BULLETIN DE LA S. M. F.

ROGER GODEMENT

# Évaluation d’une somme arithmétique. Remarques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 101 (1973), p. 125-127
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__125_0>

*Bull. Soc. math. France,*
101, 1973, p. 125-127.

# ÉVALUATION D'UNE SOMME ARITHMÉTIQUE. REMARQUES

PAR

ROGER GODEMENT

[Univ. Paris-VII]

Dans l'article précédent (*Bull. Soc. math. France*, 101, 1973, p. 113-124), Madame UNTERBERGER se propose de montrer que l'on a

$$(1)\qquad \Sigma_1^\infty d(n)^2 K_0(2\pi ny)^2 = \varphi(y) + O(y^{-1}) \qquad \text{quand} \quad y \to 0,$$

où

$$(2)\qquad \varphi(y) = \frac{1}{16} y^{-1} \log^3 \frac{1}{y} + \ldots$$

est une fonction élémentaire explicitée. On peut en fait, en utilisant une transformation de Mellin, améliorer ce résultat et obtenir une évaluation en $\varphi(y) + O(y^{-1/2})$ comme nous allons le montrer. La méthode utilisée par Madame UNTERBERGER étant beaucoup plus belle et beaucoup plus puissante que la nôtre, on peut espérer que son auteur ne manquera pas de nous montrer dans l'avenir que la supériorité momentanée de notre procédé tient à des circonstances particulières et miraculeuses, dont on ne saurait espérer le renouvellement.

Considérons la fonction

$$(3)\qquad f(y) = \Sigma_1^\infty d(n)\, 2 K_0(2\pi ny)^2$$

et sa transformée de Mellin :

$$(4)\quad F(s) = \int_0^{+\infty} f(y)\, y^s\, d^* y = (2\pi)^{-s} \Sigma \frac{d(n)^2}{n^s} \int_0^{+\infty} K_0(y)^2\, y^s\, d^* y.$$

Des personnes charitables (*voir* par exemple MAGNUS, OBERHETTINGER et SONI, p. 101) ont depuis longtemps démontré que

$$\int_0^\infty K_0(y)^2\, y^s\, d^* y = 2^{s-3}\frac{\Gamma(s/2)^4}{\Gamma(s)}, \tag{5}$$

et d'autre part il est bien connu que

$$\Sigma \frac{d(n)^2}{n^s} = \frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}. \tag{6}$$

Par suite, la fonction

$$8F(s) = \pi^{-s}\frac{\Gamma(s/2)^4\,\zeta(s)^4}{\Gamma(s)\,\zeta(2s)} = \frac{\xi(s)^4}{\xi(2s)} \tag{7}$$

est méromorphe, et même holomorphe dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geqq 1/2$, à l'exception d'un pôle d'ordre 4 en $s = 1$. De plus, $s^n F(s)$ est bornée à l'infini dans toute bande verticale de ce demi-plan, quel que soit $n$, car en posant $s = \sigma + it$ on a

$$\begin{aligned} 8F(s) &\asymp \pi^{-s}\frac{\left[(2\pi)^{1/2}\left|\dfrac{t}{2}\right|^{(\sigma-1)/2}\exp\left(-\dfrac{\pi}{2}\left|\dfrac{t}{2}\right|\right)\right]^4}{(2\pi)^{1/2}\,|t|^{\sigma-1/2}\exp\left(-\dfrac{\pi}{2}|t|\right)}\frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)} \\ &\asymp |t|^{\sigma-(3/2)}\exp(-\pi|t|/2)\frac{\zeta(s)^4}{\zeta(2s)}, \end{aligned} \tag{8}$$

lorsque $s$ reste dans une bande verticale $a \leqq \operatorname{Re}(s) \leqq b$; or on sait que

$$\zeta(s) = O(s^{2p}) \qquad \text{dans} \quad \operatorname{Re}(s) \geqq 1 - 2p, \tag{9}$$

$$1/\zeta(2s) = O(\log^7 t) \qquad \text{dans} \quad \operatorname{Re}(2s) \geqq 1. \tag{10}$$

Le facteur exponentiel dans l'estimation précédente de $F(s)$ montre alors, comme annoncé, que $s^n F(s)$ est bornée à l'infini dans toute bande verticale.

La formule d'inversion de Fourier montre donc que l'on a

$$2\pi i f(y) = \int_{\operatorname{Re}(s)=\sigma} F(s)\, y^{-s}\, ds, \tag{11}$$

pour $\sigma$ assez grand [de manière précise, dans le demi-plan de convergence de (4)], et en intégrant sur un rectangle situé dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geqq 1/2$, on trouve évidemment

$$2\pi i f(y) = \int_{\operatorname{Re}(s)=1/2} F(s)\, y^{-s}\, ds + 2\pi i.\operatorname{Res}_{s=1}[F(s)\, y^{-s}]; \tag{12}$$

comme $F(s)$ est intégrable sur $\mathrm{Re}(s) = 1/2$, on trouve donc

$$f(y) = \mathrm{Res}_{s=1}[F(s)\,y^{-s}] + O(y^{-1/2}), \tag{13}$$

et il resterait, pour en déduire le résultat de Madame UNTERBERGER, à calculer le résidu en question, ce qui est théoriquement facile puisque la fonction $F$ est fournie par la relation (7). On voit en outre qu'en repoussant l'intégration dans (12) jusqu'à la droite $\mathrm{Re}(s) = \varepsilon + 1/4$, l'hypothèse de Riemann fournirait, dans (13), un reste en $O(y^{\varepsilon - 1/4})$.

(Texte reçu le 16 octobre 1972.)

Roger GODEMENT,
3, rue de l'Estrapade,
75005 Paris.