BULLETIN DE LA S. M. F.

DANIEL BARSKY

Fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 397-411

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__397_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 397-411.

FONCTIONS k-LIPSCHITZIENNES SUR UN ANNEAU LOCAL ET POLYNÔMES À VALEURS ENTIÈRES

PAR

DANIEL BARSKY

RÉSUMÉ. — On donne une caractérisation des fonctions de $\mathcal{C}(A, K)$ (où A est l'anneau des entiers du corps local K) dont les différences finies divisées 1re, 2e, ..., r-ième sont bornées uniformément sur $(A^*)^i \times A$ $(1 \leqq i \leqq r)$. On donne aussi une caractérisation des fonctions de $\mathcal{C}(A, K)$ qui sont continûment et uniformément dérivables sur A. On applique ensuite ces résultats pour caractériser les polynômes de $\mathcal{K}[x]$ (où $\mathcal{K}$ est un corps de nombres) prenant des valeurs entières sur les entiers de $\mathcal{K}$ ainsi que leurs différences finies divisées 1re, 2e, ..., r-ième ou bien ainsi que toutes leurs dérivées.

NOTATIONS. — K est un corps local muni d'une valuation ultramétrique v, telle que $v(\pi) = 1$ (où π est une uniformisante locale de K).

On désigne par A l'anneau des entiers de K, $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A. Le cardinal de $A/\mathfrak{m}$ est q.

Si n est un entier naturel, $v_q(n)$ désigne l'exposant de la plus haute puissance de q qui divise n.

La suite $u_0, u_1, \ldots$ est une suite très bien répartie bien ordonnée [5] (en abrégé T.B.R.B.O.), c'est-à-dire que les u_i $(i = 0, 1, \ldots)$ sont des éléments de A, et $v(u_i - u_j) = v_q(i - j)$ pour tout couple d'entiers positifs ou nuls i et j.

On pose

$$P_n(x) = (x - u_0) \ldots (x - u_{n-1}),$$

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_n(u_n)} \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1 \quad \text{et} \quad Q_0(x) = 1,$$

de même on pose

$$K_n(y) = \frac{(y - u_1) \ldots (y - u_{n-1})}{(u_n - u_{n-1}) \ldots (u_n - u_1)}.$$

La suite des polynômes $Q_n(x)$ [resp. $K_n(y)$] forme une base normale de $\mathcal{C}(A, K)$ espace des fonctions continues de A dans K muni de la norme de la convergence uniforme sur A, c'est-à-dire que si

$$f(x) \in \mathcal{C}(A, K) \qquad [\text{resp. } f(y) \in \mathcal{C}(A, K)],$$

alors

$$f(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n Q_n(x) \qquad [\text{resp. } f(y) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n K_{n+1}(y)]$$

avec $\lim_{n \to +\infty} v(a_n) = +\infty$ [resp. $\lim_{n \to +\infty} v(b_n) = +\infty$] (*cf.* [1], théorème 1).

On note additivement les distances, on emploiera l'expression « le rayon de la boule est R » au lieu de « la boule a un rayon dont la valuation est R ».

On désigne par $[x]$, la partie entière de x, c'est-à-dire l'entier n, tel que $n \leq x < n + 1$.

$\mathcal{K}$ désigne un corps de nombres, $\mathfrak{A}$ son anneau des entiers, $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de $\mathfrak{A}$. $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{P}}$ et $\hat{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{P}}$ sont les complétés de $\mathcal{K}$ et $\mathfrak{A}$ pour la topologie $\mathfrak{P}$-adique de $\mathcal{K}$ normalisée par $v_{\mathfrak{P}}(\pi) = 1$ (où $\pi \in \mathfrak{P}$ et $\pi \notin \mathfrak{P}^2$).

On note encore $v_{\mathfrak{P}}$ l'extension de $v_{\mathfrak{P}}$ à $\hat{\mathcal{K}}_{\mathfrak{P}}$.

On pose $q = N_{\mathcal{K}/Q}(\mathfrak{P})$ et v_q est la pseudo valuation associée à $\mathfrak{P}$.

I. — Caractérisation des fonctions r-lipschitziennes

E. Helsmoortel a montré [6] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n Q_n(x) \in \mathcal{C}(A, K)$ soit lipschitzienne, c'est-à-dire pour que

$$\inf_{(x, h) \in A \times A^*} v\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = M_1(f) > -\infty,$$

est que

$$\inf_{n \geq 1} (v(a_n) - L(n, 1)) > -\infty, \qquad \text{où} \quad L(n, 1) = \left[\frac{\log n}{\log q}\right].$$

Si cette condition est réalisée, on a

$$\inf_{n \geq 1} (v(a_n) - L(n, 1)) = M_1(f).$$

Je généralise cette caractérisation aux fonctions r-lipschitziennes. Soit f une fonction de $\mathcal{C}(A, K)$, et soit $m_1 \in A^* = A - \{0\}$. On pose

$$\Delta^0 f(x) = f(x), \qquad M_0(f) = \inf_{x \in A} (v(f(x))).$$

Puis, par récurrence, on définit, pour $(m_1, m_2, \ldots, m_j) \in (A^*)^j$,

$$\Delta^j_{m_1, \ldots, m_j}(f(x)) = \frac{\Delta^{j-1}_{m_1, \ldots, m_{j-1}}(f(x + m_j)) - \Delta^{j-1}_{m_1, \ldots, m_{j-1}}(f(x))}{m_j},$$

$$M_j(f) = \inf_{(m_1, \ldots, m_j, x) \in (A^*)^j \times A} v(\Delta^j_{m_1, \ldots, m_j}(f(x))),$$

on appellera $M_j(f)$ la j-constante de Lipschitz de f.

DÉFINITION 1.I. — *Une fonction* $f(x) \in \mathcal{C}(A, K)$ *est* r*-lipschitzienne si, et seulement si,* $M_i(f) > -\infty$ *pour* $1 \leq i \leq r$.

Pour caractériser les fonctions r-lipschitziennes nous allons introduire les quantités $L(s, r)$.

DÉFINITION I.2. — *Soit* $u_0, u_1, \ldots$ *une suite T.B.R.B.O. de* A. *On pose, pour* $s \geq r$,

$$L(s, r) = \max_{0 \leq i_r < i_{r-1} < \ldots < i_1 < s} \{ v(u_s - u_{i_1}) + v(u_{i_1} - u_{i_2}) + \ldots + v(u_{i_{r-1}} - u_{i_r}) \},$$

$$L(s, 0) = 0.$$

Posons, pour $m_1 \neq u_0$,

$$\Delta^1_{m_1 - u_0}(Q_s(x)) = \frac{Q_s(x + m_1 - u_0) - Q_s(x)}{m_1 - u_0} = \sum_{n \geq 1,\, r \geq 0} \mu^s_{n-1,\, r} K_n(m_1) Q_r(x).$$

On a $\mu^s_{n-1,\, r} = 0$ si $n + r > s$, car $\Delta^1_{m_1 - u_0}(Q_s(x))$ est un polynôme de degré $s - 1$ au plus en m_1 et x.

Si $n + r \leq s$, on a, conformément à la théorie générale (*cf.* [1], prop. 7, cor. 2) :

$$\mu^s_{n-1,\, r} = \frac{1}{u_n - u_0} P_n(u_n) P_r(u_r) \sum_{0 \leq l \leq n,\, 0 \leq k \leq r} \frac{Q_s(u_l + u_k - u_0)}{P'_{n+1}(u_l) P'_{r+1}(u_k)}.$$

Plus généralement, posons

$$\Delta^j_{m_1 - u_0,\, m_2 - u_0,\, \ldots,\, m_j - u_0}(Q_s(x)) = \sum^*_{j,\,(r \geq 0)} \mu^s_{l_1 - 1,\, \ldots,\, l_j - 1,\, r} K_{l_1}(m_1) \ldots K_{l_j}(m_j) Q_r(x),$$

la notation $\sum^*_{j,\,(r \geq 0)}$ indique que la sommation porte sur $l_1 \geq 1$, $l_2 \geq 1, \ldots, l_j \geq 1$, $r \geq 0$.

PROPOSITION I.1. — *Avec les notations précédentes, on a l'identité*

$$\mu^s_{l_1 - 1,\, \ldots,\, l_j - 1,\, r} = \sum_{r_1, \ldots, r_{j-1},\, s > r_1 > \ldots > r_{j-1} > r \geq 0} \mu^s_{l_1 - 1,\, r_1} \mu^{r_1}_{l_2 - 1,\, r_2} \ldots \mu^{r_{j-1}}_{l_j - 1,\, r}$$

et

$$\mu^s_{l_1 - 1,\, l_2 - 1,\, \ldots,\, l_{j-1},\, r} = 0 \quad \text{si} \quad l_1 + l_2 + \ldots + l_j + r > s.$$

La deuxième partie de la proposition est évidente, puisque $\Delta^j_{m_1 - u_0,\, \ldots,\, m_j - u_0}(Q_s(x))$ est un polynôme de degré $s - j$ au plus en $(m_1, m_2, \ldots, m_j, x)$.

Nous allons montrer la première partie de la proposition I.1 par récurrence sur j.

L'identité est vraie pour $j = 1$, par définition même de $\mu^s_{l_1-1,\,r}$, supposons-la vraie pour j, et montrons qu'elle est encore vraie pour $j+1$.

$$
\begin{aligned}
&\Delta^{j+1}_{m_1-u_0,\,\ldots,\,m_j-u_0,\,m_{j+1}-n_0}(Q_s(x))\\
&\quad = \frac{\Delta^j_{m_1-u_0,\,\ldots,\,m_j-u_0}(Q_s(x+m_{j+1}-u_0)) - \Delta^j_{m_1-u_0,\,\ldots,\,m_j-n_0}(Q_s(x))}{m_{j+1}-u_0}\\
&\quad = \Sigma^*_{j,\,(r_j\geqq 0)}\,\mu^s_{l_1-1,\,\ldots,\,l_j-1,\,r}\,K_{l_1}(m_1)\ldots K_{l_j}(m_j)\\
&\qquad \times \frac{Q_{r_j}(x+m_{j+1}-u_0)-Q_{r_j}(x)}{m_{j+1}-u_0}\\
&\quad = \Sigma^*_{j,\,(r_j\geqq 0)}\,\mu^s_{l_1-1,\,\ldots,\,l_j-1,\,r}\,K_{l_1}(m_1)\ldots K_{l_{j-1}}(m_{j-1})\\
&\qquad \times K_{l_j}(m_j)\,(\Sigma_{l_{j+1}\geqq 1,\,r_{j+1}\geqq 0}\,\mu^{r_j}_{l_{j+1}-1,\,r_{j+1}}\,K_{l_{j+1}}(m_{j+1})\,Q_{r_{j+1}}(x))\\
&\quad = \Sigma^*_{j+1,\,(r_{j+1}\geqq 0)}\,\big(\Sigma_{r\geqq r_{j+1}}\,\mu^s_{l_1-1,\,\ldots,\,l_j-1,\,r_j}\,\mu^{r_j}_{l_{j+1}-1,\,r_{j+1}}\big)\\
&\qquad \times K_{l_1}(m_1)\ldots K_{l_j}(m_j)\,K_{l_{j+1}}(m_{j+1})\,Q_{r_{j+1}}(x).
\end{aligned}
$$

Donc en identifiant, on trouve

$$\mu^s_{l_1-1,\,\ldots,\,l_{j+1}-1,\,r_{j+1}} = \Sigma_{r_j>r_{j+1}}\,\mu^s_{l_1-1,\,\ldots,\,l_j-1,\,r_j}\,\mu^{r_j}_{l_{j+1}-1,\,r_{j+1}},$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, il vient

$$
\begin{aligned}
&\mu^s_{l_1-1,\,\ldots,\,l_{j+1}-1,\,r_{j+1}}\\
&\quad = \Sigma_{r_j>r_{j+1}}\big(\Sigma_{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_{j-1},\,s>r_1>\ldots>r_{j-1}>r_j\geqq 0}\,\mu^s_{l_1-1,\,r_1}\,\mu^{r_1}_{l_2-1,\,r_2}\\
&\qquad\qquad \ldots\,\mu^{r_{j-1}}_{l_j-1,\,r_j}\big)\,\mu^{r_j}_{l_{j+1}-1,\,r_{j+1}}\\
&\quad = \Sigma_{r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_j,\,s>r_1>r_2>\ldots>r_j>r_{j+1}\geqq 0}\,\mu^s_{l_1-1,\,r_1},\,\ldots,\,\mu^{r_{j-1}}_{l_j-1,\,r_j}\,\mu^{r_j}_{l_{j+1}-1,\,r_{j+1}},
\end{aligned}
$$

et la proposition I.1 est démontrée.

PROPOSITION I.2. — *$Q_s(x)$ est une fonction j-lipschitzienne pour tout entier $j \geqq 1$, et on a $M_j(Q_s) \geqq -L(s, j)$ pour tout couple d'entiers $s \geqq j \geqq 1$.*

En effet, $\Delta^j_{m_1-u_0,\,\ldots,\,m_j-u_0}(Q_s(x))$ est, soit un polynôme en $(m_1, \ldots, m_j, x)$, soit la fonction partout nulle sur A $(s < j)$, donc toujours bornée sur A^{j+1}.

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
&v\,(\Delta^j_{m_1-u_0,\,\ldots,\,m_j-u_0}(Q_s(x)))\\
&\quad \geqq \inf_{l_1,\,\ldots,\,l_j,\,r}(v\,(\mu^s_{l_1-1,\,\ldots,\,l_j-1,\,r}))\\
&\quad \geqq \inf_{l_1,\,\ldots,\,l_j,\,r}\big(v\,\big(\Sigma_{r_1,\,\ldots,\,r_{j-1},\,s>r_1>\ldots>r_{j-1}>r\geqq 0}\,\mu^s_{l_1-1,\,r_1}\,\mu^{r_1}_{l_2-1,\,r_2}\,\ldots\,\mu^{r_{j-1}}_{l_j-1,\,r}\big)\big)\\
&\quad \geqq \inf_{l_1,\,\ldots,\,l_j} -(v_q(l_1)+v_q(l_2)+\ldots+v_q(l_j))\\
&\quad = -\sup_{l_1,\,\ldots,\,l_j}\{\,v_q(l_1)+\ldots+v_q(l_j)\,\}.
\end{aligned}
$$

Ceci d'après l'expression donnée plus haut de $\mu^s_{n-1,\,r}$ dans laquelle

$$v\left(P_n(u_n)\,P_r(u_r)\,\Sigma_{0\leqq l\leqq n,\,0\leqq k\leqq r}\frac{Q_s(u_l+u_k+u_0)}{P'_{n+1}(u_l)\,P'_{r+1}(u_k)}\right) \geqq 0.$$

Or $l_1, \ldots, l_j$ vérifient la condition suivante pour que $\mu^s_{l_1-1, \ldots, l_j-1, r}$ ne soit pas nul : $l_1 + l_2 + \ldots + l_j + r \leqq s$. De là l'inégalité

$$v\,(\Delta^j_{m_1-u_0, \ldots, m_j-u_0}\,(Q_s\,(x))) \geqq -L\,(s, j),$$

ou encore $M_j\,(Q_s) \geqq -L\,(s, j)$.

COROLLAIRE. — *Une condition suffisante pour que* $f\,(x) = \sum_{n \geqq 0} a_n\, Q_n\,(x)$, *où* $f \in \mathcal{C}\,(A, K)$, *soit j-lipschitzienne est qu'il existe des constantes* $K_i > -\infty$ $(1 \leqq i \leqq j)$ *telles que* $v\,(a_n) - L\,(n, i) \geqq K_i$ *pour* $1 \leqq i \leqq j$ *et* $n \geqq i$.

S'il en est ainsi, on a $K_i \geqq \mathrm{M}_i\,(f)$ *pour* $1 \leqq i \leqq j$.

Ce corollaire est évident si l'on remarque que

$$\Delta^i_{m_1, \ldots, m_i}\,(f\,(x)) = \sum_{n \geqq i} a_n\, \Delta^i_{m_1, \ldots, m_i}\, Q_n\,(x)$$

pour $m_1, \ldots, m_i$ fixés.

Nous allons montrer maintenant la réciproque du corollaire.

THÉORÈME I.1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $f\,(x) = \sum_{n \geqq 0} a_n\, Q_n\,(x)$ $(f \in \mathcal{C}\,(A, K))$ *soit j-lipschitzienne est que*

$$\inf_{0 \leqq r \leqq j,\, n \geqq r}\,(v\,(a_n) - L\,(n, r)) > -\infty.$$

Si cette condition est réalisée, on a

$$\inf_{0 \leqq r \leqq j,\, n \geqq r}\,(v\,(a_n) - L\,(n, r)) = \inf_{0 \leqq r \leqq j} M_r\,(f).$$

Pour démontrer ce théorème nous allons raisonner par récurrence sur j et pour j fixé par récurrence sur n.

$j = 0$: $\inf_{n \geqq 0} v\,(a_n) = M_0\,(f) > -\infty$, ceci est vrai d'après [1] (théorème 1).

$j = 1$: Posons $C_1\,(f) = \inf\,(M_0\,(f), M_1\,(f))$, comme $L\,(n, 1) = 0$ si $1 \leqq n < q$, on a $v\,(a_n) - L\,(n, 1) = v\,(a_n)$ pour $1 \leqq n < q$, et par conséquent $v\,(a_n) - L\,(n, 1) \geqq C_1\,(f)$ pour $1 \leqq n < q$.

Supposons la proposition vraie pour n. Posons

$$f_n\,(x) = f\,(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, Q_k\,(x),$$

$f_n\,(x)$ est 1-lipschitzienne d'après le corollaire de la proposition I.2 et de 1-constante de Lipschitz $M_1\,(f_n) \geqq M_1\,(f)$.

Soit alors $x \in A$, $v\,(f_n\,(x) - f\,(u_i)) \geqq M_1\,(f) + v\,(x - u_i)$ si $0 \leqq i \leqq n$, et si $x = u_{n+1}$, il vient $v\,(f_n\,(u_{n+1})) = v\,(a_{n+1}) \geqq M_1\,(f) + v\,(u_{n+1} - u_i)$, d'où le résultat.

Supposons le théorème vrai jusqu'à $j - 1 > 1$.

Supposons donc que, pour $k = 0, 1, \ldots, j-1$, on ait montré que

$$v(a_n) - L(n, k) \geqq C_k(f) > -\infty \quad \text{pour tout entier } n \geqq k,$$

où $C_k(f) = \inf(M_0(f), M_1(f), \ldots, M_k(f))$.

Posons $C_j(f) = \inf(M_j(f), C_{j-1}(f))$. Comme $L(n, j) = 0$ si $j \leqq n < q + j - 1$, on a bien

$$v(a_n) - L(n, j) \geqq C_j(f) \qquad \text{pour} \quad j \leqq n < q + j - 1.$$

Supposons que, pour $q + j - 1 \leqq n < s$, on ait $v(a_n) - L(n, j) \geqq C_j(f)$, et montrons que $v(a_s) - L(s, j) \geqq C_j(f)$.

Soit $f_s(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{s-1} a_k Q_k(x)$, $f_s(x)$ est encore j-lipschitzienne, et sa k-constante $(0 \leqq k \leqq j)$ de Lipschitz vérifie $M_k(f_s) \geqq M_k(f)$ (d'après l'hypothèse de récurrence et le corollaire de la proposition I.2).

Choisissons des indices $0 \leqq i_1 < \ldots < i_j < s$ tels que

$$v(u_{i_1} - u_{i_2}) + v(u_{i_2} - u_{i_3}) + \ldots + v(u_{i_j} - u_s) = L(s, j).$$

Choisissons des éléments $u'_{i_1}, u'_{i_2}, \ldots, u'_{i_j}$ tels que $v(u'_{i_k} - u_{i_k}) \geqq L(s, 1) + 1$ et aussi tels que, si l'on pose

$$m_1 = u'_{i_1} - u'_{i_2}, \qquad m_2 = u'_{i_2} - u'_{i_3}, \qquad \ldots, \qquad m_j = u'_{i_j} - u_s,$$

alors $y_{\bar{l}} = m_1 + m_2 + \ldots + \hat{m}_{l_1} + \ldots + \hat{m}_{l_k} + \ldots + m_j \neq 0$ [1] pour tout multi-indice $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_k)$ $(0 \leqq k \leqq j)$ $1 \leqq l_1 < \ldots < l_k \leqq j$. On a $v(m_1) + \ldots + v(m_j) = L(s, j)$.

Posons $S(s, j) = \{(u_s + y_{\bar{l}})\}_{\bar{l} \in \bar{L}}$. $S(s, j)$ est une famille finie d'éléments de A tous distincts de u_s. On peut donc trouver [2] une suite T. B. R. B. O. $v_0, v_1, \ldots$ telle que

1° $v_0 = u_0, v_1 = u_1, \ldots, v_s = u_s$.

2° $v_i \notin S(s, j)$ si $i > s$.

On sait [2] que si $v_0, v_1, \ldots$ est une suite T. B. R. B. O. de A, alors la suite des fonctions $(\psi_{R, i})_{i \in \mathbf{N}}$, définies comme suit, est une base normale de $\mathcal{C}(A, K)$ (R est fixé).

— $0 \leqq i < q^R$, $\psi_{R, i}$ est la fonction caractéristique de la boule de centre v_i et de rayon R.

— $i \geqq q^R$, $\psi_{R, i}$ est la fonction caractéristique de la boule de centre v_i et de rayon $L(i, 1) + 1$.

---

(1) Dans ce paragraphe, la notation $\hat{m}$ indique que le terme m est remplacé par 0.

On peut donc écrire $f_s(x) = \sum_{k \geqq 0} b_k \psi_{R,k}(x)$ avec $b_0 = b_1 = \ldots = b_{s-1} = 0$ et $b_s = a_s$. D'autre part, on a le résultat suivant [2] :

Soit $f(x) \in \mathcal{C}(A, K)$, et soit $\sum_{n \geqq 0} b_n \psi_{0,n}$ son développement sur la base normale définie ci-dessus. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x)$ est 1-lipschitzienne;

(ii) $v(b_n) - L(n, 1) \geqq M_1(f)$ si $n \geqq 1$.

Soit N un entier tel que, pour $n \geqq N$, on ait $v(a_n) - L(s, j) > C_j(f)$ et $v(b_n) - L(s, j) > C_j(f)$ [on revient ici à la fonction $f_s(x)$ qui est j-lipschitzienne, $j \geqq 2$]. Il suffit de choisir N de telle sorte que $M_1(f) + L(N, 1) > L(s, j) + C_j(f)$ (en particulier on voit que N ne dépend ni de R, ni de la suite T.B.R.B.O. choisie).

Soit $R' = \max_{s < i < N,\, z \in S(s, j)} (v(v_i - z))$. R' est fini d'après la construction de la suite $v_0, v_1, \ldots$. Soit $R = \max(L(N, 1) + 1, R' + 1)$. Prenons comme base normale de $\mathcal{C}(A, K)$ la suite des fonctions $(\psi_{R,i})_{i \in \mathbf{N}}$ relatives à la suite T.B.R.B.O. $v_0, v_1, \ldots$ définie ci-dessus, et au nombre R défini plus haut. Alors

$$\begin{aligned}\Delta^j_{m_1, \ldots, m_j}&(f_s(u_s)) \\ = \frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_j}&(f_s(u_s + m_1 + \ldots + m_j) \\ &- \textstyle\sum_{i=1}^j f_s(u_s + m_1 + \ldots + \hat{m}_i + \ldots + m_j) + \ldots \\ &+ (-1)^k \textstyle\sum_{1 \leqq l_1 < \ldots < l_k \leqq j} f_s(u_s + m_1 + \ldots + \hat{m}_{l_1} + \ldots \\ &\qquad + \hat{m}_{l_k} + \ldots + m_j) + \ldots \\ &\qquad + (-1)^s f_s(u_s)).\end{aligned}$$

En développant f_s sur la base des $(\psi_{R,i})_{i \in \mathbf{N}}$, il vient

$$\begin{aligned}&\Delta^j_{m_1, \ldots, m_j}(f_s(u_s)) \\ &= \frac{(-1)^s a_s}{m_1 \ldots m_j} + \frac{1}{m_1 \ldots m_j}\left(\textstyle\sum_{0 \leqq k \leqq j} \sum_{\bar{l}_k} (-1)^k \left(\sum_{i \geqq s} b_i\, \psi_{R,i}\left(u_s + y_{\bar{l}_k}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Or si $s \leqq i < q^R$, on a $v\left(v_i - u_s + y_{\bar{l}_k}\right) \leqq R$ d'après la définition même de R. Donc, si $s \leqq i < q^R$, $\psi_{R,i}\left(u_s + y_{\bar{l}_k}\right) = 0$ d'après la définition de $\psi_{R,i}$. Si $i \geqq q^R$, alors $i > N$, et par conséquent

$$v(b_i) - L(s, j) > C_j(f).$$

Donc

$$v(a_s) - v(m_1 m_2 \ldots m_j) = v(a_s) - L(s, j) \geqq C_j(f),$$

car $v(\Delta^j_{m_1, \ldots, m_j}(f_s(u_s))) \geqq C_j$, et le théorème est démontré.

COROLLAIRE. — *Si l'entier naturel N est tel que, pour $n \geqq N$, on ait*

$$L(n, j) > L(n, j-1) > \ldots > L(n, 1) > 0,$$

et si $f(x) = \sum_{n \geqq N} a_n Q_n(x)$ est j-lipschitzienne alors

$$M_0(f) \geqq M_1(f) \geqq \ldots \geqq M_j(f).$$

Remarque. — Un tel entier existe toujours, car

$$\lim_{n \to +\infty} (L(n, j) - L(n, j-1)) = +\infty \qquad (\textit{voir } [2]).$$

II. — Caractérisation des fonctions continûment et uniformément dérivables sur A

E. HELSMOORTEL, dans [6], a montré qu'une condition suffisante pour que $f \in \mathcal{C}(A, K)$ soit j-fois continûment et uniformément dérivable est que,

$$\text{si } f(x) = \sum_{n \geqq 0} a_n Q_n(x), \qquad \lim_{n \to +\infty} v(a_n) - j\,L(n, 1) = +\infty.$$

Je montre ci-dessous que cette condition est nécessaire et suffisante.

DÉFINITION II.1. — *On dit que $f \in \mathcal{C}(A, K)$ est j-fois continûment et uniformément dérivable sur A si, et seulement si, pour $1 \leqq k \leqq j$,* $(\forall M > 0)$ $(\forall x \in A)$ $\exists (n_i)_{1 \leqq i \leqq k} \in \mathbf{N}$ *tel que* $(\forall (h_i)_{1 \leqq i \leqq k} \in A^*)$,

$$v(h_i) > n_i \Rightarrow v(\Delta^k_{h_1, h_2, \ldots, h_k}(f(x)) - f^{(k)}(x)) \geqq M,$$

où $f^{(k)}(x)$ désigne la dérivée k-ième de f.

On a la proposition suivante :

PROPOSITION II.1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in \mathcal{C}(A, K)$ soit j-fois continûment et uniformément dérivable sur A est que chacune des fonctions $\Phi_k(x, h_1, \ldots, h_k) = \Delta^k_{h_1, \ldots, h_k}(f(x))$ soit prolongeable en une application continue de A^{k+1} dans K pour $1 \leqq k \leqq j$.*

Remarques. — Une fonction j-fois continûment et uniformément dérivable sur A est aussi j-lipschitzienne.

La famille des polynômes $K_{n_1}(y) \ldots K_{n_k}(y) Q_r(x)$, ($n_i \geqq 1$ pour $1 \leqq i \leqq k$ et $r \geqq 0$), est une base normale de $\mathcal{C}(A^{k+1}, K)$, car $\mathcal{C}(A^{k+1}, K) = \hat{\bigotimes}^{k+1} \mathcal{C}(A, K)$ ([1], prop. 6, cor. 2).

Soit f une fonction j-fois continûment et uniformément dérivable sur A, $f(x) = \sum_{n \geqq 0} a_n Q_n(x)$.

Posons

$$\Delta^t_{m_1-u_0,\, m_2-u_0,\, \ldots,\, m_t-u_0}(f(x)) = \Sigma_{n_1, n_2, \ldots, n_t, r}\, \mu_{n_1-1, \ldots, n_t-1, r}\, K_{n_1}(m_1) \ldots K_{n_t}(m_t)\, Q_r(x),$$

où $n_i \geqq 1$ pour $1 \leqq i \leqq t$ et $r \geqq 0$.

Posons

$$\delta^t_{m_1, \ldots, m_t}(f(x)) = m_1 m_2 \ldots m_t\, \Delta^t_{m_1, \ldots, m_t}(f(x)).$$

On déduit facilement de [1] (prop. 7, cor. 2) que

$$\mu_{n_1-1, \ldots, n_t-1, r} = \frac{1}{(u_{n_1}-u_0) \ldots (u_{n_t}-u_0)} P_{n_1}(u_{n_1}) \ldots P_{n_t}(u_{n_t})\, P_r(u_r) \times \left(\Sigma_{0 \leqq l_i \leqq n_i,\, 0 \leqq k \leqq r} \frac{\delta^t_{u_{l_1}-u_0, \ldots, u_{l_t}-u_0}(f(u_k))}{P'_{n_1+1}(u_{l_1}) \ldots P'_{n_t+1}(u_{l_t})\, P_{r+1}(u_k)} \right)$$

(i varie de 1 à t).

On en déduit facilement [2] que

$$\mu_{n_1-1, \ldots, n_t-1, r} = \frac{P_{n_1}(u_{n_1}) \ldots P_{n_t}(u_{n_t})\, P_r(u_r)}{(u_{n_1}-u_0) \ldots (u_{n_t}-u_0)} \times \left(\Sigma_{j > \sup(n_1, \ldots, n_t, r)}\, a_j \times \Sigma_{0 \leqq l_i \leqq n_i,\, 1 \leqq i \leqq t,\, 0 \leqq k \leqq r} \frac{\delta^t_{u_{l_1}-u_0, \ldots, u_{l_t}-u_0}\, Q_j(u_k)}{P'_{n_1+1}(u_{l_1}) \ldots P'_{n_t+1}(u_{l_t})\, P'_{r+1}(u_k)} \right)$$

et que

$$v(\mu_{n_1-1, \ldots, n_t-1, r}) \geqq \inf_{j > \sup(n_1, \ldots, n_t, r)} (v(a_j) - (v_q(n_1) + \ldots + v_q(n_t))$$

avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_t < tj$ et $n_i \geqq 1$ $(1 \leqq i \leqq t)$.

Donc si

$$\lim_{j \to +\infty} (v(a_j) - L(tj, t)) = +\infty,$$

ou encore si

$$\lim_{j \to +\infty} (v(a_j) - L(j, t)) = +\infty,$$

ou encore si

$$\lim_{j \to +\infty} (v(a_j) - t\, L(j, 1)) = +\infty$$

(pour les équivalences entre ces trois conditions *voir* [2]), alors $f(x)$ est t-fois uniformément et continûment dérivable sur A.

Réciproquement, supposons que $f(x)$ soit t-fois continûment et uniformément dérivable sur A. Considérons la fonction $f_s(x) = \Sigma_{k \geqq s}\, a_k\, Q_k(x)$ [elle est aussi t-fois uniformément et continûment dérivable sur A, car $f_s(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{s-1} a_k Q_k(x)]$, où s est un entier qui sera choisi ultérieurement. Posons

$$\begin{aligned}&\Delta^t_{m_1-u_0,\ldots,m_t-u_0}(f_s(x))\\ &\quad= \textstyle\sum_{n_1\geqq 1,\ldots,n_t\geqq 1,\, r\geqq 0} \nu^{(s)}_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r} K_{n_1}(m_1)\ldots K_{n_t}(m_t)\, Q_r(x).\end{aligned}$$

Il est facile de voir [2] que $\nu^{(s)}_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r} = \mu_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r}$ dès que $n_1+n_2+\ldots+n_t+r \geqq s$.

Or $f_s(x)$ est t-lipschitzienne, donc si s est assez grand (corollaire du théorème I.1 et théorème I.1) :

$$\begin{aligned}&\inf_{(m_1,\ldots,m_t,x)\in A^{*t}\times A} v(\Delta^t_{m_1-u_0,\ldots,m_t-u_0}(f_s(x)))\\ &\quad= \inf_{n_1\geqq 1,\ldots,n_t\geqq 1,\, r\geqq 0} v(\nu^{(s)}_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r}) = \inf_{i\geqq s}(v(a_i) - L(i,t)).\end{aligned}$$

Choisissons s de telle sorte que $L(s,t) - L(s-1,t) > 0$.

Ceci implique que, si $n_1+n_2+\ldots+n_t < s$, alors

$$v(\nu^{(s)}_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r}) > \inf_{i\geqq s}(v(a_i) - L(i,t)),$$

car, dans ce cas, $v_q(n_1)+\ldots+v_q(n_t) \leqq L(s-1,t) < L(s,t)$.

Donc le minimum de $v(\nu^{(s)}_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r})$ est atteint pour un multi-indice $(n_1, n_2, \ldots, n_t, r)$ tel que $n_1+\ldots+n_t \geqq s$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}&\inf_{(n_1,\ldots,n_t,r)} v(\nu^{(s)}_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r}) = \inf_{(n_1,\ldots,n_t,r),\, n_1+\ldots+n_t\geqq s} v(\nu^{(s)}_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r})\\ &\quad= \inf_{n_1,\ldots,n_t,r,\, n_1+\ldots+n_t\geqq s} v(\mu_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r}) = \inf_{i\geqq s}(v(a_i) - L(i,t)).\end{aligned}$$

Or, si $n_1+\ldots+n_t \geqq s$, un au moins des n_i est supérieur ou égal à $[s/t]$.

Comme $\Delta^t_{m_1-u_0,\ldots,m_t-u_0}(f(x))$ est une fonction de $\mathcal{C}(A^{t+1}, K)$,

$$\lim_{\sup(n_1,\ldots,n_t,r)\to+\infty} v(\mu_{n_1-1,\ldots,n_t-1,r}) = +\infty.$$

Donc si l'on fait décrire à s une suite infinie croissante d'entiers positifs $(s_i)_{i\in\mathbf{N}}$ tels que $L(s_i,t) - L(s_i-1,t) > 0$ [une telle suite existe puisque $\lim_{s\to+\infty} L(s,t) = +\infty$], alors

$$\sup_{n_1+\ldots+n_t\geqq s_i}(n_1,\ldots,n_t,r) \geqq \left[\frac{s_i}{t}\right]$$

et par conséquent

$$\lim_{i\to+\infty}(v(a_i) - L(i,t)) = +\infty.$$

Le théorème est démontré.

THÉORÈME II.1. — *L'espace des fonctions indéfiniment continûment et uniformément dérivables sur A coïncide avec l'espace des fonctions indéfiniment lipschitziennes sur A.*

Pour la démonstration, *voir* [2].

III. — Polynômes prenant des valeurs entières sur les entiers d'un corps de nombres ainsi que leurs différences finies divisées

CARLITZ [5] a montré que l'on pouvait caractériser les polynômes de $Q[x]$, dont les différences finies divisées 0-ième, 1re, ..., r-ième (resp. toutes les dérivées, *voir* aussi [9])sont à valeurs entières sur **Z**, par la condition suivante :

$$\text{si } P(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \binom{x}{n}, \quad \text{alors } v_P(a_n) - L(n, i) \geqq 0$$
$$(\text{pour } i \leqq n \leqq m \text{ et } 0 \leqq i \leqq r)$$

pour tout nombre premier P.

Dans ce paragraphe, je généralise ces résultats aux corps de nombres en utilisant une idée de POLYA et OSTROWSKI ([7] et [8]).

DÉFINITION III.1. — *Soit $P(x)$ un polynôme de $\mathcal{K}[x]$. On dit que $P(x)$ est à valeurs entières sur $\mathfrak{A}$ ainsi que ses différences finies divisées* 1re, ..., j-ième *si ,et seulement si,*
$\Delta^r_{m_1, \ldots, m_r}(P(x)) \in \mathfrak{A}$ *pour* $(m_1, m_2, \ldots, m_r, x) \in \mathfrak{A}^{r+1}$ *et* $0 \leqq r \leqq j$.
On note $B_r(\mathcal{K})$ l'espace des polynômes de $\mathcal{K}[x]$ possédant cette propriété.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{K}$, on définit une suite T.B.R.B.O. de $\hat{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{P}}$ formée d'éléments de $\mathfrak{A}$ (c'est toujours possible car $\mathfrak{A}$ est dense dans $\hat{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{P}}$, [1], prop. 3 *bis*, rem. 6), que l'on notera $u_{0,\mathfrak{P}}, u_{1,\mathfrak{P}}, \ldots,$ et on définit aussi une suite de polynômes d'interpolation

$$Q_n^{(\mathfrak{P})}(x) = \frac{(x - u_{0,\mathfrak{P}}) \ldots (x - u_{n-1,\mathfrak{P}})}{(u_{n,\mathfrak{P}} - u_{0,\mathfrak{P}}) \ldots (u_{n,\mathfrak{P}} - u_{n-1,\mathfrak{P}})}.$$

Tout polynôme $P(x)$ de $\mathcal{K}[x]$ pourra donc se développer sur la base des $Q_n^{(\mathfrak{P})}(x)$ de la manière suivante $P(x) = \sum_{n=0}^{m} a_{n,\mathfrak{P}} Q_n^{(\mathfrak{P})}(x)$.

On définit de même, pour chaque idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathcal{K}$ les quantités $L(n, j, \mathfrak{P})$ pour $n \geqq j$ comme étant les quantités $L(n, j)$ relatives à $\hat{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{P}}$.

PROPOSITION III.1. — *Pour que le polynôme $P(x)$ à coefficients dans $\mathcal{K}$ appartienne à $B_r(\mathcal{K})$, il faut et il suffit que*

$$v_{\mathfrak{P}}(a_{n,\mathfrak{P}}) - L(n, j, \mathfrak{P}) \geqq 0,$$
$$\forall\, n \geqq j, \quad \forall\, \mathfrak{P} \textit{ idéal premier de } \mathcal{K} \quad \textit{et} \quad \forall\, j \textit{ tel que } 0 \leqq j \leqq r.$$

La démonstration est immédiate à partir du théorème I.1.

Écrivons les polynômes de degré m de $B_r(\mathcal{K})$ sous la forme $P_i(x) = (\alpha_i/m!)\, x^m$ + termes de degré inférieur à m. On note

$$\mathfrak{a}_m^{(r)} = \{ \alpha_i \}_{i \in I} \cup \{ 0 \}.$$

Proposition III.2. — *$\mathfrak{a}_m^{(r)}$ est un idéal entier de $\mathfrak{A}$.*

En effet, $\mathfrak{a}_m^{(r)}$ est un idéal de $\mathcal{K}$, car Δ^j est un opérateur $\mathfrak{A}$-linéaire de $\mathcal{K}[x]$ dans $\mathcal{K}[x, m_1, \ldots, m_j]$.

Posons

$$\delta^n P(0) = P(n) - \binom{n}{1} P(n-1) + \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} P(n-k) + \ldots + (-1)^n P(0),$$

alors

$$P(x) = P(0) + \binom{x}{1} \delta^1 P(0) + \ldots + \binom{x}{m} \delta^m P(0).$$

Donc $\alpha_i = \delta^m P(0) \in \mathfrak{A}$.

On pose

$$\Omega(m, \mathfrak{P}) = \Sigma_{i \geq 1} \left[\frac{m}{q^i} \right]$$

et

$$\lambda(m, j, \mathfrak{P}) = \inf_{0 \leq r \leq j} (\Omega(m, \mathfrak{P}) - L(m, r, \mathfrak{P})).$$

Proposition III.3. — *Si $P(x)$ est un polynôme primitif à coefficients entiers de degré m, alors, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{A}$, on a*

1° $\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l(P(x))) \leq \lambda(m, j, \mathfrak{P})$, $\forall j \geq 0$.

2° *Il existe un polynôme primitif à coefficients entiers $H_m(x)$ de degré m tel que*

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l(H_m(x))) = \lambda(m, j, \mathfrak{P}), \quad \textit{et ceci } \forall\, \mathfrak{P}.$$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

avec

$$\inf_{0 \leq i \leq m} v_{\mathfrak{P}}(a_i) = 0 \quad \textit{pour tout } \mathfrak{P}.$$

Dans $\mathcal{K}_{\mathfrak{P}}$, on a

$$P(x) = b_{0,\mathfrak{P}} + b_{1,\mathfrak{P}} P_1^{(\mathfrak{P})}(x) + \ldots + b_{m,\mathfrak{P}} P_m^{(\mathfrak{P})}(x),$$

où $P_m^{(\mathfrak{P})}(x) = (x - u_{0,\mathfrak{P}})(x - u_{1,\mathfrak{P}}) \ldots (x - u_{m-1,\mathfrak{P}})$.

On a

$$\inf_{0 \leq i \leq m} v_{\mathfrak{P}}(a_i) = \inf_{0 \leq i \leq m} v_{\mathfrak{P}}(b_{i,\mathfrak{P}}) = 0$$

(c'est immédiat car la matrice de changement de base est triangulaire avec des 1 sur la diagonale).

Le théorème I.1 indique que

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l (P (x))) = \inf_{j \leq i \leq m} \left(v_{\mathfrak{P}} \left(b_{i, \mathfrak{P}}\right) + \lambda (i, j, \mathfrak{P})\right).$$

Si l'on avait

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l (P (x))) > \lambda (m, j, \mathfrak{P}),$$

on aurait, pour tout $i \leq m$,

$$v_{\mathfrak{P}} \left(b_{i, \mathfrak{P}}\right) > \lambda (m, j, \mathfrak{P}) - \lambda (i, j, \mathfrak{P}).$$

Or la fonction $i \to \lambda (i, j, \mathfrak{P})$ est une fonction non décroissante de i (*voir* [2]). Donc on aurait $v_{\mathfrak{P}} \left(b_{i, \mathfrak{P}}\right) > 0$, $\forall\, i \leq m$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur $P (x)$.

La première partie est démontrée.

D'autre part, on sait que l'on a (théorème I.1) :

$$\inf_{0 \leq l \leq j} \left(M_l \left(P_m^{(\mathfrak{P})} (x)\right)\right) = \lambda (m, j, \mathfrak{P}).$$

Construisons une suite finie $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ (dépendant de m) d'éléments de $\mathfrak{A}$ telle que $v_{\mathfrak{P}} \left(u_i - u_{i, \mathfrak{P}}\right) \geq \Omega (m, \mathfrak{P})$ pour tout $\mathfrak{P}$ (c'est possible puisque les $v_{\mathfrak{P}}$ sont indépendantes et que $\Omega (m, \mathfrak{P}) = 0$ pour presque tout $\mathfrak{P}$). Posons

$$H_m (x) = (x - u_0) (x - u_1) \ldots (x - u_{m-1}).$$

Il est clair que

$$\inf_{0 \leq l \leq j} (M_l (H_m (x))) = \lambda (m, j, \mathfrak{P}).$$

La proposition est démontrée.

Posons

$$\mathfrak{J} (m, j) = \Pi_{\mathfrak{P} \text{ premier}}\, \mathfrak{P}^{-\lambda (m, j, \mathfrak{P})}$$

et

$$\mathfrak{J} (m, j, \mathfrak{P}_1) = \left(\Pi_{\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_1} \mathfrak{P}^{-\lambda (m, j, \mathfrak{P})}\right) \mathfrak{P}_1^{-\lambda (m, j, \mathfrak{P}_1) - 1}.$$

$\mathfrak{J} (m, j)$ et $\mathfrak{J} (m, j, \mathfrak{P}_1)$ sont des idéaux fractionnaires de $\mathfrak{A}$ car $\lambda (m, j, \mathfrak{P}) = 0$ pour presque tout $\mathfrak{P}$.

PROPOSITION III.4 : $\mathfrak{J} (m, j) = \mathfrak{a}_m^{(j)}/(m\,!)$.

Soit χ un élément de $\mathfrak{J} (m, j)$ tel que $v_{\mathfrak{P}} (\chi) = -\lambda (m, j, \mathfrak{P})$ pour un $\mathfrak{P}$ fixé.

D'après la proposition III.3, $\chi H_m (x) \in B_j (\mathcal{K})$. Soit χ' un élément de $\mathfrak{J} (m, j, \mathfrak{P})$ tel que $v_{\mathfrak{P}} (\chi') = -\lambda (m, j, \mathfrak{P}) - 1$, alors d'après la proposition III.3 $\chi' H_m (x) \notin B_j (\mathcal{K})$.

Donc $\chi\, m\,! \in \mathfrak{a}_m^{(j)}$ et $\chi'\, m\,! \notin \mathfrak{a}_m^{(j)}$.

Par conséquent,

$$v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a}_m^{(j)}) = v_{\mathfrak{P}}(m\,!) - \lambda(m, j, \mathfrak{P}) \quad \text{et ceci pour tout } \mathfrak{P},$$

donc

$$\mathfrak{I}(m, j) = \frac{\mathfrak{a}_m^{(j)}}{(m\,!)}.$$

THÉORÈME III.1 : $B_j(\mathcal{K}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} \mathfrak{I}(m, j)\, H_m(x)$.

En effet, soit $P(x)$ un polynôme de degré m appartenant à $B_j(\mathcal{K})$.

$$P(x) = \frac{\alpha}{m\,!} x^m + \text{termes de degré inférieur},$$

où $\alpha \in \mathfrak{a}_m^{(j)}$, donc $\alpha/m\,! \in \mathfrak{I}(m, j)$, et par conséquent

$$P_1(x) = P(x) - \frac{\alpha}{m\,!} H_m(x) \in B_j(\mathcal{K}),$$

et est de degré strictement inférieur à m.

Donc tout polynôme $P(x)$ de $B_j(\mathcal{K})$ se met sous la forme

$$P(x) = \beta_0 H_0(x) + \beta_1 H_1(x) + \ldots + \beta_m H_m(x) \qquad \text{où} \quad \beta_i \in \mathfrak{I}(i, j) \quad (0 \leqq i \leqq m).$$

La décomposition est unique, car

$$\mathfrak{I}(m, j)\, H_m(x) \cap \mathfrak{I}(n, j)\, H_n(x) = 0 \qquad \text{si} \quad m \neq n.$$

COROLLAIRE III.1. — *$B_j(\mathcal{K})$ est toujours un $\mathcal{A}$-module libre.*

C'est clair, car $\mathfrak{I}(m, j)\, H_m(x)$ est $\mathcal{A}$-module de type fini sans torsion, et comme $\mathcal{A}$ est de Dedekind, il est projectif.

Par conséquent, $B_j(\mathcal{K})$ qui est somme directe de projectifs est projectif, et comme il n'est pas de type fini sur un anneau de Dedekind, il est libre (*voir* [4], exercices).

On dit que $B_j(\mathcal{K})$ admet une base régulière si, et seulement si, il admet une base formée de polynômes de degré croissant.

PROPOSITION III.5. — *$B_j(\mathcal{K})$ admet une base régulière si, et seulement si, $\mathfrak{a}_m^{(j)}$ est principal pour tout entier $m \geqq 0$.*

Pour la démonstration, *voir* [2] ou [8].

COROLLAIRE III.2. — *$B_j(\mathcal{K})$ admet une base régulière si, et seulement si, $\mathfrak{I}(m, j)$ est principal pour $m \geqq 0$.*

COROLLAIRE III.3. — *$B_j(\mathcal{K})$ admet une base régulière si, et seulement si, le produit des idéaux premiers de même norme est principal.*

Pour la démonstration, *voir* [2].

Notons $B_\infty(\mathcal{K})$ l'espace des polynômes à valeurs entières de $\mathcal{K}[x]$ dont toutes les différences finies divisées sont à valeurs entières, et $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{K})$ l'espace des polynômes à valeurs entières dont toutes les dérivées sont à valeurs entières.

Notons

$$\mathfrak{J}(m, \infty) = \Pi_{\mathfrak{P}\text{ premier}}\, \mathfrak{P}^{-(\Omega(m, \mathfrak{P}) - [n/q])}.$$

PROPOSITION III.6. : $B_\infty(\mathcal{K}) = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{K})$.

Pour la démonstration, *voir* [2].

THÉORÈME III.2 : $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{K}) = \bigoplus_{m \in \mathbf{N}} \mathfrak{J}(m, \infty)\, H_m(x)$.

La démonstration est analogue à celle du théorème III.1 et repose sur le fait que

$$\max_{j \geq 0} L(n, j, \mathfrak{P}) = \left[\frac{n}{q}\right] \qquad (\textit{voir } [2]).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). — Interpolation p-adique, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 117-180 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1964).

[2] BARSKY (D.). — *Polynômes dont les dérivées sont à valeurs entières et fonctions k-lipschitziennes sur un anneau local*, Thèse 3e cycle, Math., Univ. Paris-VII, 1972.

[3] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*, chap. 7, 2e édition. — Paris, Hermann, 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1179; *Bourbaki*, 14).

[4] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*, Chap. 7. — Paris, Hermann, 1965 (*Act. scient. et ind.*, 1314; *Bourbaki*, 31).

[5] CARLITZ (L.). — A note on integral-valued polynomials, *Koninkl. nederl. Akad. Wetensch.*, *Proc.*, séries A, t. 62, 1959, p. 294-299.

[6] HELSMOORTEL (E.). — Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, série A, 1970, p. 546-548.

[7] OSTROWSKI (A.). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpen, *J. für die reine und ang. Math.*, t. 149, 1919, p. 117-124.

[8] POLYA (G.). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. für die reine und ang. Math.*, t. 149, 1919, p. 97-116.

[9] STRAUS (E. G.). — On the polynomials whose derivatives have integral values at the integers, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 2, 1951, p. 24-27.

(Texte reçu le 4 juillet 1973.)

Daniel BARSKY,
36, rue de Penthièvre,
75008 Paris.