

# BULLETIN DE LA S. M. F.

HIROSHI UMEMURA

## **Fibrés vectoriels positifs sur une courbe elliptique**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 100 (1972), p. 431-433

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1972\\_\\_100\\_\\_431\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__431_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## FIBRÉS VECTORIELS POSITIFS SUR UNE COURBE ELLIPTIQUE

PAR

HIROSHI UMEMURA

[I. H. E. S., Bures-sur-Yvette]

RÉSUMÉ. — On montre qu'un fibré vectoriel sur une courbe elliptique est différentiellement positif si, et seulement si, il est ample au sens de HARTSHORNE.

### 1. Définition

Soient  $V$  une variété kählérienne de dimension  $n$ , et  $E$  un fibré vectoriel de rang  $r$  sur  $V$ .  $E$  est (différentiellement) positif (resp. non négatif), s'il existe une métrique hermitienne  $h$  sur  $E$  telle que la forme quadratique hermitienne en deux variables  $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^r)$ ,  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{1 \leq \rho, \tau, \sigma \leq r, 1 \leq i, j \leq n} h_{\rho\tau} \Theta_{\sigma ij}^{\bar{\tau}} \xi^{\rho} \bar{\xi}^{\sigma} \eta^i \bar{\eta}^j$$

soit définie positive (resp. non négative), où  $(\Theta_{\sigma}^{\bar{\tau}})_{1 \leq \tau, \sigma \leq r}$  est la courbure de la connection  $h^{-1} dh$  (voir ANDREOTTI et GRAUERT [1], et GRIFFITHS [3]).

### 2. Propriétés

- (i) Un fibré vectoriel quotient d'un fibré vectoriel positif ou non négatif l'est aussi.
- (ii) La somme directe de deux fibrés vectoriels positifs est positive.
- (iii) Soient  $E$  un fibré vectoriel positif, et  $E'$  un fibré vectoriel non négatif. Alors le produit tensoriel  $E \otimes E'$  est positif.
- (iv) Un fibré vectoriel positif est ample (au sens de HARTSHORNE [4]).
- (v) Un fibré de rang 1 est positif si et seulement s'il est ample.
- (vi) Soient  $V \xrightarrow{\pi} V'$  un revêtement fini non ramifié d'une variété kählérienne  $V'$ , et  $E$  un fibré vectoriel positif sur  $V$ . Alors l'image directe  $\pi_* E$  est positive.

Pour la démonstration de (i), (ii), (iii) et (iv), voir GRIFFITHS [3]. (v) est bien connu. (vi) est une conséquence de (ii).

### 3. Équivalence des conditions

Soient  $C$  une courbe elliptique sur  $\mathbf{C}$ , et  $E$  un fibré vectoriel sur  $C$ .

PROPOSITION. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a)  $E$  est positif;
- (b)  $E$  est ample (au sens de HARTSHORNE [4]).

*Démonstration.* — L'implication (a)  $\Rightarrow$  (b) est générale (2 (iv)). Nous allons démontrer (b)  $\Rightarrow$  (a). On peut supposer que  $E$  est indécomposable et de degré positif. On utilise la classification d'АТИЯАН [2].

LEMME. — *Supposons  $E \in E(r, d)$ , avec  $d > r$ . Alors  $E$  est non négatif.*

*Preuve du lemme.* — Soit  $P$  un point de  $C$ . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-P) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow 0.$$

En tensorisant avec  $E$ , on a

$$0 \rightarrow E \otimes \mathcal{O}(-P) \rightarrow E \rightarrow E_P \rightarrow 0,$$

où  $E_P$  est la fibre de  $E$  en  $P$ . Signalons que  $E \otimes \mathcal{O}(-P)$  est un élément de  $E(r, d-r)$ , et que  $H^1(C, E')$  s'annule si  $E'$  est un élément de  $E(r, d')$  avec  $d' > 0$  (voir АТИЯАН [2]). Alors on a une suite exacte

$$0 \rightarrow F \rightarrow \Gamma(C, E) \rightarrow E \rightarrow 0.$$

Puisque le fibré vectoriel trivial est non négatif [d'après 2, (i)],  $E$  est non négatif.

Q. E. D.

COROLLAIRE DU LEMME. — *Si  $E$  est un élément de  $E(r, d)$  avec  $d > 2r$ , alors  $E$  est positif.*

En effet,  $E$  est le produit tensoriel d'un fibré inversible de degré 1 et d'un élément  $E'$  de  $E(r, d-r)$ ,  $d-r > r$ . Donc  $E$  est le produit tensoriel d'un fibré vectoriel positif et d'un fibré vectoriel non négatif. D'après 2, (iii),  $E$  est positif.

Revenons à la démonstration de la proposition. Raisonnons par récurrence sur  $r$ . Si  $r = 1$ , d'après 2 (iv), on a (b)  $\Rightarrow$  (c). Supposons que l'on ait (b)  $\Rightarrow$  (a) pour  $r - 1$  et démontrons-le pour  $r$ . Désignons par  $\pi$  l'application de  $C$  dans  $C$  qui transforme  $x$  en  $mx$ . Le degré de l'image réciproque  $\pi^*E$  est  $m^2d$ . Si  $\pi^*E$  est décomposable, alors, par hypothèse de récurrence et 2 (ii),  $\pi^*E$  est positif. Si  $\pi^*E$  est indécomposable, d'après le corollaire,

$\pi^* E$  est positif pour  $m$  assez grand. On fixe  $m$  tel que  $\pi^* E$  soit positif. D'après 2 (vi),  $\pi_* \pi^* E$  est positif. D'ailleurs, on a

$$\pi_* \pi^* E = E \otimes \pi_* \mathcal{O}_C.$$

Donc  $E$  est un facteur direct de  $\pi_* \pi^* E$ . D'après 2 (i),  $E$  est positif, ce qui achève la démonstration de la proposition.

#### 4. Conclusion

Sur une courbe elliptique, la positivité différentielle est une bonne notion. En effet, sur une courbe elliptique sur  $\mathbf{C}$ , les trois notions suivantes coïncident :

- (i) *positif* : définition différentielle d'amplitude;
- (ii) *ample* : définition algèbro-géométrique d'amplitude;
- (iii) *tous les fibrés vectoriels quotients sont de degré positif* : définition topologique d'amplitude.

Voir GRIFFITHS [3] et HARTSHORNE [5].

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREOTTI (A.) et GRAUERT (H). — Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 193-259.
- [2] ATIYAH (M. F.). — Vector bundles over an elliptic curve, *Proc. Lond. math. Soc.*, Series 3, t. 7, 1957, p. 414-452.
- [3] GRIFFITHS (P. A.). — Hermitian differential geometry, Chern classes and positive vector bundles. *Global analysis*. Papers in honor of K. Kodaira, p. 185-215. — Princeton, Princeton University Press et University of Tokyo Press, 1969 (*Princeton mathematical Series*, 29).
- [4] HARTSHORNE (R.). — *Ample vector bundles*. — Paris, Presses universitaires de France, 1966 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 29, p. 63-94).
- [5] HARTSHORNE (R.). — Ample vector bundles on curves, *Nagoya math. J.*, t. 43, 1971, p. 73-89.

(Texte reçu le 27 mai 1972.)

Hiroshi UMEMURA,  
 Institut des Hautes Études Scientifiques,  
 35, route de Chartres,  
 91440 Bures-sur-Yvette  
 et Mathematical Institute  
 Faculty of Science, Nagoya University,  
 Nagoya (Japon).