BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD RAUZY

Fonctions entières et répartition modulo 1

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 409-415

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__409_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 409-415.

FONCTIONS ENTIÈRES ET RÉPARTITION MODULO 1

PAR

GÉRARD RAUZY

Selon un résultat de PÓLYA (Über ganze ganzwertige Funktionen *Nach. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 1920, p. 1-10), si f est une fonction entière telle qu'il existe deux nombres réels α et C vérifiant les inégalités :

$$\alpha < \log 2 \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbf{C}, \quad | f(z) \leq C\, e^{\alpha |z|},$$

alors, si $f(n)$ est un entier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f est un polynôme.

Nous nous proposons, ici, en imposant à f des conditions de croissance plus strictes, mais également des conditions de régularité sur les coefficients de son développement en série entière, d'examiner la répartition modulo 1 de la suite $f(n)$.

Le résultat essentiel est le suivant :

THÉORÈME. — *Soit f une fonction analytique de* $\mathbf{C}$ *dans* $\mathbf{C}$ *admettant le développement* :

$$f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} v_n\, (x^n/n\,!), \qquad v_n \in \mathbf{R}.$$

Supposons que :

(i) *il existe une constante C telle que, pour n assez grand,*

$$0 < | v_{n+1} | \leq C\, | v_n |^{(n+1/n-1)};$$

(ii) $| v_n |^{1/n^{2n}} \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

Alors, pour tout $\lambda \neq 0$, la suite $(\lambda\, f(n))$ est équirépartie modulo 1.

Remarque. — Le cas où f est un polynôme (où la répartition modulo 1 est donc bien connue) a été écarté en imposant l'inégalité stricte dans la condition (i).

D'autre part, ce résultat montre que, au moins pour certaines suites (u_n) assez régulières et de croissance supérieure à celle d'un polynôme [en prenant par exemple tous les coefficients v_n positifs et $u_n = f(n)$], $(\lambda\, u_n)$ est équirépartie modulo 1 pour tout $\lambda \neq 0$, ce qui n'est pas le cas, on le sait, dès que (u_n) est de croissance exponentielle.

Remarquons encore que les conditions imposées impliquent que la suite $(f(n))$ n'est pas bornée.

Démonstration. — Posant $e(x) = e^{2i\pi x}$, il suffit, en raison du critère de Weyl, de montrer que, pour tout $\lambda \neq 0$,

$$1/N \, \Sigma_{0 \leqq n < N} \, e(\lambda f(n)) \to 0.$$

Les conditions imposées à f sont manifestement vérifiées par λf, il suffit donc en fait de montrer que

$$S_N = 1/N \, \Sigma_{0 \leqq n < N} \, e(f(n)) \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to \infty.$$

Pour s assez grand, soit $M(s)$ l'entier vérifiant l'inégalité

$$(1) \qquad |v_s| \, M(s)^{s-1} \leqq 1/4 < |v_s| \, (M(s) + 1)^{s-1}.$$

Nous allons montrer que $M(s)$ tend vers l'infini et que, dès que s est assez grand, $M(s+1) > M(s)$.

Nous majorerons ensuite S_N pour $M(s) \leqq N < M(s+1)$, par une quantité $\varepsilon(s)$ qui tend vers zéro quand $s \to +\infty$, ce qui achèvera la démonstration.

Cette majoration s'effectuera au moyen du lemme suivant, qui sera démontré dans le paragraphe D :

LEMME 1. — *Soit f une fonction indéfiniment dérivable de $[0, +\infty[$ dans* **R**. *Soient s, M, N des entiers tels que $s \geqq 1$, $1 \leqq M \leqq N$. Posons*

$$\alpha = f^{(s)}(0), \qquad \beta = \sup_{0 \leqq x \leqq N} |f^{(s+1)}(x)|$$

et supposons que :

(i) $|\alpha| \, M^{s-1} \leqq 1/4$;

(ii) $\beta N \leqq |\alpha|/2$,

alors

$$|1/N \, \Sigma_{0 \leqq n < N} \, e(f(n))| \leqq 4 \, [2 \, ((2 + \log M)^{s-1}/|\alpha| \, M^s)]^{1/2^{s-1}} + \pi \, (\beta \, M^{s+1}/(s+1)\,!)$$

A. Inégalités sur $M(s)$

On a, d'après (1), $M(s) + 1 \geqq (4 \, |v^s|)^{-1/(s-1)}$; comme $|v_s|^{1/s2^s} \to 0$, *a fortiori* $|v_s|^{1/(s-1)} \to 0$, donc $M(s) \to \infty$. En particulier, dès que s est assez grand, $M(s) \geqq 1$, et on a donc par exemple :

$$2 \, M(s) \geqq (4 \, |v_s|)^{-1/(s-1)}.$$

Appliquant de nouveau l'hypothèse (ii) du théorème, on en déduit que

$$M(s)^{1/2^s} \to +\infty. \tag{2}$$

En particulier, $(M(s)/M(s)+1)^{1/(s-1)} \to 1$, et on a donc, dès que s est assez grand, la double inégalité

$$1/8 \leqq |v_s| M(s)^{s-1} \leqq 1/4. \tag{3}$$

D'autre part, l'hypothèse (i) du théorème entraîne que, dès que s est assez grand, on a

$$|v_{s+1}| \leqq C_0 |v_s|^{(s+1)/(s-1)}; \tag{4}$$

on en tire alors

$$M(s)^{s+1} \leqq (4|v_s|)^{-(s+1)/(s-1)} \leqq 4^{-(s+1)/(s-1)} C_0 |v_{s+1}|^{-1},$$

soit encore, en posant $C_1 = 2C_0$ et utilisant l'inégalité (3),

$$M(s)^{s+1} \leqq C_1 M(s+1)^s. \tag{5}$$

En particulier, $M(s+1)/M(s) \leqq (M(s)/C_1)^{1/s}$ qui tend vers l'infini d'après (2), donc, dès que s est assez grand :

$$M(s+1) > M(s). \tag{6}$$

B. **Vérification des conditions d'application du lemme 1**

On applique le lemme 1 en prenant $M = M(s)$, $M(s) \leqq N < M(s+1)$, on a donc

$$\alpha = v_s$$

et

$$\beta \leqq \sup_{0 \leqq x \leqq M(s+1)} |f^{(s+1)}(x)|.$$

Mais, $f^{(s+1)}(x) = \Sigma_{k=0}^{\infty} v_{s+1+k} x^k/k!$, d'où

$$\beta \leqq \Sigma_{s=0}^{\infty} |v_{s+1+k}| \mathrm{M}(s+1)^k/k!,$$

d'où

$$\beta M(s+1)^s \leqq \Sigma_{k=0}^{\infty} (|v_{s+1+k}| M(s+1)^{s+k})/k!;$$

or, d'après (6), $M(s+1)^{s+k} \leqq M(s+1+k)^{s+k}$, et d'après (3) :

$$|v_{s+1+k}| M(s+1)^{s+k} \leqq |v_{s+1+k}| M(s+1+k)^{s+k} \leqq 1/4;$$

d'où finalement :

$$\beta M(s+1)^s \leqq e/4 \leqq 1.$$

Utilisant (3) et (5), on en tire alors les deux inégalités

$$(7) \qquad \beta\, M(s)^{s+1} \leqq C_1 \qquad \text{et} \qquad \beta \leqq 8\,|\,v_{s+1}\,|.$$

Pour appliquer le lemme, il suffit de montrer que $\beta N \leqq |\,\alpha\,|/2$, l'inégalité $|\,\alpha\,|\,M^{s-1} \leqq 1/4$ étant réalisée par définition de α et M.

Or on a, d'après (7), $\beta N \leqq \beta M(s+1) \leqq 8\,|\,v_{s+1}\,|\,M(s+1)$, mais d'après (3), $M(s+1) \leqq |\,v_{s+1}\,|^{-1/s}$, d'où

$$\beta N \leqq 8\,|\,v_{s+1}\,|^{(s-1)/s} \leqq 8 \times C_0^{(s-1)/s}\,|\,v_s\,|^{(s+1)/s},$$

La quantité $8 \times C_0^{(s-1)/s} \times |\,v_s\,|^{1/s}$ tend vers zéro quand $s \to +\infty$, en vertu de l'hypothèse (ii) du thèorème. Elle est donc inférieure à 1/2 dès que s est assez grand, et on a bien alors

$$\beta N \leqq |\,\alpha\,|/2.$$

C. **Application du lemme** 1

On a $|\,S_N\,| \leqq \varepsilon_1(s) + \varepsilon_2(s)$, où

$$\varepsilon_1(s) = 4\,[2\,((2+\log M(s))^{s-1}/|\,v_s\,|\,M(s)^s)]^{1/2^{s-1}}$$
$$\varepsilon_2(s) = \pi\,(\beta\, M(s)^{s+1}/(s+1)\,!).$$

En vertu de (7), $\varepsilon_2(s) \leqq \pi\; C_1/(s+1)\,!$, donc tend vers zéro quand $s \to +\infty$. Il reste donc à montrer que $\varepsilon_1(s)$ tend vers zéro.

C'est ici qu'intervient réellement la condition (ii) des hypothèses : jusqu'à maintenant les mêmes résultats auraient été obtenus en supposant seulement $|\,v_s\,|^{1/s} \to 0$. Comme $|\,v_s\,|^{1/s\,2^s} \to 0$, il en résulte que $M(s)^{1/2^s} \to \infty$, donc $1/2^s \log M(s) \to +\infty$ et $\log\log M(s) - s\log 2 \to +\infty$.

En particulier, dès que s est assez grand, $s \leqq \log\log M(s))/\log 2$, d'où

$$(s-1)\log\log M(s) \leqq [\log\log M(s)]^2/\log 2.$$

Comme $M(s) \to +\infty$, $\log M(s) \to +\infty$, donc $[\log\log M(s)]^2/\log M(s) \to 0$ et, par conséquent, dès que s est assez grand :

$$[2+\log M(s)]^{s-1} \leqq (2\log M(s))^{s-1} \leqq e^{(s-1)\log\log 2M(s)} \leqq \sqrt{M(s)}/16.$$

D'autre part, d'après (3), $1/(|\,v_s\,|\,M(s)^s) \leqq 8/M(s)$, d'où finalement dès que s est assez grand :

$$\varepsilon_1(s) \leqq 4\,(1/M(s))^{1/2^s}.$$

Le deuxième membre tend vers zéro quand $s \to +\infty$, ce qui achève la démonstration.

D. **Démonstration du lemme** 1

Définissons l'entier K par l'inégalité $KM \leqq N < (K+1)M$, et posons

$$M_k = kM \qquad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, K, \qquad M_{K+1} = N,$$

d'où, pour tout k,

$$M_{k+1} - M_k \leqq M.$$

On a alors

$$NS_N = \Sigma_{0 \leqq n < N}\, e(f(n)) = \Sigma_{0 \leqq k \leqq K}\, T_k,$$

où $T_k = \Sigma_{M_k \leqq n < M_{k+1}}\, e(f(n))$.

Dans chacun des intervalles $[M_k, M_{k+1})$, nous approchons f par un polynôme de degré s plus précisément :

$$f(x) = P_k(x) + R_k(x).$$

où

$$P_k(x) = \Sigma_{h=0}^{s}\, (x - M_k)^h/h!\, f^{(h)}(M_k)$$

et

$$|R_k(x)| \leqq (M_{k+1} - M_k)^{s+1}/(s+1)!\, \sup_{M_k \leqq t \leqq M_{k+1}} |f^{(s+1)}(t)|,$$

soit encore $|R_k(x)| \leqq \beta M^{s+1}/(s+1)!$

Si nous posons alors

$$V_k = \Sigma_{M_k \leqq n < M_{k+1}}\, e(P_k(n)),$$

il résulte de l'inégalité $|e(u) - 1| \leqq \pi |u|$ que

$$|NS_N - \Sigma_{0 \leqq k \leqq K}\, V_K| \leqq N(\pi\beta M^{s+1}/(s+1)!).$$

Si $V = \sup_{0 \leqq k \leqq K} |V_k|$, on en tire alors

$$N|S_N| \leqq (K+1)V + N(\pi\beta M^{s+1}/(s+1)!).$$

Mais comme $N \geqq M$, $K \geqq 1$, donc $K + 1 \leqq 2K \leqq 2(N/M)$.

Le lemme en résulte si nous pouvons montrer que

$$V \leqq 2M[2((2 + \log M)^{s-1}/|\alpha| M^s)]^{1/2^{s-1}}. \tag{8}$$

Remarquons que le coefficient du terme de plus haut degré dans le polynôme P_k est $\alpha_k/s!$, où $\alpha_k = f^{(s)}(M_k)$.

D'autre part, la formule des accroissements finis donne

$$|f^{(s)}(M_k) - f^{(s)}(0)| \leqq M_k \sup_{0 \leqq x \leqq M_k} |f^{(s+1)}(x)|,$$

d'où $|\alpha_k - \alpha| \leqq \beta N$, et en vertu de l'hypothèse (ii) du lemme, on en tire

$$|\alpha|/2 \leqq |\alpha_k| \leqq 2|\alpha|,$$

ce qui entraîne, en vertu de (i), que

$$|\alpha_k| M^{s-1} \leqq 1/2.$$

La majoration de V résulte alors immédiatement du lemme suivant :

Lemme 2. — *Soient A, B, M des entiers tels que $0 < B - A \leqq M$; soit P un polynôme de degré s, dont le coefficient du terme de plus haut degré est α/s !*

Sous la condition $|\alpha| M^{s-1} \leqq 1/2$, on a

$$|\Sigma_{A \leqq n < B}\, e(P(n))|^{2^{s-1}} \leqq (2M)^{2^{s-1}} \min(1, (2 + \log M)^{s-1}/|\alpha| M)^{s}.$$

E. **Démonstration du lemme** 2

Elle est plus ou moins classique dans l'étude du problème de Waring.

Elle se fait par récurrence sur le degré de P :

— Si $s = 1$, on a

$$|\Sigma_{A \leqq n < B}\, e(P(n))| \leqq \min(B - A, 2/|e(\alpha) - 1|),$$

et la condition $|\alpha| \leqq 1/2$ implique

$$|e(\alpha) - 1| = 2|\sin \pi\alpha| \geqq 4|\alpha|,$$

d'où le résultat.

— Si la propriété est vraie pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $s - 1$, et si P est un polynôme de degré $s > 1$, posons

$$S = \Sigma_{A \leqq n < B}\, e(P(n));$$

on a

$$|S|^2 = \Sigma_{n,m}\, e(P(n) - P(m)).$$

La somme étant étendue à tous les couples (m, n) tels que $A \leqq m < B$, $A \leqq n < B$, on peut encore écrire

$$|S|^2 = \Sigma_{|h|<M}\, T_h,$$

où $T_h = \Sigma_{m-n=h}\, e(P(m) - P(n))$, somme partielle étendue aux couples précédents dont la différence $m - n$ est égal à l'entier relatif h.

Mais T_h est une somme portant sur moins de M valeurs consécutives du polynôme $P(x + h) - P(x)$ de degré $s - 1$.

Comme le coefficient de son terme de plus haut degré est $h\alpha/(s - 1)$!, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence puisque

$$|h\alpha| M^{s-2} \leqq |\alpha| M^{s-1} \leqq 1/2;$$

et on a donc

$$| T_h |^{2^{s-2}} \leqq (2M)^{2^{s-2}} \min (1, (2 + \log M)^{s-2} / | \alpha h | M^{s-1}).$$

D'autre part, une application répétée de l'inégalité de Schwarz conduit, compte tenu du fait qu'il y a $2M - 1 < 2M$ entiers h tels que $| h | < M$, à

$$| S |^{2^{s-1}} \leqq (\Sigma_{|h|<M} | \mathrm{T}_h |^{2^{s-2}}) \times (2M)^{2^{s-2}-1}.$$

Soit encore

$$| S |^{2^{s-1}} \leqq (2M)^{2^{s-1}} \times 1/2M [\Sigma_{1 \leqq |h| < M} ((2 + \log M)^{s-2} / | \alpha h | M^{s-1}) + 1],$$

or $\Sigma_{1 \leqq h < M} 1/h \leqq 1 + \log M$ et $1 \leqq 2 ((2 + \log M)^{s-2} / | \alpha | M^{s-1})$ puisque $| \alpha | M^{s-1} \leqq 1/2$; on a donc bien

$$| S |^{2^{s-1}} \leqq (2M)^{2^{s-1}} \times (2 + \log M)^{s-1} / | \alpha | M^{s},$$

d'autre part, évidemment, $| S | \leqq M \leqq 2M$, d'où le résultat.

(Texte définitif reçu le 10 octobre 1972.)

Gérard RAUZY,
U. E. R. de Marseille-Luminy,
Mathématique-Informatique,
70, route Léon Lachamp,
13288 Marseille Cedex 2.