BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS VERDIER

Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 337-343
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__337_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 337 à 343.

TOPOLOGIE SUR LES ESPACES DE COHOMOLOGIE D'UN COMPLEXE DE FAISCEAUX ANALYTIQUES À COHOMOLOGIE COHÉRENTE

PAR

JEAN-LOUIS VERDIER

[Université Paris-Sud (Orsay) et Brandeis University]

Soient X un espace analytique [1], et $F^{\cdot}$ un complexe borné de faisceaux analytiques sur X à cohomologie cohérente (on ne suppose pas que les composants de ce complexe soient cohérents). On se propose de définir de manière naturelle et fonctorielle en X et en $F^{\cdot}$ un complexe d'espaces vectoriels topologiques de type D. F. N. (dual de Fréchet nucléaire) [resp. F. N. (Fréchet nucléaire)] dont la cohomologie soit l'hypercohomologie à supports compacts (resp. sans support) de X à valeurs dans $F^{\cdot}$.

Il s'agit ici d'un exercice sur la méthode de la descente cohomologique de P. DELIGNE [1]. Une longue conversation avec L. ILLUSIE nous a permis d'éclaircir un certain nombre de points.

On sait ce qu'est un hyper-recouvrement localement fini de X par des compacts de Stein (resp. des ouverts de Stein) [2]. C'est un complexe semi-simplicial $\mathsf{K} = (K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'espaces topologiques, muni d'une augmentation $p : \mathsf{K} \to X$. Pour tout n, K_n est une somme disjointe de compacts (resp. d'ouverts) de Stein de X, et la flèche $p_n : K_n \to X$ est la somme des flèches naturelles d'inclusion. Cette flèche $p_n : K_n \to X$ est localement finie. La flèche $p_0 : K_0 \to X$ recouvre X. Pour tout $x \in X$, l'ensemble semi-simplicial K_x vérifie la condition d'extension de Kan, et est homotopiquement trivial en tous ses points bases. Enfin, pour tout n et pour tout recouvrement localement fini $R \to K_n$ par des compacts (resp. ouverts) de Stein, il existe un morphisme d'hyper-recouvrements $\mathsf{K}' \to \mathsf{K}$ qui majore R.

---

(1) Tous les espaces considérés sont de dimension finie et paracompacts.

DÉFINITION. — *Soit $p : \mathsf{K} \to X$ un hyper-recouvrement. Un faisceau F sur K est constitué par la donnée, pour tout n, d'un faisceau F_n sur K_n et par la donnée d'un morphisme de faisceaux*

$$a_f : \quad f^* F_n \to F_m$$

pour toute application croissante $f : [0, n] \to [0, m]$. De plus, les morphismes a_f doivent satisfaire aux conditions de compatibilité évidentes. Soient F et G deux faisceaux sur K, un morphisme $u : F \to G$ consiste en la donnée, pour tout entier n, d'un morphisme de faisceaux $u_n : F_n \to G_n$, ces données étant soumises aux conditions de compatibilités évidentes.

Le faisceau $p^* O_X$ est un faisceau d'anneaux sur K. Tous les faisceaux considérés seront des faisceaux de modules sur ce faisceau d'anneaux.

Un faisceau F sur K est dit *cohérent* si, pour tout n et toute composante de Stein L de K_n, le faisceau $F \mid L$ est la restriction à L d'un faisceau analytique cohérent sur un voisinage ouvert de L dans X. On rappelle que, pour tout faisceau cohérent M, sur un voisinage ouvert de L, et pour tout faisceau G, sur le même voisinage, on a

$$\operatorname{Ext}^i(L; M, G) = \varinjlim_{U \supset L} \operatorname{Ext}^i(U; M, G), \qquad i \in \mathbf{N},$$

la limite étant prise suivant les voisinages ouverts de L dans X de sorte que le faisceau F détermine de manière unique le germe de faisceaux cohérents qui lui donne naissance.

Soit r un entier positif. Un morphisme $F \to G$ de faisceaux sur $\mathbf{K}$ est appelé un *isomorphisme* (resp. *épimorphisme*) *de niveau r* si, pour tout $n \leqq r$, le morphisme $F_n \to G_n$ est un isomorphisme (resp. épimorphisme). Un morphisme $F^\bullet \to G^\bullet$ de complexes de faisceaux est appelé un *quasi-isomorphisme de niveau r* s'il induit, sur les faisceaux de cohomologie, des isomorphismes de niveau r.

THÉORÈME. — *Soient $F^\bullet$ un complexe de faisceaux sur X, borné et à cohomologie cohérente, et r un entier positif.*

1° *Il existe un hyper-recouvrement localement fini de X par des compacts* (resp. *ouverts*) *de Stein $\mathsf{K} \xrightarrow{p} X$, un complexe borné $G^\bullet$ à composantes cohérentes sur K et un quasi-isomorphisme de niveau r*

$$G^\bullet \to p^* F^\bullet.$$

2° *Soient K_i, $G_i^\bullet \to p_i^* F^\bullet$, $i = 1, 2$, deux solutions au problème 1°. Il existe un hyper-recouvrement K_3, deux morphismes $m_i : \mathsf{K}_3 \to \mathsf{K}_i$*

et un diagramme commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & G_3^{\cdot} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ m_1^* G_1^{\cdot} \arrow[dr] & & m_2^* G_2^{\cdot} \arrow[dl] \\ & p_3^* F & \end{tikzcd}$$

où les morphismes sont des quasi-isomorphismes de niveau r, et où G_3^0 est à composantes cohérentes.

3° *Soient $H^{\cdot}$ un complexe borné sur X à cohomologie cohérente, et $u : F^{\cdot} \to H^{\cdot}$ un morphisme de complexes. Il existe un hyper-recouvrement $\mathsf{K} \to X$, et un diagramme commutatif à homotopie près*

$$\begin{tikzcd} G^{\cdot} \arrow[r, "v"] \arrow[d] & I^{\cdot} \arrow[d] \\ p^* H^{\cdot} \arrow[r, "p^* u"] & p^* H^{\cdot} \end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont des quasi-isomorphismes de niveau r, et où $G^{\cdot}$ et $I^{\cdot}$ sont à composantes cohérentes. La flèche v est unique dans la catégorie triangulée du problème (catégorie des complexes à composantes cohérentes modulo quasi-isomorphismes de niveau r).

Ce théorème permet de résoudre le problème posé au début. En effet, soit $[s, t]$ l'amplitude de $F^{\cdot}$ [i. e. $\mathcal{H}^q(F^{\cdot}) = 0$ pour $q \notin [s, t]$, $\mathcal{H}^s(F^{\cdot})$ et $\mathcal{H}^t(F^{\cdot})$ non nuls], et soit $n = \dim(X)$. Le complexe $R\,\Gamma_c(X, F^{\cdot})$ [resp. $R\,\Gamma(X, F^{\cdot})$] est d'amplitude contenue dans $[s, t + n]$. Posons $r = t - s + n + 1$, et notons $R\,p_* G^{\cdot}$ le complexe simple associé au complexe double

$$p_{0*}\, G_0^{\cdot} \rightrightarrows p_{1*}\, G_1^{\cdot} \substack{\rightarrow\\\rightarrow\\\rightarrow} p_{2*}\, G_2^{\cdot} \ldots.$$

On a un morphisme canonique $\Gamma_c(X, R\,p_* G^{\cdot}) \to R\,\Gamma_c(X, F^{\cdot})$ [resp. $\Gamma(X, R\,p_* G^{\cdot}) \to R\,\Gamma(X, F^{\cdot})$] qui induit un isomorphisme sur la cohomologie jusqu'en degré $t + n$. Il suffit donc de tronquer cohomologiquement le complexe $\Gamma_c(X, R\,p_* G^{\cdot})$ [resp. $\Gamma(X, R\,p_* G^{\cdot})$] en degré $t + n$, pour obtenir un complexe d'espaces vectoriels qui donne la cohomologie cherchée. Mais le complexe $\Gamma_c(X, R\,p_* G^{\cdot})$ [resp. $\Gamma(X, R\,p_* G^{\cdot})$] n'est autre que le complexe $\Gamma_c(\mathsf{K}, G^{\cdot})$ [resp. $\Gamma(\mathsf{K}, G^{\cdot})$] (complexe simple associé au complexe double évident) dont les composants sont munis de topologie D. F. N. (resp. F. N.). Le complexe $\Gamma_c(\mathsf{K}, G^{\cdot})$ [resp. $\Gamma(\mathsf{K}, G^{\cdot})$] tronqué cohomologiquement en degré $t + n$ est le complexe cherché.

Le théorème résulte, par vérification de routine, de la proposition suivante :

Proposition. — *Soient X un espace analytique, $\mathsf{K} \to X$ un hyper-recouvrement localement fini par des compacts* (resp. *ouverts*) *de Stein,*

$F^{\bullet}$ un complexe de faisceaux sur K, borné et à cohomologie cohérente, $u : G^{\bullet} \to F^{\bullet}$ un morphisme de complexes tel que :

$(a)_n$ *$G^{\bullet}$ soit borné et à composantes cohérentes,*

$(b)_n$ *$\mathcal{H}^p(u)$ soit un isomorphisme de niveau r pour $p > n$,*

$(c)_n$ *$\mathcal{H}^n(u)$ soit un épimorphisme de niveau r.*

Alors il existe un hyper-recouvrement localement fini $\mathsf{K}' \to X$ par des compacts (resp. *ouverts*) *de Stein, un morphisme d'hyper-recouvrements $m : \mathsf{K}' \to \mathsf{K}$, un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} m^* G^{\bullet} \arrow[rr, "m^*(u)"] & & m^* F^{\bullet} \\ & H^{\bullet} \arrow[ul] \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

tel que v possède les propriétés $(a)_{n-1}$, $(b)_{n-1}$, $(c)_{n-1}$.

Démonstration. — On utilise le lemme suivant :

Lemme. — *Soient $\alpha : A \to B$ un épimorphisme de faisceaux sur K, C un faisceau cohérent sur K, et $\beta : C \to B$ un morphisme. Il existe un hyper-recouvrement plus fin $m : \mathsf{K}' \to \mathsf{K}$ et un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & m^* C \arrow[d, "m^*\beta"] \\ m^* A \arrow[r, "m^*\alpha"'] & m^* B \end{tikzcd}$$

où L est un faisceau cohérent sur K', et δ un épimorphisme de niveau r.

Démonstration du lemme. — Sur la somme disjointe des espaces K_i, $0 \leq i \leq r$, désignons par $\bar{A}^r$, $\bar{B}^r$, $\bar{C}^r$ les faisceaux induits par A, B et C respectivement. Il existe un recouvrement localement fini $R \xrightarrow{\varphi} \amalg_{0 \leq i \leq r} K_i$ par des compacts (resp. ouverts) de Stein tel que :

1° Il existe un module localement libre, localement de rang fini, Λ, et un épimorphisme $\Lambda \xrightarrow{\gamma} \varphi^* C$.

2° Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d] & \varphi^* \bar{C}^r \arrow[d] \\ \varphi^* \bar{A}^r \arrow[r] & \varphi^* \bar{B}^r \end{tikzcd}$$

Soit alors $\mathbf{K}' \xrightarrow{m} \mathbf{K}$ un hyper-recouvrement localement fini par des compacts (resp. ouverts) de Stein qui majore $R \xrightarrow{\varphi} \coprod_{0 \leq i \leq r} K_i$, et soit $m_i : K'_i \to K_i$ les recouvrements induits par m. On a donc, pour tout i, $0 \leq i \leq r$, un faisceau localement libre Λ'_i, localement de rang fini, des épimorphismes $\gamma'_i : \Lambda'_i \to m_i^* C_i$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \Lambda'_i & \xrightarrow{\gamma'_i} & m_i^* C_i \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m_i^* \beta_i} \\ m_i^* A_i & \xrightarrow{m_i^* \alpha_i} & m_i^* B_i \end{array}$$

Posons alors

$$L_p = \oplus_{i,f} f^* \Lambda'_i, \qquad 0 \leq i \leq r, \quad f : (0, i) \to (0, p), \quad f \text{ croissante.}$$

On a, pour toute application croissante $f : (0, p) \to (0, q)$, des morphismes naturels $a_f : f^* L_p \to L_q$, qui vérifient les conditions de compatibilité. On a donc un faisceau L sur $\mathbf{K}'$. De plus, pour tout faisceau D sur $\mathbf{K}'$, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}'}(L, D) \simeq \bigoplus_{i=0}^{r} \mathrm{Hom}_{K'_i}(\Lambda'_i, D_i).$$

On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\delta} & m^* C \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m^* \beta} \\ m^* A & \xrightarrow{m^* \alpha} & m^* B \end{array}$$

et il est clair que δ est un épimorphisme de niveau r.

C. Q. F. D.

Démonstration de la proposition (*suite*). — On désigne par $H^*(.)$ la cohomologie, par $Z^*(.)$ les cycles et par $B^*(.)$ les bords. Notons N le noyau de l'application $H^n(G^\cdot) \to H^n(F^\cdot)$, et

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & N \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow \\ Z^n(G^\cdot) & \longrightarrow & H^n(G^\cdot) \end{array}$$

un diagramme cartésien. Le faisceau P est cohérent et le morphisme $P \to N$ est un épimorphisme. L'image du morphisme composé $P \to Z^n(G^\cdot) \to Z^n(F^\cdot)$

est contenu dans $B^n(F^{\cdot})$. On a donc un diagramme

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\beta"] & \\ F^{n-1} \arrow[r, "\alpha"] & B^n(F^{\cdot}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après le lemme, il existe, quitte à passer à un hyper-recouvrement plus fin, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\eta"] & m^* P \arrow[d, "m^*\beta"] \\ m^* F^{n-1} \arrow[r, "m^*\alpha"] & m^* B^n(F^{\cdot}) \end{tikzcd}$$

où L est cohérent localement libre. Considérons alors le morphisme de complexes :

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & m^* G^{n-2} \arrow[r, "\binom{d}{0}"] \arrow[d, "m^* u^{n-2}"] & m^* G^{n-1} \oplus L \arrow[r, "(d,\, m^*\varepsilon\circ\gamma)"] \arrow[d, "(m^* u^{n-1},\, \eta)"] & m^* G^n \arrow[r] \arrow[d, "m^* u^n"] & m^* G^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "m^* u^{n+1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & m^* F^{n-2} \arrow[r] & m^* F^{n-1} \arrow[r] & m^* F^n \arrow[r] & m^* F^{n-1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Ce morphisme induit des isomorphismes de niveau r sur la cohomologie en degré $p \geqq n$. On peut donc, pour démontrer la proposition, supposer que le morphisme u possède les propriétés $(a)_{n-1}$ et $(b)_{n-1}$. D'après le lemme, il existe, quitte à passer à un hyper-recouvrement plus fin, un diagramme :

$$L' \xrightarrow{\mu} m^* Z^{n-1}(F^{\cdot}) \longrightarrow m^* H^{n-1}(F^{\cdot})$$

tel que le morphisme composé soit un épimorphisme, et tel que L' soit cohérent localement libre. Considérons alors le morphisme de complexes :

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & m^* G^{n-2} \arrow[r, "\binom{d}{0}"] \arrow[d, "m^* u^{n-2}"] & m^* G^{n-1} \oplus L' \arrow[r, "(d,\, 0)"] \arrow[d, "(m^* u^{n-1},\, \mu)"] & m^* G^n \arrow[r] \arrow[d, "m^* u^n"] & m^* G^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "m^* u^{n+1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & m^* F^{n-2} \arrow[r] & m^* F^{n-1} \arrow[r] & m^* F^n \arrow[r] & m^* F^{n+1} \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Ce morphisme de complexes possède les propriétés $(a)_{n-1}$, $(b)_{n-1}$ et $(c)_{n-1}$.

C. Q. F. D.

Remarque. — Nous avons en fait démontré un résultat plus précis. Dans les assertions du théorème, on peut supposer que toutes les composantes des complexes $G^{\bullet}$ qu'on construit, sauf la première non nulle, sont localement libres. Cette remarque est utile pour établir la fonctorialité en X de cette cohomologie topologisée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois Marie.* SGA 4, Chap. 5, App. 2e édition. — Berlin, Springer-Verlag (*Lecture Notes in Mathematics*) (à paraître).

[2] *Institut des Hautes Études Scientifiques.* S. G. A. IV, Chap. 5. App. — Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études Scientifiques (Notes multigraphiées).

(Texte reçu le 18 juin 1971.)

Jean-Louis Verdier,
104, rue d'Assas,
75-Paris 06