BULLETIN DE LA S. M. F.

YANN QUENTEL

Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 265-272

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__265_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 265 à 272.

SUR LA COMPACITÉ DU SPECTRE MINIMAL D'UN ANNEAU

PAR

YANN QUENTEL.

[BREST.]

1. Sommaire.

HENRIKSEN ET JERISON ont formulé dans [5] (p. 116, ligne 10) une conjecture qui revient à affirmer que l'anneau total des fractions d'un anneau commutatif réduit, dont le spectre minimal est compact, est absolument plat. Le but essentiel de cette note est d'infirmer cette conjecture par un contre-exemple. Dans une première partie, nous étudions les anneaux réduits à spectre minimal compact, et nous en donnons quelques propriétés, dont un critère simple essentiel pour la construction de notre contre-exemple; certains de nos résultats ont été également trouvés par MEWBORN. Dans une seconde partie, nous étudions, avec quelques détails, les anneaux réduits tels que tout idéal fidèle de type fini contient un élément libre : on peut en effet facilement ramener la conjecture d'Henriksen et Jerison à démontrer que tout anneau réduit dont le spectre minimal est compact appartient à cette classe d'anneaux. Il apparaît d'ailleurs que cette condition apparemment assez technique sur l'existence d'un élément libre est suffisante pour que l'anneau construit par D. LAZARD dans [11] (p. 4-07) coïncide avec l'anneau total des fractions. Enfin, nous construisons le contre-exemple dont nous avons parlé.

Il reste encore beaucoup de problèmes ouverts dans cet ordre de questions, par exemple :

— Tout espace éparpillé est-il homéomorphe à un spectre minimal d'anneau ? (C'est vrai si l'espace est discret ou compact).

— L'anneau total des fractions d'un anneau réduit, à spectre minimal compact et de dimension faible finie, est-il absolument plat ?

— L'anneau total des fractions d'un anneau cohérent réduit est-il absolument plat?

L'auteur tient à remercier D. LAZARD d'avoir bien voulu lire son manuscrit et y corriger quelques erreurs.

TERMINOLOGIE ET NOTATION. — Tous les anneaux sont supposés commutatifs et unitaires; les anneaux absolument plats sont les anneaux réguliers, ou anneaux de von Neumann. Si A est un anneau, $Q_c l(A)$ désigne l'anneau total des fractions de A, et $Q(A)$ l'anneau d'Utumi-Lambek de A (pour sa définition, *voir* [6], p. 37-39); le morphisme $A \to M(A)$ désigne le « plus grand » mono-épimorphisme plat de source A [pour une définition précise de $M(A)$, *voir* [11], p. 4-07]. On dira qu'un A-module M est sans torsion si, pour tout $x \neq 0$ de M, $\operatorname{Ann} x$ ne contient que des diviseurs de 0; d'autre part, $\operatorname{Ass} M$ désigne l'ensemble noté $\operatorname{Ass}_f(M)$ dans BOURBAKI [2] (chap. 4, p. 165), et $I_A(M)$ désigne l'enveloppe injective de M. Enfin, $\operatorname{Min} A$ désigne l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A, muni de la topologie spectrale; si M est une partie de A, on notera $V(M)$ [resp. $D(M)$] l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A contenant (resp. ne contenant pas) M; on rappelle que, si M est finie, $V(M)$ et $D(M)$ sont ouverts et fermés dans $\operatorname{Min} A$.

2. Quelques propriétés des anneaux réduits à spectre minimal compact.

Nous allons d'abord démontrer une proposition qui « approche » la conjecture de Henriksen et Jerison, telle du moins que nous l'avons formulée.

PROPOSITION 1. — *Si A est un anneau réduit,* $\operatorname{Min} A$ *est compact si, et seulement si,* $M(A)$ *est absolument plat.*

Soient $\tilde{A}$ le schéma affine associé à A, et X le spectre minimal de A; les fibres de $\tilde{A} \mid X$ sont des corps; si X est compact, $\tilde{A} \mid X$ est le schéma affine associé à l'anneau absolument plat $B = \Gamma(\tilde{A}, X)$, puisque X est de toute façon totalement discontinu (*cf.* [10], p. 4); le morphisme $A \to B$ est donc un mono-épimorphisme plat (*cf.* [11], p. 4-04, prop. 2.5), et en fait il est facile de voir que B est A-isomorphe à $M(A)$, qui est donc absolument plat.

La réciproque résultera immédiatement du lemme suivant :

LEMME 1. — *Soit $h : A \to B$ un monomorphisme plat d'anneaux; si* $\operatorname{Min} B$ *est compact,* $\operatorname{Min} A$ *est compact.*

L'injectivité de h montre que ${}^a h(\operatorname{Min} B) \supset \operatorname{Min} A$, et la platitude, que ${}^a h(\operatorname{Min} B) \subset \operatorname{Min} A$ (*cf.* [11], p. 6-07); finalement, ${}^a h(\operatorname{Min} B) = \operatorname{Min} A$, et la compacité de $\operatorname{Min} A$ résulte de celle de $\operatorname{Min} B$ et de la continuité de ${}^a h$.

Le lemme suivant sera utilisé à deux reprises dans la suite :

LEMME 2. — *Soit A un anneau réduit dont le spectre minimal est compact; le système topologisant et idempotent d'idéaux de A associé à l'épimophisme plat $A \to M(A)$ est composé des idéaux de A contenant un idéal fidèle de type fini; c'est aussi l'ensemble des idéaux de A qui ne sont contenus dans aucun idéal premier minimal.*

Rappelons que, si $A \to B$ est un épimorphisme plat d'anneaux, il existe un système topologisant et idempotent $\mathcal{F}$, et un seul, d'idéaux de A tel que B soit A-isomorphe à $A_{\mathcal{F}}$, et que le foncteur $M \to M_{\mathcal{F}}$ de $\operatorname{mod} A$ dans $\operatorname{mod} B$ soir exact et commute aux sommes directes; ce système est composé des idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que $\mathfrak{a}B = B$ (*cf.* [11], p. 6-11); la sous-catégorie localisante $\mathcal{C}$ correspondante de $\operatorname{mod} A$ est formée des A-modules M tels que $M \otimes_A B = 0$. Nous dirons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$ sont associés à l'épimorphisme plat $A \to B$. Cela étant, il est clair que, si $M(A)$ est absolument plat, les idéaux $\mathfrak{a}$ de A tels que $\mathfrak{a}\, M(A) = M(A)$ sont les idéaux qui contiennent un idéal fidèle de type fini; le reste résulte immédiatement de la compacité de $\operatorname{Min} A$ et du fait qu'un idéal de type fini est contenu dans un idéal premier minimal si, et seulement si, son annulateur est $\neq 0$.

PROPOSITION 2. — *Soient A un anneau réduit dont le spectre minimal est compact, M un A-module; les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Min} A$;

(ii) *$I_A(M)$ est plat.*

On sait que, si A est un anneau réduit et M un A-module plat, $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Min} A$ (*cf.* [8]); il suffit donc de montrer que (i) implique (ii). Soit $\mathcal{C}$ la sous-catégorie localisante de $\operatorname{Mod} A$ associée à l'épimorphisme plat $A \to M(A)$; d'après le lemme 2, la condition $\operatorname{Ass} M \subset \operatorname{Min} A$ revient à dire que M ne contient aucun sous-objet non nul appartenant à $\mathcal{C}$; la proposition 6 de [4] (p. 374) montre alors que $I_A(M)$ est $\mathcal{C}$-fermé, donc A-isomorphe à $M(A) \otimes_A I_A(M)$, qui est un $M(A)$ module plat [puisque $M(A)$ est absolument plat], donc un A-module plat [puisque $M(A)$ est un A-module plat].

PROPOSITION 3. — *Soit A un anneau réduit; les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\operatorname{Min} A$ est compact.*

(ii) *$\prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Min} A} A_{\mathfrak{p}}$ est un A-module plat.*

(iii) *$I_A(A)$ est un A-module plat.*

On trouvera la démonstration de l'équivalence de (i) et (ii) dans [11] (p. 6-07). D'autre part, la proposition 2 entraîne que (i) implique (iii). Finalement on peut remarquer que (iii) entraîne que le morphisme $A \to Q(A)$ est plat puisque, A étant réduit, $Q(A)$, en tant que A-module, est isomorphe à $I_A(A)$; comme de plus $Q(A)$ est absolument plat, le lemme 1 de la proposition 2 montre que $\operatorname{Min} A$ est bien compact dans ce cas.

Voici maintenant un critère pratique de compacité du spectre minimal.

Proposition 4. — *Si A est un anneau réduit,* $\operatorname{Min} A$ *est compact si, et seulement si, pour tout x de A, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A tel que*

$$x\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(Ax + \mathfrak{a}) = 0.$$

Supposons d'abord $\operatorname{Min} A$ compact, et soit $x \in A$; $V(x)$ est ouvert et fermé (donc compact) dans $\operatorname{Min} A$; il existe donc une partie finie F de A telle que $V(x) = D(F)$; si $\mathfrak{d}$ est l'idéal engendré par F, on voit que

$$x\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(Ax + \mathfrak{a}) = 0.$$

Pour démontrer la réciproque, il suffit de montrer que $Q(A)$ est un A-module plat : c'est une conséquence de la proposition précédente. Soient donc $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de $Q(A)$, x un élément de $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap A$, $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de A tels que $x\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(Ax + \mathfrak{a}) = 0$; comme $Ax + \mathfrak{a}$ est fidèle dans A, il engendre l'idéal unité dans $Q(A)$; cet idéal n'est donc pas contenu dans $\mathfrak{p}$. On a donc montré que, pour tout x de $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \not\supset \operatorname{Ann} x$, propriété caractéristique des idéaux premiers minimaux. $A_\mathfrak{p}$ est donc un corps, et la proposition 15, page 116, de [2] permet de conclure que $Q(A)$ est un A-module plat.

3. La condition (C); application aux anneaux totaux de fractions absolument plats.

Nous dirons qu'un anneau satisfait à la condition (C) si tout idéal de type fini et fidèle contient un élément libre.

Proposition 5. — *Si un anneau A satisfait à la condition* (C), *le morphisme canonique de $Q_{cl}(A)$ dans $M(A)$ est un isomorphisme.*

Notons en effet $\mathcal{F}$ le système topologisant et idempotent des idéaux de A qui contiennent un idéal fidèle de type fini, et $\mathcal{G}$ (resp. $\mathcal{H}$) celui qui est associé à l'épimorphisme plat $A \to M(A)$ [resp. $A \to Q_{cl}(A)$]; il est clair que $\mathcal{F} \supset \mathcal{G} \supset \mathcal{H}$. La condition (C) revient à dire que $\mathcal{F} = \mathcal{H}$, d'où le résultat.

PROPOSITION 6. — *Pour tout anneau réduit A, $A[X]$ satisfait à la condition* (C).

Soit en effet $\mathfrak{a}$ un idéal fidèle de type fini de $A[X]$, $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs de $\mathfrak{a}$, α un majorant du degré des f_i. Le polynôme $\sum_{1 \leq i \leq n} X^{\alpha_i} f_i$ appartient à $\mathfrak{a}$ et est libre, car, A étant réduit, le produit de deux polynômes p et q de $A[X]$ n'est nul que si le produit d'un coefficient quelconque de p par un coefficient quelconque de q est nul.

PROPOSITION 7. — *Pour qu'un anneau réduit satisfasse à la condition* (C), *il faut et il suffit que, pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ de A *sans élément libre,* $\mathfrak{p}A[X]$ *soit un idéal sans élément libre de* $A[X]$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini sans élément libre de A, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système de générateurs de $\mathfrak{a}$; l'idéal $\mathfrak{a}$ est contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A sans élément libre, et est fidèle si, et seulement si, $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i X^i$ est un élément libre de $\mathfrak{p}A[X]$; la proposition en résulte immédiatement.

COROLLAIRE 1. — *Soit A un anneau réduit tel que, pour tout A-module sans torsion M, $A[X] \otimes_A M$ soit un $A[X]$-module sans torsion; alors A satisfait à la condition* (C).

En effet, dire que l'idéal premier $\mathfrak{p}$ ne contient pas d'élément libre équivaut à dire que $A/\mathfrak{p}$ est un A-module sans torsion.

PROPOSITION 8. — *Si A est un anneau tel que, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_{\mathfrak{m}}$ satisfait à la condition* (C), *alors A lui-même satisfait à la condition* (C).

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal fidèle de type fini de A, et supposons que $\mathfrak{a}$ ne contient pas d'élément libre; $\mathfrak{a}$ est alors contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$ sans élément libre, Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{a}$ étant de type fini, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module fidèle de type fini, donc contient, par hypothèse, un élément libre; cela entraîne que $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{p}_{\mathfrak{m}}$ n'est pas un $A_{\mathfrak{m}}$-module sans torsion; or ceci est en contradiction avec le fait que $A/\mathfrak{p}$ est un A-module sans torsion.

PROPOSITION 9. — *Soit A un anneau réduit; les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$Q_{cl}(A)$ est absolument plat.*

(ii) $\mathrm{Min}\,A$ *est compact, et A satisfait à la condition* (C).

(iii) *Pour tout x de A, il existe y de A tel que* $xy = \mathrm{Ann}(Ax + Ay) = 0$.

Les propositions 1 et 5 ainsi que les lemmes de la proposition 2 montrent facilement l'équivalence de (i) et (ii), et celle de (i) et (iii) résulte d'un petit calcul facile.

COROLLAIRE 1. — *Pour que le spectre minimal d'un anneau réduit soit compact, il faut et il suffit que* $Q_c l(A[X])$ *soit absolument plat.*

Il est en effet facile de vérifier que, pour tout anneau A, $\mathrm{Min}\, A$ et $\mathrm{Min}\, A[X]$ sont homéomorphes; si $\mathrm{Min}\, A$ est compact, $A[X]$ satisfait donc, d'après la proposition 6, à la condition (ii) de la proposition 9; la réciproque est une conséquence immédiate du lemme 1.

COROLLAIRE 2. — *Pour que l'anneau total des fractions d'un anneau réduit A soit absolument plat, il faut et il suffit que l'enveloppe injective de tout A-module sans torsion soit un A-module plat.*

En supposant $Q_c l(A)$ absolument plat, on démontrerait, comme dans la proposition 2, mais en utilisant cette fois la localisation $A \to Q_c l(A)$, que $I_A(M)$ est un A-module plat pour tout A-module sans torsion M. Réciproquement, si cette condition est réalisée, $\mathrm{I}_A(A)$ est un A-module plat, donc $\mathrm{Min}\, A$ est compact; d'autre part, tout A-module sans torsion reste sans torsion par extension plate des scalaires donc, d'après le corollaire de la proposition 7, A satisfait à la condition (C) et $Q_c l(A)$ est absolument plat.

COROLLAIRE 3. — *L'anneau total des fractions d'un anneau cohérent de dimension faible finie est absolument plat.*

Soit A l'anneau en question; pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de A, $A_{\mathfrak{m}}$ est un anneau connexe cohérent de dimension faible finie : un tel anneau est intègre (*cf.* [1]), donc A est réduit et, d'après la proposition 8, satisfait à la condition (C). D'autre part, pour tout x de A, $\mathrm{Ann}\, x$ est un idéal de type fini puisque A est cohérent : d'après la proposition 4, $\mathrm{Min}\, A$ est compact et $Q_c l(A)$ est bien absolument plat.

A titre d'application, nous allons donner une légère amélioration d'un résultat d'ENDO sur les anneaux semi-héréditaires.

PROPOSITION 10. — *Un anneau est semi-héréditaire si, et seulement si, sa dimension faible est inférieure ou égale à* 1 *et si son spectre minimal est compact.*

Dans [3], ENDO caractérise les anneaux semi-héréditaires comme étant les anneaux de dimension faible $\leqq 1$ dont l'anneau total des fractions est absolument plat, d'où la proposition dans un sens; réciproquement, si un anneau est de dimension faible $\leqq 1$, ses localisés sont des anneaux de valuation, donc l'anneau est réduit et, d'après la proposition 8, satisfait à la condition (C), ce qui termine la démonstration.

4. Construction du contre-exemple.

Nous allons maintenant construire un anneau réduit dont le spectre minimal est compact et dont l'anneau total des fractions n'est pas absolument plat.

K désigne un corps algébriquement clos dénombrable; nous appellerons K-algèbre de fonctions le couple formé par une K-algèbre K^I, I étant un ensemble quelconque, et une sous-algèbre A de K^I. Avec ces données, si φ est un élément de A, nous noterons $\operatorname{supp}\varphi$ (resp. $\operatorname{cosupp}\varphi$) l'ensemble des x de I tels que $\varphi(x) \neq 0$ [resp. $\varphi(x) = 0$]. Nous dirons que la K-algèbre de fonctions $A \subset K^I$ satisfait à la condition (T) si les conditions suivantes sont réalisées :

(*a*) *A est dénombrable.*

(*b*) *Pour tout φ non constant de A,* $\operatorname{cosupp}\varphi \neq \emptyset$.

LEMME 1. — *Soit $A \subset K^I$ une K-algèbre de fonctions satisfaisant à la condition* (T), λ un élément de A; il existe une K-algèbre de fonctions $A_\lambda \subset K^{I\times N}$ ayant la propriété (T) et un homomorphisme $h : A \to A_\lambda$, tel qu'il existe λ_1 et λ_2 dans A_λ avec

$$\operatorname{cosupp} h(\lambda) = \operatorname{supp}\lambda_1 \cup \operatorname{supp}\lambda_2.$$

La projection $I\times N \to N$ induit un homomorphisme injectif h : $K^I \to K^{I\times N}$; par abus de notation, nous noterons également h sa restriction à A; d'autre part, il existe une injection i de $A[X, Y]$ dans N. Ceci dit, désignons par λ_1 et λ_2 deux applications de $I\times N$ dans K soumises aux conditions suivantes :

(*a*) $\operatorname{supp}\lambda_1 \cup \operatorname{supp}\lambda_2 = \operatorname{cosupp}\lambda$.

(*b*) Si $f = \sum \alpha_{ij} X^i Y^j$ est un polynôme de $A[X, Y]$, tel qu'il existe $x \in \operatorname{supp}\alpha_{ij} - \operatorname{supp} h(\lambda)$ avec $i+j \geq 1$, alors $\lambda_1((x, i(f))$ et $\lambda_2((x, i(f))$ forment un zéro non trivial du polynôme $\sum_{i,j} \alpha_{ij}(x) X^i Y^j$ de $K[X, Y]$; on peut alors vérifier que $A[\lambda_1, \lambda_2]$ satisfait bien aux conditions du lemme.

LEMME 2. — *$A \subset K^I$ une K-algèbre de fonctions satisfaisant à la condition* (T); *il existe alors une K-algèbre de fonctions $U(A) \subset K^{I\times N^N}$ satisfaisant à la condition* (T) *et un homomorphisme injectif de K-algèbres $U : A \to U(A)$ tel que pour tout λ de A, il existe λ_1 et λ_2 dans $U(A)$ avec*

$$\operatorname{cosupp} U(\lambda) = \operatorname{supp}\lambda_1 \cup \operatorname{supp}\lambda_2.$$

La construction de $U(A)$ par limite inductive à partir du lemme 1 est fastidieuse à rédiger, mais facile, et nous ne la détaillerons pas.

LEMME 3. — *Soit $A \subset K^I$ une K-algèbre de fonctions satisfaisant à la condition* (T). *Il existe une K-algèbre de fonctions $V(A) \subset K^{I\times N^N}$ satisfaisant à la condition* (T) *et un homomorphisme injectif $m : A \to V(A)$ de K-algèbres tel que, pour μ de $V(A)$, il existe μ_1 et μ_2 de $V(A)$ avec*

$$\operatorname{cosupp}\mu = \operatorname{supp}\mu_1 \cup \operatorname{supp}\mu_2.$$

Ici encore, la construction de $V(A)$, par limite inductive, est claire, et il est inutile de la préciser. On peut maintenant remarquer que $V(A)$ est un anneau connexe réduit égal à son anneau total des fractions; d'autre part, pour tout μ de $V(A)$,

$$\mu(\mu_1 V(A) + \mu_2 V(A)) = \operatorname{Ann}(\mu V(A) + \mu_1 V(A) + \mu_2 V(A)) = 0,$$

donc, d'après la proposition 4, Min $V(A)$ est compact. Comme $V(A)$ n'est pas un corps, si A n'est pas intègre, condition évidemment réalisable, on a bien démontré la proposition suivante :

PROPOSITION 10. — *Il existe un anneau réduit dont le spectre minimal est compact et dont l'anneau total des fractions n'est pas absolument plat.*

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BERTIN (J. C.). — Exposé fait au *Colloque d'algèbre* [1970, Lyon].

[2] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*, Chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. — Paris, Hermann, 1961-1965 (*Act. scient. et ind.*, 1290, 1293, 1308, 1314; *Bourbaki*, 27, 28, 30, 31).

[3] ENDO (S.). — On semi-hereditary rings, *J. Math. Soc. Japan*, t. 13, 1961, p. 109-119.

[4] GABRIEL (P.). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 332-448 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).

[5] HENRIKSEN (M.) and JERISON (M.). — The space of minimal prime ideals of a commutative ring, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 115, 1965, p. 110-130.

[6] LAMBECK (J.). — *Lectures on rings and modules*. — Waltham, Blaisdell publishing Company, 1966 (*A Blaisdell Book in pure and applied Mathematics*).

[7] LAZARD (D.). — Autour de la platitude, *Bull. Soc. math. France*, t. 97, 1969, p. 81-128 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1968).

[8] LAZARD (D.). — Ass de modules plats, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, 1969, Série A, p. 65-67.

[9] MEWBORN (A. C.). — Some conditions on commutative semiprime rings, *J. of Algebra*, t. 13, 1969, p. 422-431.

[10] PIERCE (R. S.). — *Modules over commutative regular rings*. — Providence, American mathematical Society, 1967 (*Mémoirs of the American mathematical Society*, 70).

[11] *Séminaire* SAMUEL, 1967-1968 : *Les épimorphismes d'anneaux*. — Paris, Secrétariat mathématique, 1968.

(Texte définitif reçu le 18 décembre 1970.)

Yann QUENTEL,
35, avenue Georges-Clemenceau,
29 N-Brest.