)}\sum_{k=0}^{\nu(n)-1} f(v_{n,k}), \qquad t(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(w_k).$$

Nous supposons que, $\forall x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leq C$, ce qui entraîne, en particulier pour tout n entier, $|s(n)| \leq C$ et $|t(n)| \leq C$.

La démonstration résulte immédiatement des deux lemmes suivants.

LEMME 2.3.1. — *Si a est valeur d'adhérence pour la suite s, alors a est aussi valeur d'adhérence pour la suite t.*

LEMME 2.3.2. — *Réciproquement, si a est valeur d'adhérence pour la suite t, alors il existe deux valeurs d'adhérence b et c de la suite s telles que $a \in [b, c]$.*

Remarquons que la fonction f étant bornée, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite t est un intervalle (qui est donc, d'après les lemmes 2.3.1 et 2.3.2, l'enveloppe convexe de l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite s).

Démonstration du lemme 2.3.1. — Soit J un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}$ tel que

$$\lim_{n \in J} s(n) = a.$$

Si $n \in J$,

$$G(n+1)\, t(G(n+1)) = G(n)\, t(G(n)) + g(n) \sum_{k=0}^{\nu(n)-1} v_{n,k},$$

d'où

$$t(G(n+1)) = \frac{G(n)\, t(G(n))}{G(n+1)} + \frac{g(n)\,\nu(n)}{G(n+1)} s(n).$$

Les conditions requises sur g impliquent que, lorsque $n \to \infty$,

$$\frac{G(n)}{G(n+1)} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{g(n)\,\nu(n)}{G(n+1)} \to 1.$$

Si n tend vers l'infini en restant dans J, $s(n) \to a$, donc $t(G(n+1)) \to a$.

Démonstration du lemme 2.3.2. — C'est la « *substantifique moelle* » de l'article (le théorème de Bochner n'étant là que pour faire joli).

Soit J un sous-ensemble infini de $\mathbf{N}$ tel que $\lim\limits_{n \in J} t(n) = a$. Soit $N \in J$, il existe n unique tel que $G(n) \leq N < G(n+1)$, et n tend vers l'infini quand N tend vers l'infini.

Posons

$$N - G(n) = q\,\nu(n) + r, \qquad \text{avec} \quad 0 \leq r < \nu(n)$$

et

$$M = G(n) + q\,\nu(n), \qquad \text{d'où} \qquad 0 \leq N - M < \nu(n).$$

Alors

$$N\, t(N) = M\, t(M) + \sum_{k=M}^{N-1} f(w_k),$$

soit

$$|t(N)-t(M)| < C\frac{\nu(n)}{N} + \left(1-\frac{M}{N}\right)t(M) \leq \frac{2C\nu(n)}{N}.$$

Quand N tend vers l'infini dans J, $\frac{\nu(n)}{N}$ qui est majoré par $\frac{\nu(n)}{G(n)}$ et *a fortiori* par $\frac{\nu(n)}{\nu(n-1)\,g(n-1)}$ tend vers zéro en vertu de la définition de g et par conséquent $t(M)$ tend vers a.

D'autre part,

$$M\,t(M) = G(n)\,t(G(n)) + q\nu(n)\,s(n),$$

soit encore

$$t(M) = \frac{G(n)\,t(G(n)) + q\nu(n)\,s(n)}{G(n)+q\nu(n)}.$$

La fonction de $[\,0, +\infty\,[$ dans R qui à x associe

$$\frac{G(n)\,t(G(n)) + x\nu(n)\,s(n)}{G(n)+x\nu(n)}$$

est une fonction homographique (!) n'ayant pas de pôle dans cet intervalle, donc monotone (!!). Il en résulte que $t(M)$ est compris entre $s(n)$ et $t(G(n))$.

Or, d'après la démonstration du lemme précédent, $t(G(n)) - s(n-1)$ est une suite nulle, donc $t(G(n))$ et $s(n-1)$ ont mêmes valeurs d'adhérence. Si b et c sont respectivement les bornes inférieures et supérieures des valeurs d'adhérences des deux suites $s(n)$ et $s(n-1)$ quand N parcourt J, on a bien $a \in [\,b, c\,]$.

3. Démonstration du théorème 1.

On a montré le théorème dans le sens « seulement si » dans le paragraphe 1.2. Montrons-le dans l'autre sens.

Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}_0$, et soit $B = Z((f_n)_{n\in\mathbf{N}})$.

D'après le lemme 1.4.1, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe un entier $\nu(n) \geq 1$ et une suite finie $(v_{n,0}, \ldots, v_{n,\nu(n)-1})$ telle que

$$\sup_{x\in[-n,n]}\left|f_n(x) - \frac{1}{\nu(n)}\sum_{k=0}^{\nu(n)-1} e(xv_{n,k})\right| < \frac{1}{n+1}$$

$\left(\text{on a pris } f = f_n,\ K = [-n, n],\ \varepsilon = \frac{1}{n+1}\right)$.

Posons

$$g_n(x) = \frac{1}{\nu(n)}\sum_{k=0}^{\nu(n)-1} e(xv_{n,k}),$$

alors manifestement

$$Z((g_n)_{n\in\mathbf{N}}) = B.$$

Soit alors $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite composée, au sens du paragraphe 2, des suites $(v_{n,0}, \ldots, v_{n,\nu(n)-1})$, et posons pour tout $n \geqq 1$.

$$h_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e(xw_k).$$

D'après le lemme 2.1.2 appliqué à la fonction f telle que $f(u) = e(xu)$, pour tout x réel, $g_n(x)$ et $h_n(x)$ convergent ou ne convergent pas simultanément vers zéro quand $n \to \infty$, on a donc

$$Z((g_n)_{n\in\mathbf{N}}) = Z((h_n)_{n\in\mathbf{N}}).$$

Mais d'après le théorème de Weyl, la suite $(xw_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, $\forall\, q \in \mathbf{Z}^*$, $h_n(qx) \to 0$ quand $n \to \infty$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\forall\, q \in \mathbf{Z}^*$, qx appartient à B, ce qui achève la démonstration.

Remarquons qu'on aurait pu démontrer de la même manière le théorème plus général suivant :

THÉORÈME 1'. — *Si V est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ est normal pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes dans V, si, et seulement si, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $f_n \in \mathcal{P}_0^+$, f_n à spectre dans V, telle que $x \in E \Leftrightarrow \forall\, q \in \mathbf{Z}^*$, $f_n(qx) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

En particulier, si $V = \mathbf{Z}$, il suffit de remplacer « continue définie positive » par « somme d'une série de Fourier $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k e(kx)$ avec $c_k \geqq 0$ et $\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k = 1$ ».

En effet, la seule chose éventuellement à modifier est dans la démonstration du lemme 1.4.1, où on a introduit un M_0, ce qui obligeait à utiliser des zéros dans la suite $v_{n,k}$, donc dans la suite w_n.

Si $0 \notin V$, on pouvait en fait prendre $\sum_{k=1}^{n} d_k = 1$ en posant $d_k = c_k / \sum_{k=1}^{n} c_k$ et, d'après un théorème d'approximation diophantienne simultanée, il existe $N \geqq 1$ et M_k ($k = 1, \ldots, n$) tels que $|N d_k - M_k| < 1/(2n)$, d'où

$$\left| N\sum_{k=1}^{n} d_k - \sum_{k=1}^{n} M_k \right| < 1/2$$

soit

$$\left| N - \sum_{k=1}^{n} M_k \right| < 1/2, \qquad \text{d'où} \qquad \sum_{k=1}^{n} M_k = N.$$

C. Q. F. D.

Deuxième partie.

1. Intersections dénombrables.

LEMME. — *Soit K un ensemble convexe de fonctions à valeurs dans $[0, 1]$. Soit $(f_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de K. Posons*

$$B_n = Z((f_{n,k})_{k\in\mathbf{N}}) \qquad \text{et} \qquad B = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_n.$$

Alors, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions de K telles que

$$Z((f_n)_{n\in\mathbf{N}}) = B.$$

Il suffit de prendre

$$f_k = \left(\sum_{j=0}^{n} 2^{-j} f_{j,k}\right) \bigg/ \left(\sum_{j=0}^{n} 2^{-j}\right),$$

la vérification est triviale, tenant compte du fait que $f_{j,k}(x) \geqq 0$ pour tous x, j et k.

COROLLAIRE. — En remarquant que

$$Z((f_n)_{n\in\mathbf{N}}) = Z((|f_n|^2)_{n\in\mathbf{N}})$$

et que

$$Z((f_n)) = Z((\max(1, f_n)))$$

et prenant pour K respectivement l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $[0, 1]$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_0^+$, l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}_\bullet^+$ à spectre dans $\mathbf{Z}$, il en résulte la *stabilité par intersection dénombrables des ensembles de la forme $Z((f_n)_{n\in\mathbf{N}})$, où $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est respectivement une suite de fonctions continues, une suite d'éléments de $\mathcal{L}_0^+$, une suite d'éléments de $\mathcal{L}_\bullet^+$, à spectre dans $\mathbf{Z}$.*

2. Où il y a suffisamment de fonctions définies positives.

2.1. LEMME. — *Soient ε et λ deux nombres réels, avec $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction $F_{\varepsilon,\lambda}$ de $\mathcal{L}_\bullet^+$ telle que :*

(i) $\forall x \in \mathbf{R}$, *si* $\min\{|x-\lambda|, |x|, |x+\lambda|\} \geqq 2\varepsilon$, $F_{\varepsilon,\lambda}(x) = 0$,

(ii) *si* $\min\{|x-\lambda|, |x|, |x+\lambda|\} \leqq \varepsilon$, $F_{\varepsilon,\lambda}(x) \geqq 1/8$.

En effet, si φ_ε désigne la fonction telle que

$$\varphi_\varepsilon(x) = 1 - \frac{|x|}{2\varepsilon} \quad \text{pour } |x| \leqq 2\varepsilon, \qquad \varphi_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{pour } |x| > 2\varepsilon,$$

$\varphi_\varepsilon \in \mathcal{P}_0^+$, et on a, en fait,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \varepsilon\pi u}{\varepsilon\pi^2 u^2} e(ux)\, dx.$$

Si

$$\begin{aligned} G_{\varepsilon,\lambda}(x) &= \varphi_\varepsilon(x) + 1/2 \{ \varphi_\varepsilon(x-\lambda) + \varphi_\varepsilon(x+\lambda) \} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \cos\lambda u) \frac{\sin^2 \varepsilon\pi u}{\varepsilon\pi^2 u^2} e(ux)\, dx, \end{aligned}$$

comme pour tout $u \in \mathbf{R}$, $1 + \cos\lambda u \geqq 0$, $G_{\varepsilon,\lambda}$ est continue définie positive.

En outre, $1 \leqq G_{\varepsilon,\lambda}(0) \leqq 2$, en posant $F_{\varepsilon,\lambda} = G_{\varepsilon,\lambda} / G_{\varepsilon,\lambda}(0)$, $F_{\varepsilon,\lambda}$ vérifie bien les conditions du lemme.

Remarquons que, si $|\lambda| + 6\varepsilon \leqq 1/2$, la fonction périodique de période 1, $\tilde{F}_{\varepsilon,\lambda}$ égale à $F_{\varepsilon,\lambda}$ sur $[-1/2, 1/2]$ appartient à $\mathcal{P}_\bullet^+$, est à spectre dans $\mathbf{Z}$, et vérifie des conditions analogues à celles du lemme sur un intervalle de période.

2.2. Lemme. — *Si F et K sont respectivement des ensembles disjoints fermé et compact de $\mathbf{R}$ symétriques par rapport à l'origine et tels que $0 \notin F$, il existe une suite finie $(f_1, \ldots, f_n)$ d'éléments de $\mathcal{P}_0^+$ telle que :*

(i) $\forall x \in F, \quad \forall k = 1, \ldots, N, \qquad f_k(x) = 0,$

(ii) $\forall x \in K, \quad \exists k \in \{1, \ldots, N\}, \qquad f_k(x) \geqq 1/8.$

Il suffit en effet de prendre un réel ε tel que

$$0 < 2\varepsilon < \inf_{x \in F} |x| \qquad \text{et} \qquad 0 < 2\varepsilon < \inf_{(x,y) \in F \times K} |x - y|,$$

et de prendre un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert de K $(\,]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[\,)_{\lambda \in K}$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ sont les centres des intervalles correspondants, on prend alors $f_n = F_{\varepsilon,\lambda_n}$, et la propriété résulte du lemme précédent.

Bien entendu, on montrerait de la même manière un lemme analogue pour les fonctions définies positives à spectre dans $\mathbf{Z}$.

3. Démonstration du théorème principal.

3.1. — Le théorème étant évident dans le sens « seulement si », démontrons-le dans l'autre sens. Soit donc $B = Z((g_n)_{n \in \mathbf{N}})$ où (g_n) est une suite de fonctions continues, et supposons que $0 \notin B$ et que B est symétrique par rapport à l'origine.

Quitte à remplacer g_n par h_n où $h_n(x) = g_n(|x|)$ [donc tel que $Z((h_n)) = Z((g_n))$], nous pouvons supposer g_n paire.

En outre, comme $0 \notin B$, $g_n(0)$ ne tend pas vers zéro : il existe donc $R > 0$ tel que, pour une infinité de $n \in \mathbf{N}$, on ait $|g_n(0)| \geqq R$.

3.2. — Lemme. — *Si* $0 < 2r \leqq R$, *il existe une suite* $(f_n^{(r)})_{n\in\mathbf{N}}$ *d'éléments de* $\mathfrak{T}_0^+$, *telle que si* $B_r = Z((f_n^{(r)})_{n\in\mathbf{N}})$, *on ait ;*

(i) *si pour tout* n *assez grand,* $|g_n(x)| \leqq r$, *alors* $x \in B_r$,

(ii) *si pour une infinité de* n $|g_n(x)| \geqq 2r$, *alors* $x \notin B_r$.

Définissons en effet, la suite de fermés (F_n) et la suite de compacts (K_n) par :

— F_n est l'ensemble des x tel que $|g_n(x)| \leqq r$ et $|x| \geqq \frac{1}{n+1}$,

— K_n est l'ensemble des $x \in [-n, n]$ tels que $|g_n(x)| \geqq 2r$.

En vertu des hypothèses sur (g_n) et r, F_n et K_n sont disjoints, symétriques par rapport à l'origine et $0 \notin F_n$.

D'après le lemme 2.2, il existe une suite finie $(f_{n,1}, \ldots, f_{n,N(n)})$ d'éléments de $\mathfrak{T}_0^+$ telle que

$$\forall x \in F_n, \quad \forall k \in \{1, \ldots, N(n)\}, \qquad f_{n,k}(x) = 0;$$
$$\forall x \in K_n, \quad \exists k \in \{1, \ldots, N(n)\}, \qquad f_{n,k}(x) \geqq 1/8.$$

Si on prend alors pour suite $f_n^{(r)}$ la suite composée de blocs :

$$f_{1,1}, \ldots, f_{1,N(1)}, \quad f_{2,1}, \ldots, f_{2,N(2)}, \quad \ldots, \quad f_{n,1}, \ldots, f_{n,N(n)}, \quad \ldots,$$

cette suite vérifie bien les conditions du lemme (compte tenu du fait que $\forall x \in \mathbf{R}$ dès que n est assez grand $x \in [-n, n]$).

3.3. En prenant alors $r(n) = 2R/(n+1)$, il est immédiat que $B = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} B_{r(n)}$ et le théorème 2 en découle en vertu du corollaire du lemme du paragraphe 1, deuxième partie.

De la même manière, on montrerait le théorème suivant.

Théorème. — *Si* B *est tel que* $0 \notin B$, $B = -B$, *et* $\mathbf{Z} + B \subset B$, *alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $B = Z((f_n))$ *avec* $f_n \in \mathfrak{T}_0^+$ *à spectre dans* $\mathbf{Z}$;

(ii) $B = Z((g_n))$ *avec* g_n *continue.*

Troisième partie.

Nous démontrons un résultat un peu plus général que l'union des fermés disjoints :

Théorème. — *Si* $(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *est une suite de fermés et si*

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \textit{tel que} \quad \forall n \geqq N, \quad F_n \cap F_m = \emptyset,$$

alors $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ *est élémentaire.*

En effet, posons $B=\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$, $G_n=[-n, n]\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)$, G_n est compact.

Définissons une fonction $\nu(n)$ en posant $\nu(n)=0$ si l'ensemble des k tels que $G_k\cap F_n=\emptyset$ est vide, $\nu(n)$ est le plus grand des k dans cet ensemble quand il n'est pas vide. On a donc $0\leqq\nu(n)<n$.

Quand $n\to\infty$, $\nu(n)\to\infty$ d'après la condition imposée aux fermés (F_n), en particulier dès que n est assez grand $F_n\cap F_0=\emptyset$, et donc $F_n\cap G_{\nu(n)}=\emptyset$. Le compact $G_{\nu(n)}$ et le fermé F_n étant disjoints, leur distance est strictement positive, nous pouvons donc définir une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels telle que :

$\alpha_n>0$, $\alpha_n\to 0$ quand $n\to\infty$ et $2\alpha_n$ est inférieur à la distance de F_n à $G_{\nu(n)}$ dès que $n\geqq n_0$.

Nous posons alors

$$f_{2n}(x)=\frac{1}{\alpha_n}d(x, G_n), \qquad f_{2n+1}(x)=1-\frac{\min(2\alpha_n, d(x, F_n))}{2\alpha_n}.$$

Soit alors $x\in B$. Il existe n_1 tel que $x\in G_{n_1}$, donc si $n\geqq n_1$, $f_{2n}(x)=0$.

Par ailleurs, il existe n_2 tel que, si $n\geqq n_2$, $\nu(n)\geqq n_1$, donc $F_n\cap G_{n_1}=\emptyset$, et la distance de x à F_n est supérieure ou égale à celle de G_{n_1} à F_n, donc à celle de $G_{\nu(n)}$ à F_n, donc à $2\alpha_n$, par conséquent $f_{2n+1}(x)=0$.

Il en résulte que si $n\geqq\max(2n_1, 2n_2+1)$, $f_n(x)=0$, donc $B\subset Z((f_n))$.

Réciproquement, soit $x\notin B$. Alors quel que soit $n\in\mathbf{N}$, $x\notin G_n$. Distinguons deux cas :

1° Pour une infinité de n, $d(x, G_n)\geqq\alpha_n$. Alors, pour une infinité de n, $f_{2n}(x)\geqq 1$, et en particulier $f_n(x)$ ne tend pas vers zéro, donc $x\notin Z((f_n))$.

2° Dès que $n\geqq n_1$, $d(x, G_n)\leqq\alpha_n$. En particulier, $d(x, G_n)\to 0$, comme $d(x, G_n)$ n'est jamais nul (puisque $x\notin B$), pour une infinité de n, on a

$$d(x, G_n)<d(x, G_{n-1}),$$

on en déduit

$$d(x, F_n)=d(x, G_n)\leqq\alpha_n.$$

Donc il existe un sous-ensemble $J\subset\mathbf{N}$ infini tel que, si $n\in J$, $d(x, F_n)\leqq\alpha_n$. Mais alors, pour $n\in J$, $f_{2n+1}(x)\geqq 1/2$, $f_n(x)$ ne peut donc tendre vers zéro, et $x\notin Z((f_n))$.

On a donc bien prouvé que $B=Z((f_n))$, c'est-à-dire est élémentaire.

Terminons par un problème : En prenant $f_n(x)=\varphi(4^n x)$, où φ est une fonction périodique continue convenable, il est aisé de voir que l'ensemble A des x dont le développement dyadique $\sum_{k\geqq k_0}\varepsilon_k 2^{-k}$ est tel que

$\varepsilon_{2k} = 0$ à partir d'un certain rang, est un ensemble élémentaire. Il en est de même pour l'ensemble B des x dont le développement est tel que $\varepsilon_{3k} = 0$ à partir d'un certain rang, la question est la suivante :

$A \cup B$ est-il élémentaire ?

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Dress (François). — *Intersection des ensembles normaux* (à paraître).

[2] Loomis (Lynn H.). — *Abstract harmonic analysis.* — Toronto, New-York, London, D. Van Nostrand Company, 1953 (*University Series in higher Mathematics*).

[3] Mendès France (Michel). — Nombres transcendants et ensembles normaux, *Acta Arithmetica,* Warszawa, t. 15, 1969, p. 189-192.

[4] Meyer (Yves). — *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique,* Cours Peccot, Collège de France, 1969 (multigraphié).

[5] Rauzy (Gérard). — Normalité de $\mathbf{Q}^{\star}$, *Acta Arithmetica,* Warszawa (à paraître).

(Texte définitif reçu le 20 août 1970.)

Gérard Rauzy,
24, allée E.-Chabrier,
Le Roy d'Espagne,
13-Marseille 08.