

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS VERDIER

Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 337-343

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__337_0

© Bulletin de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**TOPOLOGIE SUR LES ESPACES DE COHOMOLOGIE
D'UN COMPLEXE DE FAISCEAUX ANALYTIQUES
À COHOMOLOGIE COHÉRENTE**

PAR

JEAN-LOUIS VERDIER

[Université Paris-Sud (Orsay) et Brandeis University]

Soient X un espace analytique ⁽¹⁾, et F^* un complexe borné de faisceaux analytiques sur X à cohomologie cohérente (on ne suppose pas que les composants de ce complexe soient cohérents). On se propose de définir de manière naturelle et fonctorielle en X et en F^* un complexe d'espaces vectoriels topologiques de type D. F. N. (dual de Fréchet nucléaire) [resp. F. N. (Fréchet nucléaire)] dont la cohomologie soit l'hypercohomologie à supports compacts (resp. sans support) de X à valeurs dans F^* .

Il s'agit ici d'un exercice sur la méthode de la descente cohomologique de P. DELIGNE [1]. Une longue conversation avec L. ILLUSIE nous a permis d'éclaircir un certain nombre de points.

On sait ce qu'est un hyper-recouvrement localement fini de X par des compacts de Stein (resp. des ouverts de Stein) [2]. C'est un complexe semi-simplicial $\mathbf{K} = (K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'espaces topologiques, muni d'une augmentation $p : \mathbf{K} \rightarrow X$. Pour tout n , K_n est une somme disjointe de compacts (resp. d'ouverts) de Stein de X , et la flèche $p_n : K_n \rightarrow X$ est la somme des flèches naturelles d'inclusion. Cette flèche $p_n : K_n \rightarrow X$ est localement finie. La flèche $p_0 : K_0 \rightarrow X$ recouvre X . Pour tout $x \in X$, l'ensemble semi-simplicial \mathbf{K}_x vérifie la condition d'extension de Kan, et est homotopiquement trivial en tous ses points bases. Enfin, pour tout n et pour tout recouvrement localement fini $R \rightarrow K_n$ par des compacts (resp. ouverts) de Stein, il existe un morphisme d'hyper-recouvrements $\mathbf{K}' \rightarrow \mathbf{K}$ qui majore R .

(1) Tous les espaces considérés sont de dimension finie et paracompacts.

DÉFINITION. — Soit $p: \mathbf{K} \rightarrow X$ un hyper-recouvrement. Un faisceau F sur \mathbf{K} est constitué par la donnée, pour tout n , d'un faisceau F_n sur K_n , et par la donnée d'un morphisme de faisceaux

$$a_f: f^* F_n \rightarrow F_m$$

pour toute application croissante $f: (0, n) \rightarrow (0, m)$. De plus, les morphismes a_f doivent satisfaire aux conditions de compatibilité évidentes. Soient F et G deux faisceaux sur \mathbf{K} , un morphisme $u: F \rightarrow G$ consiste en la donnée, pour tout entier n , d'un morphisme de faisceaux $u_n: F_n \rightarrow G_n$, ces données étant soumises aux conditions de compatibilités évidentes.

Le faisceau $p^* O_X$ est un faisceau d'anneaux sur \mathbf{K} . Tous les faisceaux considérés seront des faisceaux de modules sur ce faisceau d'anneaux.

Un faisceau F sur \mathbf{K} est dit *cohérent* si, pour tout n et toute composante de Stein L de K_n , le faisceau $F|L$ est la restriction à L d'un faisceau analytique cohérent sur un voisinage ouvert de L dans X . On rappelle que, pour tout faisceau cohérent M , sur un voisinage ouvert de L , et pour tout faisceau G , sur le même voisinage, on a

$$\text{Ext}^i(L; M, G) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ u \supset L}} \text{Ext}^i(U; M, G), \quad i \in \mathbf{N},$$

la limite étant prise suivant les voisinages ouverts de L dans X de sorte que le faisceau F détermine de manière unique le germe de faisceaux cohérents qui lui donne naissance.

Soit r un entier positif. Un morphisme $F \rightarrow G$ de faisceaux sur \mathbf{K} est appelé un *isomorphisme* (resp. *épimorphisme*) de niveau r si, pour tout $n \leq r$, le morphisme $F_n \rightarrow G_n$ est un isomorphisme (resp. épimorphisme). Un morphisme $F^* \rightarrow G^*$ de complexes de faisceaux est appelé un *quasi-isomorphisme de niveau r* s'il induit, sur les faisceaux de cohomologie, des isomorphismes de niveau r .

THÉORÈME. — Soient F^* un complexe de faisceaux sur X , borné et à cohomologie cohérente, et r un entier positif.

1° Il existe un hyper-recouvrement localement fini de X par des compacts (resp. ouverts) de Stein $\mathbf{K} \xrightarrow{p} X$, un complexe borné G^* à composantes cohérentes sur \mathbf{K} et un quasi-isomorphisme de niveau r

$$G^* \rightarrow p^* F^*.$$

2° Soient \mathbf{K}_i , $G_i^* \rightarrow p_i^* F^*$, $i = 1, 2$, deux solutions au problème 1°. Il existe un hyper-recouvrement \mathbf{K}_3 , deux morphismes $m_i: \mathbf{K}_3 \rightarrow \mathbf{K}_i$

et un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 & G_3^* & \\
 m_1^* G_1^* & \swarrow \quad \searrow & m_2^* G_2^* \\
 & p_3^* F &
 \end{array}$$

où les morphismes sont des quasi-isomorphismes de niveau r , et où G_3^0 est à composantes cohérentes.

3° Soient H^* un complexe borné sur X à cohomologie cohérente, et $u : F^* \rightarrow H^*$ un morphisme de complexes. Il existe un hyper-recouvrement $\mathbf{K} \rightarrow X$, et un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{array}{ccc}
 G^* & \xrightarrow{v} & I^* \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 p^* H^* & \xrightarrow{p^* u} & p^* H^*
 \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont des quasi-isomorphismes de niveau r , et où G^* et I^* sont à composantes cohérentes. La flèche v est unique dans la catégorie triangulée du problème (catégorie des complexes à composantes cohérentes modulo quasi-isomorphismes de niveau r).

Ce théorème permet de résoudre le problème posé au début. En effet, soit (s, t) l'amplitude de F^* [i. e. $\mathcal{H}^q(F^*) = 0$ pour $q \notin (s, t)$, $\mathcal{H}^s(F^*)$ et $\mathcal{H}^t(F^*)$ non nuls], et soit $n = \dim(X)$. Le complexe $R\Gamma_c(X, F^*)$ [resp. $R\Gamma(X, F^*)$] est d'amplitude contenue dans $(s, t + n)$. Posons $r = t - s + n + 1$, et notons $R p_* G^*$ le complexe simple associé au complexe double

$$p_{0*} G_0^* \rightrightarrows p_{1*} G_1^* \rightrightarrows p_{2*} G_2^* \dots$$

On a un morphisme canonique $\Gamma_c(X, R p_* G^*) \rightarrow R\Gamma_c(X, F^*)$ [resp. $\Gamma(X, R p_* G^*) \rightarrow R\Gamma(X, F^*)$] qui induit un isomorphisme sur la cohomologie jusqu'en degré $t + n$. Il suffit donc de tronquer cohomologiquement le complexe $\Gamma_c(X, R p_* G^*)$ [resp. $\Gamma(X, R p_* G^*)$] en degré $t + n$, pour obtenir un complexe d'espaces vectoriels qui donne la cohomologie cherchée. Mais le complexe $\Gamma_c(X, R p_* G^*)$ [resp. $\Gamma(X, R p_* G^*)$] n'est autre que le complexe $\Gamma_c(\mathbf{K}, G^*)$ [resp. $\Gamma(\mathbf{K}, G^*)$] (complexe simple associé au complexe double évident) dont les composants sont munis de topologie D. F. N. (resp. F. N.). Le complexe $\Gamma_c(\mathbf{K}, G^*)$ [resp. $\Gamma(\mathbf{K}, G^*)$] tronqué cohomologiquement en degré $t + n$ est le complexe cherché.

Le théorème résulte, par vérification de routine, de la proposition suivante :

PROPOSITION. — Soient X un espace analytique, $\mathbf{K} \rightarrow X$ un hyper-recouvrement localement fini par des compacts (resp. ouverts) de Stein,

F^* un complexe de faisceaux sur \mathbf{K} , borné et à cohomologie cohérente, $u : G^* \rightarrow F^*$ un morphisme de complexes tel que :

- (a)_n G^* soit borné et à composantes cohérentes,
- (b)_n $\mathcal{H}^p(u)$ soit un isomorphisme de niveau r pour $p > n$,
- (c)_n $\mathcal{H}^n(u)$ soit un épimorphisme de niveau r .

Alors il existe un hyper-recouvrement localement fini $\mathbf{K}' \rightarrow X$ par des compacts (resp. ouverts) de Stein, un morphisme d'hyper-recouvrements $m : \mathbf{K}' \rightarrow \mathbf{K}$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} m^* G^* & \xrightarrow{m^*(u)} & m^* F^* \\ & \swarrow & \searrow v \\ & H^* & \end{array}$$

tel que v possède les propriétés (a)_{n-1}, (b)_{n-1}, (c)_{n-1}.

Démonstration. — On utilise le lemme suivant :

LEMME. — Soient $\alpha : A \rightarrow B$ un épimorphisme de faisceaux sur \mathbf{K} , C un faisceau cohérent sur \mathbf{K} , et $\beta : C \rightarrow B$ un morphisme. Il existe un hyper-recouvrement plus fin $m : \mathbf{K}' \rightarrow \mathbf{K}$ et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\delta} & m^* C \\ \downarrow & & \downarrow m^* \beta \\ m^* A & \xrightarrow{m^* \alpha} & m^* B \end{array}$$

où L est un faisceau cohérent sur \mathbf{K}' , et δ un épimorphisme de niveau r .

Démonstration du lemme. — Sur la somme disjointe des espaces K_i , $0 \leq i \leq r$, désignons par $\bar{A}^r, \bar{B}^r, \bar{C}^r$ les faisceaux induits par A, B et C respectivement. Il existe un recouvrement localement fini $R \xrightarrow{\varphi} \coprod_{0 \leq i \leq r} K_i$ par des compacts (resp. ouverts) de Stein tel que :

1° Il existe un module localement libre, localement de rang fini, Λ , et un épimorphisme $\Lambda \xrightarrow{\gamma} \varphi^* C$.

2° Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\gamma} & \varphi^* \bar{C}^r \\ \downarrow & & \downarrow \\ \varphi^* \bar{A}^r & \longrightarrow & \varphi^* \bar{B}^r \end{array}$$

Soit alors $\mathbf{K}' \xrightarrow{m} \mathbf{K}$ un hyper-recouvrement localement fini par des compacts (resp. ouverts) de Stein qui majore $R \xrightarrow{\varrho} \coprod_{0 \leq i \leq r} K_i$, et soit $m_i : K'_i \rightarrow K_i$ les recouvrements induits par m . On a donc, pour tout i , $0 \leq i \leq r$, un faisceau localement libre Λ'_i , localement de rang fini, des épimorphismes $\gamma'_i : \Lambda'_i \rightarrow m_i^* C_i$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'_i & \xrightarrow{\gamma'_i} & m_i^* C_i \\ \downarrow & & \downarrow m_i^* \beta_i \\ m_i^* A_i & \xrightarrow{m_i^* \alpha_i} & m_i^* B_i \end{array}$$

Posons alors

$$L_p = \bigoplus_{i,f} f^* \Lambda'_i, \quad 0 \leq i \leq r, \quad f : (0, i) \rightarrow (0, p), \quad f \text{ croissante.}$$

On a, pour toute application croissante $f : (0, p) \rightarrow (0, q)$, des morphismes naturels $\alpha_f : f^* L_p \rightarrow L_q$, qui vérifient les conditions de compatibilité. On a donc un faisceau L sur \mathbf{K}' . De plus, pour tout faisceau D sur \mathbf{K}' , on a des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}_{\mathbf{K}'}(L, D) \simeq \bigoplus_{i=0}^r \text{Hom}_{K'_i}(\Lambda'_i, D_i).$$

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\delta} & m^* C \\ \downarrow & & \downarrow m^* \beta \\ m^* A & \xrightarrow{m^* \alpha} & m^* B \end{array}$$

et il est clair que δ est un épimorphisme de niveau r .

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition (suite). — On désigne par $H^*(.)$ la cohomologie, par $Z^*(.)$ les cycles et par $B^*(.)$ les bords. Notons N le noyau de l'application $H^n(G') \rightarrow H^n(F')$, et

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & N \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \\ Z^n(G') & \longrightarrow & H^n(G') \end{array}$$

un diagramme cartésien. Le faisceau P est cohérent et le morphisme $P \rightarrow N$ est un épimorphisme. L'image du morphisme composé $P \rightarrow Z^n(G') \rightarrow Z^n(F')$

est contenu dans $B^n(F^r)$. On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & & \downarrow \beta \\
 F^{n-1} & \xrightarrow{\alpha} & B^n(F^r) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

D'après le lemme, il existe, quitte à passer à un hyper-recouvrement plus fin, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow{\gamma} & m^* P \\
 \downarrow \gamma_1 & & \downarrow m^* \beta \\
 m^* F^{n-1} & \xrightarrow{m^* \alpha} & m^* B^n(F^r)
 \end{array}$$

où L est cohérent localement libre. Considérons alors le morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & m^* G^{n-2} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}} & m^* G^{n-1} \oplus L & \xrightarrow{(d, m^* \varepsilon \circ \gamma)} & m^* G^n \longrightarrow m^* G^{n+1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow m^* u^{n-2} & & \downarrow (m^* u^{n-1}, \gamma_1) & & \downarrow m^* u^n & & \downarrow m^* u^{n+1} \\
 \dots & \longrightarrow & m^* F^{n-2} & \longrightarrow & m^* F^{n-1} & \longrightarrow & m^* F^n & \longrightarrow & m^* F^{n+1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Ce morphisme induit des isomorphismes de niveau r sur la cohomologie en degré $p \geq n$. On peut donc, pour démontrer la proposition, supposer que le morphisme u possède les propriétés $(a)_{n-1}$ et $(b)_{n-1}$. D'après le lemme, il existe, quitte à passer à un hyper-recouvrement plus fin, un diagramme :

$$L' \xrightarrow{\mu} m^* Z^{n-1}(F^r) \longrightarrow m^* H^{n-1}(F^r)$$

tel que le morphisme composé soit un épimorphisme, et tel que L' soit cohérent localement libre. Considérons alors le morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & m^* G^{n-2} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix}} & m^* G^{n-1} \oplus L' & \xrightarrow{(d, 0)} & m^* G^n \longrightarrow m^* G^{n+1} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow m^* u^{n-2} & & \downarrow (m^* u^{n-1}, \mu) & & \downarrow m^* u^n & & \downarrow m^* u^{n+1} \\
 \dots & \longrightarrow & m^* F^{n-2} & \longrightarrow & m^* F^{n-1} & \longrightarrow & m^* F^n & \longrightarrow & m^* F^{n+1} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

Ce morphisme de complexes possède les propriétés $(a)_{n-1}$, $(b)_{n-1}$ et $(c)_{n-1}$.

Remarque. — Nous avons en fait démontré un résultat plus précis. Dans les assertions du théorème, on peut supposer que toutes les composantes des complexes G^* qu'on construit, sauf la première non nulle, sont localement libres. Cette remarque est utile pour établir la fonctorialité en X de cette cohomologie topologisée.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie*. SGA 4, Chap. 5, App. 2^e édition. — Berlin, Springer-Verlag (*Lecture Notes in Mathematics*) (à paraître).
- [2] *Institut des Hautes Études Scientifiques*. S. G. A. IV, Chap. 5. App. — Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études Scientifiques (Notes multigraphiées).

(Texte reçu le 18 juin 1971.)

Jean-Louis VERDIER,
104, rue d'Assas,
75-Paris 06
