

BULLETIN DE LA S. M. F.

MARGUERITE FLEXOR **Étude de certains éclatements**

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 229-239

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__229_0

© Bulletin de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE DE CERTAINS ÉCLATEMENTS

PAR

MARGUERITE FLEXOR

RÉSUMÉ. — Soient A un anneau local noethérien intègre, \mathfrak{q} un idéal de définition de A , engendré par un système de paramètres, $Z = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n)$.

Dans la première partie, on montre que \hat{A} est équidimensionnel (resp. strictement équidimensionnel) si toute composante irréductible de $Z \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } \hat{A}$ (resp. tout cycle associé), contient le sous-schéma fermé intègre ayant le diviseur exceptionnel comme espace sous-jacent.

Dans la seconde partie, on montre que, si A est hensélien, normal, $\dim A = 2$, alors $\text{Pic } Z$ s'identifie à \mathbf{Z} , le faisceau $\mathcal{O}_Z(1)$ engendrant $\text{Pic } Z$.

Introduction. — Dans tout ce qui suit, A est un anneau local noethérien intègre, $\mathfrak{m} = \text{rad } A$, $k = A/\mathfrak{m}$, $Y = \text{Spec } A$, y est le point fermé de Y , $U = Y - \{y\}$, \hat{A} est le complété de A pour la topologie \mathfrak{m} -adique, $\hat{Y} = \text{Spec } \hat{A}$, $g: \hat{Y} \rightarrow Y$.

Soient Z le schéma éclaté de Y le long de $V(\mathfrak{q})$, où \mathfrak{q} est un idéal de définition de A , $f: Z \rightarrow Y$ le morphisme projectif birationnel canonique, $\hat{f}: \hat{Z} \rightarrow \hat{Y}$, déduit de f par le changement de base $\hat{Y} \rightarrow Y$.

On a $\hat{Z} = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n \hat{A})$, et l'isomorphisme canonique $\text{gr}_{\mathfrak{q}}(A) \simeq \text{gr}_{\mathfrak{q}\hat{A}}(\hat{A})$ montre que, si $D = \text{Proj}(\text{gr}_{\mathfrak{q}} A)$, alors :

$$g_D: \hat{Y} \times_Y D \rightarrow D$$

est un isomorphisme, ce qui permet d'identifier D à un sous-schéma fermé de \hat{Z} . Autrement dit, on a un isomorphisme entre les diviseurs exceptionnels de Z et \hat{Z} .

Dans la première partie, nous donnerons quelques propriétés de ces éclatements, puis nous verrons que, dans le cas où \mathfrak{q} est engendré par un

système de paramètres, certaines propriétés de X se caractérisent par des conditions de « finitude » sur Z .

Enfin, dans la dernière partie, nous précisons la structure des Z -schémas finis intègres et birationnels lorsque A est normal, et nous regarderons le cas $\dim A = 2$, A hensélien.

1. Cas général.

Explicitons la situation. Soit x_1, \dots, x_n , un système de générateurs de q . Le Y -schéma Z est recouvert par les ouverts affines

$$D_+(x_i) = \text{Spec}(A[x_1/x_i, \dots, x_n/x_i]).$$

Comme f est propre, et est un isomorphisme sur U , pour tout point fermé y' de U , si Z' est l'adhérence schématique de y' dans Z , $Z' \cap D \neq \emptyset$.

De même, pour tout point $x' \in g^{-1}(U)$, si Z'' est l'adhérence schématique de x' dans \hat{Z} , on a $Z'' \cap D \neq \emptyset$.

PROPOSITION 1.1. — *Si l'ensemble des points, où Y est de Cohen-Macaulay (resp. où Y vérifie S_k) est ouvert, il en est de même pour Z .*

En effet, notons U_Y (resp. U_Z, U_D) l'ensemble des points de Y (resp. Z, D), où Y est de Cohen-Macaulay. Comme $Z \xrightarrow{f^{-1}} U \rightarrow U$ est un isomorphisme, $V_Y = U_Y \cap U$ est isomorphe à un ouvert de Z , et on a $U_Z = V_Y \cup U_D$ puisque D est un diviseur. Comme D est localement immergeable dans un schéma régulier, U_D est ouvert dans D . Donc U_Z est constructible. Comme il est stable par généralisation, U_Z est ouvert.

Il en est de même, pour la propriété S_k , $k \geq 0$.

PROPOSITION 1.2. — *Si D vérifie S_k , pour $k \geq 1$ (resp. est de Cohen-Macaulay), alors il en est de même pour U et $g^{-1}(U)$.*

Soit r un point de D , il existe un $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\mathcal{O}_{D,r} \simeq \mathcal{O}_{\hat{Z},r}/x_i \mathcal{O}_{\hat{Z},r}.$$

Donc, comme $\mathcal{O}_{\hat{Z},r}$ est caténaire, si $\mathcal{O}_{D,r}$ vérifie S_k , $\mathcal{O}_{\hat{Z},r}$ le vérifie aussi (resp. si $\mathcal{O}_{D,r}$ est de Cohen-Macaulay). D'où la proposition, compte tenu des remarques faites au début de ce paragraphe.

COROLLAIRE. — *Supposons $\dim A = 3$, et A normal, alors l'ensemble des points, où Z est de Cohen-Macaulay, est ouvert.*

2. Cas où \mathfrak{q} est engendré par un système de paramètres.

Dans ce cas, D est irréductible, $Z_0 = f^{-1}(y) = D_{\text{réd}}$ est isomorphe à \mathbf{P}_k^{n-1} , où $n = \dim A$, c'est-à-dire si $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ est le système de paramètres engendrant \mathfrak{q} , et si on pose $B_i = A[x_1/x_i, \dots, x_n/x_i]$, les images des éléments x_j/x_i dans $B_i/\mathfrak{m}B_i$ sont algébriquement indépendants sur k .

Notons W le normalisé de Z , $h : W \rightarrow Z$ le morphisme canonique associé,

$$D' = h^{-1}(D), \quad T = \{z \in D, \dim \mathcal{O}_{Z, z} \geq 2\}, \\ T' = \{z' \in D', \dim \mathcal{O}_{W, z'} \geq 2\}.$$

On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est universellement caténaire;
- (ii) Soit Z_j une composante irréductible de \hat{Z} , alors $\text{codim}(D \cap Z_j, \hat{Z}) = 1$, ou encore $Z \subset Z_j$;
- (iii) $g^{-1}(T) = T'$;
- (iv) pour toute composante irréductible Z_i de \hat{Z} , on a

$$\text{codim}(Z_i \cap T, \hat{Z}) \geq 2.$$

Nous ferons précéder la démonstration de cette proposition de quelques préliminaires :

(a) T est une partie stable par spécialisation, et on peut définir la \mathcal{O}_Z -algèbre $\mathcal{X}_{Z/T}^0(\mathcal{O}_Z)$ (cf. [4], IV, 5.9). Alors (iv) est équivalente à :

(iv bis) $\mathcal{X}_{Z/T}^0(\mathcal{O}_Z)$ est une \mathcal{O}_Z -algèbre entière (cf. [2], prop 1.1, et dans la démonstration de la proposition 2, qui suit, cette équivalence se voit aisément).

(b) Soit $K = \text{Frac}(A)$, et posons

$$\hat{Z}_K = \hat{Z} \times_Y \text{Spec}(K), \quad \hat{Y}_K = \hat{Y} \times_Y K,$$

de sorte que $\hat{Z}_K \simeq \hat{Y}_K$.

Soit z un point de \hat{Y}_K , et soit $S = \hat{A}/\mathfrak{m}_z$, où \mathfrak{m}_z est l'idéal premier associé à z . Notons Z' l'adhérence schématique de z dans \hat{Z} , d'où $Z' = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n \hat{A}/\mathfrak{m}_z \mathfrak{q}^n \hat{A})$. Le schéma Z' est recouvert par les ouverts affines $V_i = \text{Spec } S_i$, où $S_i = S[x_1/x_i, \dots, x_n/x_i]$ [ici $A \subset S$ et, par suite, $K \subset \text{Frac}(S)$]. Soient $D_{\hat{Z}}^+(x_i) = D_Z^+(x_i) \times_Y \hat{Y}$ les ouverts affines recou-

vrant \hat{Z} , et soient B_i les anneaux qui leur correspondent. D'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & \hat{A} & \xrightarrow{\varphi} & S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B_i & \longrightarrow & B'_i & \xrightarrow{\varphi_i} & S_i \end{array}$$

Donc $S_i = B_i \otimes_{\hat{A}} S = B_i \otimes_A S$, φ et φ_i sont surjectifs. Soit p_i le noyau de φ_i , il correspond au point z dans $D_{\hat{Z}}^+(x_i) \cap \hat{Z}_K$.

Rappelons que $Z' \cap D \neq \emptyset$.

LEMME 2.2. — *Pour tout point fermé ξ de $Z' \cap D$, on a $\dim \mathcal{O}_{Z', \xi} = \dim S$.*

Soit i un indice tel que $\xi \in \text{Spec } S_i$. Le morphisme $S \rightarrow S_i$ est birationnel, et S est universellement caténaire. La formule des dimensions donne :

$$\dim \mathcal{O}_{Z', \xi} + \deg \text{tr}_k k(\xi) = \dim S.$$

Comme $Z' \cap D$ est un sous-schéma fermé de D , ξ est un point fermé de D , et comme D_{red} est isomorphe à \mathbf{P}_k^{n-1} , $k(\xi)$ est algébrique sur k , d'où le lemme.

Revenons à la *démonstration de la proposition*.

(i) \Leftrightarrow (ii). — Soit Z_j une composante irréductible de \hat{Z} , et soit z son point générique, qui est aussi point générique d'une composante irréductible de \hat{Y} . Posons comme précédemment $S = \hat{A}/\mathfrak{m}_z$, où \mathfrak{m}_z est l'idéal premier associé à z dans \hat{Y} . Si A est universellement caténaire, \hat{A} est équidimensionnel (cf. [3]), et on a $\dim S = n$. D'après le lemme 2.2, pour tout point fermé ξ de $Z_j \cap D$, on a, en posant $R = \mathcal{O}_{Z_j, \xi}$, $\dim R = n$. Soit i un indice tel que $\mathfrak{q} R = x_i R$. Pour un certain entier $e > 0$, on a $\mathfrak{m}^e R \subset x_i R$, d'où $\dim R/\mathfrak{m} R = n - 1$. Comme la flèche $\mathcal{O}_{Z, \xi} \rightarrow R$ est surjective, $\mathcal{O}_{Z_0, \xi} \rightarrow R/\mathfrak{m} R$ l'est aussi. Or $\mathcal{O}_{Z_0, \xi}$ est intègre, de dimension $n - 1$, puisque ξ est un point fermé de Z_0 , d'où $R/\mathfrak{m} R \simeq \mathcal{O}_{Z_0, \xi}$, d'où (ii). De plus, la réciproque se voit aisément à partir de la démonstration précédente et du fait que $\hat{Y}_K \simeq \hat{Z}_K$.

(i) \Rightarrow (iii). — Ceci se vérifie localement sur chacun des

$$D^+(x_i) = \text{Spec}(B_i),$$

où ceci est bien connu, B_i étant universellement caténaire si A l'est.

(iii) \Rightarrow (ii). — Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existerait une composante irréductible Z_j de \hat{Z} telle que $\text{codim}(D \cap Z_j, \hat{Z}) \geq 2$.

Soit ξ un point générique d'une composante irréductible de $D \cap Z_j$. Comme D est un diviseur, on a

$$\text{codim}(\{\overline{\xi}\} \cap Z_j, Z_j) = 1.$$

Posons $R = \mathcal{O}_{Z, \xi}$, $R' = \mathcal{O}_{Z, \xi}$. On a $\dim R' = \dim R \geq 2$ et le point générique z de Z_j est isolé dans $\text{Spec } R'$. En vertu du lemme cité ci-dessous, ceci est impossible dès que R est géométriquement unibranche. Nous allons voir que l'hypothèse (iii) nous permet de nous ramener à ce cas là.

En effet, soit R_1 une R -algèbre finie telle que si C est la clôture intégrale de R , le morphisme $\text{Spec } C \rightarrow \text{Spec } R_1$ soit radiciel (cf. [4], 23.2.5). Comme $\dim R \geq 2$, l'hypothèse montre que tous les points fermés de $\text{Spec } R_1$ sont de codimension ≥ 2 . Soit η un tel point. Posons $R'_1 = R_1 \otimes_R R'$ on a

$$R'_1 \otimes_{R_1} K \simeq R' \otimes_R K \quad \text{et} \quad z \in \text{Spec } R' \otimes_R K.$$

Soit z' l'unique point de $\text{Spec } R'_1$ au-dessus de z , on a $\dim \mathcal{O}_{z'} = 0$. Regardons la fibre $\psi^{-1}(\eta)$, où $\psi : \text{Spec } R'_1 \rightarrow \text{Spec } R_1$. Comme R'_1 est entier sur R' , tout point de $\psi^{-1}(\eta)$ est au-dessus de ξ , donc fermé, et $\psi^{-1}(\eta)$ est fini. Soit η' un point de $\psi^{-1}(\eta) \cap \overline{\{z'\}}$. On a $\dim \mathcal{O}_{\eta'} = \dim \mathcal{O}_{\eta} \geq 2$. De plus, on a encore

$$\text{codim}(\{\overline{z'}\} \cap \overline{\{\eta'\}}, \overline{\{z'\}}) = 1,$$

c'est-à-dire z' est encore isolé dans $\text{Spec } \mathcal{O}_{\eta'} - \{\eta'\}$.

LEMME 2.3. (cf. [4], IV, 18.9.7.7). — Soit R un anneau local géométriquement unibranche de dimension ≥ 2 . Soit $R' \rightarrow R$ un morphisme fidèlement plat tel que $\dim R' = \dim R$. En posant $U = \text{Spec } R - \{\text{rad } R\}$ et $f : \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$, alors $U' = f^{-1}(U)$ est connexe.

(iii) \Leftrightarrow (iv bis). — Ceci est local, il suffit de le vérifier sur chacun des ouverts affines $D^+(x_i)$.

Notons T_i, T'_i, W_i, g_i , les restrictions de T, T', W, g à $D^+(x_i)$.

Comme T_i est une partie stable par spécialisation, on peut réaliser $D^+(x_i) - T_i$ comme intersection d'une famille filtrante décroissante d'ouverts $(V_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, et de plus, on a

$$\partial \mathcal{C}_{D^+(x_i)/T_i}(\mathcal{O}_{D^+(x_i)}) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \alpha \in \Lambda}} (i_\alpha)_* (\mathcal{O}_{D^+(x_i)}|_{V_\alpha}),$$

où i_α est l'injection canonique $V_\alpha \subset D^+(x_i)$. D'autre part,

$$g^{-1}(D^+(x_i) - T_i) = W_i - g_i^{-1}(T_i) = \cap_{\alpha} g_i^{-1}(V_\alpha),$$

et l'assertion résulte de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — Soient A un anneau local noethérien intègre, $Y = \text{Spec } A$, $Y' = \text{Spec } A'$ le normalisé de Y , $g : Y' \rightarrow Y$, U un ouvert

non vide de Y . Alors $A(U)$ est entier sur A si, et seulement si, $U' = g^{-1}(U)$ contient tous les points de codimension inférieure ou égale à 1 de Y' .

La suffisance résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A(U) & \longrightarrow & A'(U') \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

et du fait que A' est un anneau de Krull. En effet, si U' contient tous les points de codimension 1, on a $A' = A'(U')$.

Inversement, nous allons le montrer en supposant seulement $Y - U$ stable par spécialisation. Supposons qu'il existe $y \in Y - U$, et $y' \in g^{-1}(y)$ tel que $\dim \mathcal{O}_{y'} = 1$. Faisons le changement de base $\text{Spec } \mathcal{O}_y \rightarrow Y$. Comme $i_*(\mathcal{O}_U)$ est une \mathcal{O}_Y -algèbre quasi cohérente et entière, il en est de même de

$$i_*(\mathcal{O}_U) \otimes \mathcal{O}_y = j_*(V), \quad \text{où } V = U \cap \text{Spec } \mathcal{O}_y$$

et j l'injection canonique $V \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_y$.

On est donc ramené au cas où Y est local de point fermé y , et U un sous-ensemble de $Y - \{y\}$ tel que $Y - U$ soit stable par spécialisation. Soit $Y_0 = \text{Spec } A_0$ un Y -schéma affine intègre fini birationnel tel que, si $g_0 : Y_0 \rightarrow Y$ est le morphisme canonique, il existe $y_0 \in g_0^{-1}(y)$ avec $\dim \mathcal{O}_{y_0} = 1$.

Posons

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \text{Spec } \hat{A}, & \hat{Y}_0 &= Y_0 \times_Y \hat{Y} = \text{Spec } \hat{A}_0, \\ f_0 : \hat{Y}_0 &\rightarrow Y_0, & y'_0 &= f_0^{-1}(y_0), \end{aligned}$$

$\text{Spec } \mathcal{O}_{\hat{Y}_0, y'_0}$ est donc une composante connexe de dimension 1 de \hat{Y}_0 . Si z_0 est un point maximal de cette composante, nécessairement $\dim \overline{\{z_0\}} = 1$.

Soit z la trace de z_0 dans \hat{Y} . Comme \hat{Y}_0 est entier sur \hat{Y} , $\dim \overline{\{z\}} = 1$ et comme $Y_0 \rightarrow Y$ est birationnel, z est un point maximal de \hat{Y} , de dimension 1.

Soient \mathfrak{p} l'idéal premier associé à z , et $B = \hat{A}_{\text{red}}$. On a une suite exacte de B -modules :

$$0 \rightarrow \hat{A}/\mathfrak{p} \rightarrow B.$$

Soit V l'image réciproque de U par le morphisme $f : \hat{Y} \rightarrow Y$. Comme f est fidèlement plat, on a

$$\hat{A}(V) = A(U) \otimes_A \hat{A}$$

et la suite exacte :

$$0 \rightarrow \hat{A}/\mathfrak{p}(V) \rightarrow B(V) \simeq (\hat{A}(V))_{\text{réd.}}$$

Comme $\hat{A}(V)$ est entier sur \hat{A} , $B(V)$ l'est sur B , et par suite est fini sur B . Il en est de même du sous-B-module $(\hat{A}/\mathfrak{p})(V)$. D'où une contradiction; si $\dim \hat{A}/\mathfrak{p} = 1$ et $V \neq \text{Spec } \hat{A}/\mathfrak{p}$.

PROPOSITION 2.1 bis. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \hat{A} est strictement équidimensionnel;
- (ii) Soit Z_j un cycle associé à $\mathcal{O}_{\hat{Z}}$, on a

$$\text{codim}(D \cap Z_j, \hat{Z}) = 1;$$

- (iii) $\mathfrak{H}_{Z/T}(\mathcal{O}_Z)$ est une \mathcal{O}_Z -algèbre finie.

L'équivalence de (ii) et (iii) résulte de ([4], 5.6.10). Dans les cas (i) ou (ii), \hat{Z} est sans cycle associé immergé et (i) \Leftrightarrow (ii) résulte du (i) \Leftrightarrow (ii) dans la proposition 2.1.

PROPOSITION 2.5. — *Soit $A \rightarrow R$ un homomorphisme plat d'anneaux locaux noethériens intègres tels que $(\text{rad } A)R = \text{rad } R$ et tels que $k(A)$ et $k(R)$ désignent les corps résiduels respectifs de A et R , $k(R)$ est une extension algébrique de $k(A)$. Alors \hat{A} est équidimensionnel (resp. strictement) si, et seulement si, \hat{R} l'est.*

En effet, si (x_1, \dots, x_n) est un système de paramètres de A , (x_1, \dots, x_n) reste un système de paramètres dans R . Si on désigne par Z_A, Z_R des éclatés respectifs de A et R le long de ce système de paramètres, on a

$$Z_R = Z_A \otimes_{\text{Spec } A} \text{Spec } R,$$

le morphisme $A \rightarrow R$ étant fidèlement plat. Notons D_A, T_A (resp. D_R, T_R) le diviseur exceptionnel et la partie stable par spécialisation de Z_A (resp. Z_R) qui lui sont attachées. Il est clair que D_R est l'image réciproque de D_A . Comme $(D_A)_{\text{réd}} \simeq \mathbf{P}_{k(A)}^{n-1}$ et $(D_R)_{\text{réd}} \simeq \mathbf{P}_{k(R)}^{n-1}$, on voit que $T_R \rightarrow T_A$ est une bijection. Comme $A \rightarrow R$ est plat, on a

$$\mathfrak{H}_{Z_R/T_R}(\mathcal{O}_{Z_R}) \simeq \mathfrak{H}_{Z_A/T_A}(\mathcal{O}_{Z_A}) \otimes_{\mathcal{O}_A} \mathcal{O}_R,$$

et on en déduit la proposition aisément.

COROLLAIRE. — *Si A est géométriquement unibranche, alors \hat{A} est strictement équidimensionnel si, et seulement si, le complété du hensélisé strict de A l'est.*

3. A est normal.

(a) D'après le théorème de connexion de Zariski, on a $f_*(\mathcal{O}_{Z'}) \simeq \mathcal{O}_Y$, et il en est de même pour tout Z -schéma fini Z' intègre, birationnel, c'est-à-dire plus précisément si g est le morphisme structural $Z' \rightarrow Z$, $f' = g \circ f$, alors $f'_*(\mathcal{O}_{Z'}) \simeq \mathcal{O}_Y$.

THÉORÈME 3.1. — *Il existe un entier $d > 0$ tel que $Z' = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n)$, où $\mathfrak{q}' = f'_*(\mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'})$ est un idéal de définition de A . Si, de plus, $g^*(\mathfrak{q} \mathcal{O}_Z)$ est très ample alors on peut choisir $d = 1$,*

$$\mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'} = \mathfrak{q}' \mathcal{O}_{Z'} \quad \text{et} \quad \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}' = f'_*(\mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'}).$$

Remarques.

1° En appliquant ceci à $Z' = Z$, on voit que $Z = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n)$, avec $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$ et $\mathfrak{q}' = f'_*(\mathfrak{q}' \mathcal{O}_Z)$. Autrement dit \mathfrak{q}' est contracté pour f .

2° On retrouve le fait que si, pour tout tel morphisme, $Z' \rightarrow Z$, et si, pour tout $n > 0$, on a $\mathfrak{q}^n = f'_*(\mathfrak{q}^n \mathcal{O}_{Z'})$ (c'est-à-dire les puissances n -ièmes de \mathfrak{q} sont « complètes »), alors Z est normal (cf. [6], Appendice du tome 2, et [5], chap. II).

En effet, tout tel schéma Z' est alors de la forme $\text{Proj}(\bigoplus_n (\mathfrak{q}^d)^n) \simeq Z$ (cf. [4], 3.1.8, chap. II).

Démonstration du théorème 3.1. — Comme Z' est intègre,

$$g^*(\mathcal{O}_Z(1)) = g^*(\mathfrak{q} \mathcal{O}_Z) = \mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'},$$

et $\mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'}$ est un $\mathcal{O}_{Z'}$ -module inversible ample pour f' . Il existe donc un entier $d > 0$ tel que $(\mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'})^d = \mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'}$ soit très ample pour f' . Comme f' est propre, et que $\mathfrak{q}' = f'_*(\mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'})$ est un \mathcal{O}_Y -module de type fini, f' est projectif, et on a un Y -isomorphisme $r : Z' \simeq P = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n)$ tel que $r^*(\mathcal{O}_P(1)) \simeq \mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'}$ (cf. [4], III, 2.3.4.1). Donc $\mathfrak{q}' \mathcal{O}_{Z'} = \mathfrak{q}^d \mathcal{O}_{Z'}$.

Comme $\mathfrak{q}' \mathcal{O}_{Z'} \subset \mathcal{O}_{Z'}$, on a $\mathfrak{q}' \subset f'_*(\mathcal{O}_{Z'}) = A$. Montrons que c'est un idéal de définition de A . Comme Y est normal, g est un isomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel. Comme f est un isomorphisme en dehors du point fermé, il en est de même de f' . Donc $V(\mathfrak{q}') = \{y\}$. Il est clair que si $\mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'}$ est très ample, on peut choisir $d = 1$ et $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}'$. En effet, on a les flèches :

$$\mathfrak{q} \rightarrow f_* f^*(\mathfrak{q}) \rightarrow f_*(\mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'}) \rightarrow f_*(g_*(\mathfrak{q} \mathcal{O}_{Z'})) = \mathfrak{q}'$$

qui sont des isomorphismes en dehors du point fermé. Comme A est intègre, la flèche composée $\mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}'$ est injective.

COROLLAIRE. — Si l'image réciproque du faisceau inversible canonique $\mathcal{O}_Z(1) = \mathfrak{q} \mathcal{O}_Z$ reste très ample pour tout morphisme fini birationnel et intègre, alors le normalisé de Z est fini sur Z .

Remarque. — D'après LIPMAN [5], l'hypothèse du corollaire est satisfaite si « pour tout tel schéma Z' , on a

$$H^1(Z', \mathcal{O}_{Z'}) = H^2(Z', J) = 0$$

pour tout idéal J de $\mathcal{O}_{Z'}$ ».

(b) Cas où $\dim A = 2$ et où \mathfrak{q} est engendré par un système de paramètres. — Rappelons pour mémoire les résultats suivants en dimension 2, si A est hensélien, pas nécessairement normal, on a (cf. [1]), pour tout idéal de définition \mathfrak{q} de A ,

$$\text{Pic } Z \simeq \text{Pic } \hat{Z}.$$

En outre, il existe un entier $n > 0$ tel que $\text{Pic } Z \simeq \text{Pic } Z_n$, où

$$Z_n = Z \times_Y \text{Spec } (A/\mathfrak{m}^n).$$

Si, de plus, \mathfrak{q} est engendré par un système de paramètres, $Z_0 \simeq \mathbf{P}_k^{n-1}$, où $n = \dim A$ et $k = A/\mathfrak{m}$.

Comme $\text{Pic } (\mathbf{P}_k^{n-1}) \simeq \mathbf{Z}$ [le faisceau inversible $\mathcal{O}_P(1)$ engendrant $\text{Pic } \mathbf{P}_k^{n-1}$], on voit que $\text{Pic } Z_0 \simeq \mathbf{Z}$.

Nous allons voir que si, de plus, A est normal, $\text{Pic } Z \simeq \text{Pic } Z_0$, ce qui donne $\text{Pic } Z \simeq \mathbf{Z}$ [et $\text{Pic } (Z)$ est même engendré par $\mathcal{O}_Z(1)$].

LEMME 3.2. — $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$.

Soit (b, c) le système de paramètres engendrant \mathfrak{q} , de sorte que Z est recouvert par les ouverts affines

$$U_b = \text{Spec } A [c/b], \quad U_c = \text{Spec } A [b/c].$$

Les cochaînes de ce recouvrement sont des éléments de

$$\Gamma(U_b \cap U_c, \mathcal{O}_Z) = A [b/c, c/b].$$

Comme on a les relations, pour $t_{ij} \in A$,

$$\sum_{i,j} t_{ij} (b/c)^i (c/b)^j = \sum_{j \leq i} t_{ij} (c/b)^{i-j} - \sum_{j > i} (-t_{ij}) (b/c)^{j-i},$$

on voit que toute cochaîne est un cobord.

PROPOSITION 3.3. — Z vérifie S_2 :

Comme \hat{A} est strictement équidimensionnel, $\mathfrak{H}_{Z/T}(\mathcal{O}_Z)$ est une \mathcal{O}_Z -algèbre finie (cf. prop. 2.1 bis du § 2). Il s'agit de voir que tout Z -schéma fini intègre Z' , tel que $Z' \xrightarrow{s} Z$ soit un isomorphisme en dehors de T , est isomorphe à Z . Soit K le conoyau de $\mathcal{O}_Z \rightarrow g_*(\mathcal{O}_{Z'})$. Comme $\text{codim } T = 2$, $\dim K = 0$. La suite exacte :

$$0 \rightarrow f_*(\mathcal{O}_Z) \xrightarrow{\sim} f'_*(\mathcal{O}_{Z'}) \rightarrow f_*(K) \rightarrow R^1 f_*(\mathcal{O}_Z)$$

montre que $f_*(K) = 0$, car Y étant affine le lemme 3.2 montre que $R^1 f_*(\mathcal{O}_Z) = 0$. Donc $K = 0$.

PROPOSITION 3.4. — $\text{Pic } Z_n \simeq \text{Pic } D \simeq \text{Pic } Z_0$, pour tout n , et ils sont isomorphes à \mathbf{Z} [à savoir engendrés respectivement par les faisceaux $\mathcal{O}_{Z_n}(1)$, $\mathcal{O}_D(1)$, $\mathcal{O}_{Z_0}(1)$].

Notons $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_Z/\mathfrak{m}^n \mathcal{O}_Z$, et regardons les idéaux nilpotents

$$I = \mathfrak{m} \mathcal{O}_Z / \mathfrak{q} \mathcal{O}_Z, \quad I_n = \mathfrak{m} \mathcal{O}_Z / \mathfrak{m}^n \mathcal{O}_Z$$

respectivement de \mathcal{O}_D et \mathcal{O}_n . Le raisonnement que nous allons faire pour le couple (I, \mathcal{O}_D) est encore valable pour le couple (I_n, \mathcal{O}_n) . Regardons la suite exacte :

$$0 \rightarrow I \rightarrow \mathcal{O}_D^* \rightarrow \mathcal{O}_{Z_0}^* \rightarrow 1.$$

D'où la suite de cohomologie :

$$H^1(I) \rightarrow \text{Pic}(D) \rightarrow \text{Pic}(Z_0) \rightarrow H^2(I).$$

Comme $\text{Supp } I \subseteq D$, $H^2(I) = 0$. Regardons $H^1(I)$. On a une suite exacte :

$$H^1(\mathfrak{m} \mathcal{O}_Z) \rightarrow H^1(I) \rightarrow H^2(\mathfrak{q} \mathcal{O}_Z).$$

Comme $Z \rightarrow Y$ est propre, à fibres de dimension inférieure ou égale à 1, $H^2(\mathfrak{q} \mathcal{O}_Z) = 0$. D'autre part, comme Z_0 s'identifie à \mathbf{P}_k^1 , on a

$$\Gamma(\mathcal{O}_Z/\mathfrak{m} \mathcal{O}_Z) \simeq k.$$

Comme $\Gamma(\mathcal{O}_Z) = A$, on voit que $\Gamma(\mathfrak{m} \mathcal{O}_Z) = \mathfrak{m}$ et $0 \rightarrow H^1(\mathfrak{m} \mathcal{O}_Z) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_Z)$. Par suite, le lemme 3.2 montre que $H^1(\mathfrak{m} \mathcal{O}_Z) = H^1(I) = 0$ et $\text{Pic}(D) \simeq \text{Pic}(Z_0)$.

THÉORÈME 3.5. — Soient A un anneau local hensélien, intégralement clos, de dimension 2, \mathfrak{q} un idéal de définition engendré par un système de paramètres. Alors si $Z = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n)$, $Z_0 = \text{Proj}(\bigoplus \mathfrak{q}^n/\mathfrak{m} \mathfrak{q}^n)$, où $\mathfrak{m} = \text{rad } A$, on a l'isomorphisme $\text{Pic } Z \simeq \text{Pic } Z_0$, ces deux derniers s'identifiant à \mathbf{Z} [c'est-à-dire engendrés respectivement par $\mathcal{O}_Z(1)$ et $\mathcal{O}_{Z_0}(1)$].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOUTOT (Jean-François). — Groupes de Picard local d'un anneau hensélien, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, 1971, série A, p. 1248-1250.
- [2] FERRAND (D.) et RAYNAUD (M.). — Fibres formelles d'un anneau local noethérien, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 3, 1970, p. 295-311.
- [3] FLEXOR-MANGENEY (Marguerite). — Étude de l'assassin du complété, *Bull. Soc. math. France*, t. 98, 1970, p. 117-126.
- [4] GROTHENDIECK (Alexander). — *Éléments de géométrie algébrique*. Chap. II, III et IV. — Paris, Presses universitaires de France, 1961-1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).
- [5] LIPMAN (Joseph). — Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization, *Volume dédié au Professeur Zariski*, — Paris, Presses universitaires de France, 1969 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 36, p. 195-280).
- [6] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*. Vol. 2. — Princeton, D. Van Nostrand Compagny, 1960 (*The University Series in higher Mathematics*).

(Texte définitif reçu le 19 janvier 1972.)

M^{me} Marguerite FLEXOR,
180, avenue de Choisy,
75013 Paris.
