BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS DIGNE

Sections des fibrés vectoriels sur une courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 151-159
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__151_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 151-159.

SECTIONS DES FIBRÉS VECTORIELS SUR UNE COURBE

PAR

FRANÇOIS DIGNE

RÉSUMÉ. — Étant donnée une courbe algébrique lisse X de genre $g \geq 2$, il existe, pour tout couple (r, d), une famille de classes de fibrés vectoriels sur X de rang r et de degré d, comprenant les classes de fibrés indécomposables, et paramétrée par une variété irréductible. Si $d \leq r(g-1)$, un ouvert dense de cette variété correspond à des fibrés simples n'ayant pas de sections globales.

1. Introduction

Si on considère une courbe lisse et projective X sur un corps k algébriquement clos, les faisceaux inversibles de degré d sur X sont « paramétrés » par le schéma de Picard $\mathbf{P}_d$ de X. Si $d \leqq g-1$ (où g désigne le genre de X), il existe un ouvert (dense) de $\mathbf{P}_d$ tel que les faisceaux inversibles correspondants n'aient pas de sections globales non nulles. L'objet de cette étude est de généraliser ce résultat à des fibrés vectoriels de rang quelconque (fini) sur X.

2. Fibrés de rang 1

Soient X la courbe, et g son genre. Si E est un fibré vectoriel sur X, nous noterons

$$h^0(E) = \dim H^0(X, \mathbf{E}) \qquad \text{et} \qquad h^1(E) = \dim H^1(X, \mathbf{E}),$$

où $\mathbf{E}$ désigne le faisceau localement libre associé à E.

Si E est de rang 1, il lui est canoniquement associé une classe de diviseurs sur X dont le degré noté $d = \operatorname{dg} E$ sera aussi appelé degré de E. $h^0(E)$ sera aussi noté $h^0(D)$, où D est un diviseur associé à E.

PROPOSITION 1 (*cf* [7], chap. II). — On a

$$\begin{cases} h^0(E)-h^1(E)=d+1-g & \text{(théorème de Riemann-Roch),} \\ h^1(E)=h^0(K\otimes E^*), & \text{où } K \text{ est le fibré canonique sur } X \\ & \quad \text{(de degré } 2g-2) \text{ (dualité de Serre).} \end{cases}$$

En appliquant la dualité, nous pouvons nous restreindre à l'étude de $h^0(E)$ et de $h^1(E)$ quand $d \geqq g-1$.

Le théorème de semi-continuité de Grauert ([5], p. 50), nous montre que $h^0(E)$ et $h^1(E)$ sont constants sur un ouvert de $\mathbf{P}_d$ et ne peuvent qu'augmenter par spécialisation.

(i) Si $d \geqq g$: Soient $M_1, \ldots, M_d$ d points génériquement indépendants sur k de X. On a $h^1(\sum_1^d M_i) = 0$, car

$$h^1(0)=g \qquad \text{et} \qquad h^1(D+M)=\sup(h^1(D)-1,\ 0),$$

si M désigne un point générique sur le corps de rationnalité de D ([7], chap. V, lemme 3).

(ii) Si $d = g-1$: Soit D un diviseur de degré 0 non principal, et soient $M_1, \ldots, M_{g-1}$ des points de X génériquement indépendants sur k. On a

$$h^1(D+\textstyle\sum_1^{g-1} M_i)=\sup(0,\ h^1(D)-(g-1))=0$$

[car $h^1(D) = g-1$].

Donc, si $d \geqq g-1$, il existe un diviseur, donc un fibré E de rang 1, de degré d tel que $h^0(E) = 0$.

Donc, sur un ouvert (dense) de $\mathbf{P}_d$, on a $h^1(E) = 0$ et comme de plus, si $d < 0$, $h^0(E) = 0$, on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Si E est un fibré vectoriel de rang* 1 *et de degré d sur X, alors* :

(*a*) *Si* $g = 0$ *et* $d \leqq -1$, $h^0(E) = 0$, $h^1(E) = -d-1$;
Si $g = 0$ *et* $d \geqq -1$, $h^0(E) = d+1$, $h^1(E) = 0$.

(*b*) *Si* $g \geqq 1$:

(i) *si* $d \leqq -1$, $h^0(E) = 0$, $h^1(E) = g-d-1$;

(ii) *si* $0 \leqq d \leqq g-1$, $h^0(E) = 0$, $h^1(E) = g-d-1$ « *en général* »;

(iii) *si* $g \leqq d \leqq 2g-2$, $h^0(E) = d+1-g$, $h^1(E) = 0$ « *en général* »;

(iv) *si* $d \geqq 2g-1$, $h^0(E) = d+1-g$, $h^1(E) = 0$,

où le terme « en général » signifie sur un ouvert dense de $\mathbf{P}_d$.

3. Fibrés vectoriels de rang quelconque : propriétés générales

Degré d'un fibré vectoriel. — Pour tout fibré E de rang r (noté $\operatorname{rg} E$), on appellera degré de E ($\operatorname{dg} E$) le degré de la puissance extérieure r-ième de E (notée $\det E$).

Pour toute suite exacte $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$, on a

$$\det E \simeq \det E' \otimes \det E'',$$

donc $\operatorname{dg} E = \operatorname{dg} E' + \operatorname{dg} E''$. De même, la formule

$$\det(E \otimes E') = (\det E)^{\otimes r'} \otimes (\det E')^{\otimes r}$$

montre que

$$\operatorname{dg} E \otimes E' = r' \operatorname{dg} E + r \operatorname{dg} E'$$

(où $r = \operatorname{rg} E$ et $r' = \operatorname{rg} E'$).

Clivages. — Soit E un fibré de rang r. Toute section méromorphe engendre un sous-fibré de rang 1. Donc on peut toujours définir un clivage

$$E_0 = (0) \subset E_1 \subset \ldots \subset E_r = E,$$

où $\operatorname{rg} E_i = i$.

THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH. — *Si E est de rang r et de degré d, en appliquant le théorème de Riemann-Roch aux quotients successifs d'un clivage, on obtient :*

$$h^0(E) - h^1(E) = d + r(1-g).$$

COROLLAIRE :

$$\begin{aligned} &\textit{Si} \quad d < r(g-1), \qquad h^1(E) \neq 0. \\ &\textit{Si} \quad d > r(g-1), \qquad h^0(E) \neq 0. \end{aligned}$$

Dualité de Serre. — On a une dualité entre $H^0(X, \mathbf{E})$ et $H^1(X, \mathbf{E}^* \otimes \mathbf{K})$ (Grothendieck [3]).

DÉFINITION. — Un fibré E sur X sera dit *indécomposable* s'il n'est pas somme directe de deux sous-fibrés propres.

Nous n'étudierons ici que des fibrés indécomposables. $\mathscr{E}(r, d)$ désignera l'*ensemble des classes de fibrés indécomposables* de rang r et de degré d.

Courbes de genre 0. — Un théorème de Grothendieck [2] permet d'affirmer que les seuls fibrés indécomposables sont les fibrés de rang 1, lesquels ont été étudiés au paragraphe 2.

Courbes de genre $g \geqq 1$ (L'étude qui suit est due à ATIYAH [1] et à KOSZUL [4]). — Si (E_i) désigne un clivage d'un fibré E de rang r et de degré d, le degré des sous-fibrés de rang 1 de E est borné par sup $(\text{dg } E_i/E_{i-1})$, car si $L \subset E$ est un tel sous-fibré, il existe un morphisme non nul de L dans E_i/E_{i-1} pour un certain i.

DÉFINITION. — On appelle *clivage maximal* de E un clivage tel que, pour tout i, E_i/E_{i-1} soit un sous-fibré de degré maximum dans E/E_{i-1}. Tout fibré admet un clivage maximal.

LEMME. — *Si E est indécomposable et si (E_i), $i = 0, 1, \ldots, r$, est un clivage maximal de E, alors, pour tout $i > 0$,*

$$\text{dg}(E_i/E_{i-1}) \geqq \text{dg}\, E_1 + 2(1-g)(i-1).$$

Montrons-le par récurrence sur i.

Considérons la suite exacte $0 \to E_i \to E \to E/E_i \to 0$. Cette extension est non triviale, donc $H^1(X, \mathbf{Hom}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i)) \neq 0$. [car les classes d'extensions sont en bijection avec $H^1(X, \mathbf{Hom}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_i))$].

Donc $H^0(X, \mathbf{Hom}(\mathbf{E}_i \otimes \mathbf{K}^*, \mathbf{E}/\mathbf{E}_i)) \neq 0$, où K est le fibré canonique sur X. Soit f un homomorphisme non nul de $E_i \otimes K^*$ dans E/E_i, comme f est non nul, il existe $j \leqq i$ tel que f induit un homomorphisme non nul de $E_j/E_{j-1} \otimes K^*$ dans E/E_i; donc il existe un sous-fibré L' de rang 1 de E/E_i tel que

$$\begin{aligned} \text{dg } L' &\geqq \text{dg}(E_j/E_{j-1} \otimes K^*) = \text{dg}\, E_j/E_{j-1} - 2j(g-1) \\ &\geqq \text{dg}\, E_1 + 2(1-g)(j-1) + 2j(1-g) \end{aligned}$$

(par hypothèse de récurrence). Donc

$$\text{dg } L' \geqq \text{dg}\, E_1 + 2j(1-g) \geqq \text{dg}\, E_1 + 2i(1-g).$$

Le clivage étant maximal,

$$\text{dg}\, E_{i+1}/E_i \geqq \text{dg } L' \geqq \text{dg}\, E_1 + 2i(1-g).$$

PROPOSITION 2. — *Soit E un fibré vectoriel indécomposable de rang r et de degré d, et soit L un sous-fibré de rang 1 de E, alors*

$$\mathrm{dg}\, L \leqq d/r+(r-1)(g-1).$$

Cette proposition résulte du lemme précédent en ajoutant les inégalités obtenues pour $i = 1, 2, \ldots, r$.

COROLLAIRE. — *Si X est une courbe de genre g et E un fibré vectoriel indécomposable de rang r et de degré d sur X :*

(i) *si* $d < r(1-r)(g-1)$, $h^0(E) = 0$;

(ii) *Si* $d > r(1+r)(g-1)$, $h^1(E) = 0$.

En effet, si $d < r(1-r)(g-1)$, tout sous-fibré de rang 1 de E est de degré strictement négatif d'après la proposition. Le deuxième résultat se déduit du premier par dualité de Serre.

PROPOSITION 3. — *Si $E \xrightarrow{f} F$ est un morphisme non nul de fibrés vectoriels sur X, on a la factorisation suivante :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & E & \stackrel{p}{\longrightarrow} & E_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \Big\downarrow f & i & \Big\downarrow \varphi & & \\ 0 & \longleftarrow & F_2 & \longleftarrow & F & \longleftarrow & F_1 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

où $f = i \circ \varphi \circ p$, $\mathrm{rg}\, E_2 = \mathrm{rg}\, F_1$, et φ est de rang maximum (c'est-à-dire $\det \varphi \neq 0$).

Cela résulte des propriétés des modules projectifs sur les anneaux de Dedekind.

Fibrés simples. — On dit qu'un fibré vectoriel E est simple si $\dim H^0(X, \mathbf{End}\, \mathbf{E}) = 1$.

Un fibré simple est évidemment indécomposable.

Existence d'une valeur « générale » de $h^0(E)$ et $h^1(E)$.

PROPOSITION 4. — *Pour tout couple d'entiers (r, d) (avec $r > 0$), il existe une famille $\mathscr{A}(r, d)$ de classes de fibrés vectoriels, comprenant $\mathscr{E}(r, d)$, qui est paramétrée par une variété algébrique $S_{r,d}$, irréductible et lisse.*

La démonstration de cette proposition figure dans [6], § 3, et utilise un théorème d'Atiyah ([1], th. 3).

Le théorème de semi-continuité de Grauert nous permet alors d'affirmer que $h^0(E)$ [resp. $h^1(E)$] est constant sur un ouvert (dense) de $S_{r,d}$, et que la « valeur générale » ainsi définie est égale à la plus petite valeur possible pour $h^0(E)$ [resp. $h^1(E)$] quand E est un fibré de $\mathscr{A}(r, d)$.

De plus, les fibrés simples, étant définis par $h^0(E^* \otimes E) = 1$, correspondent à un ouvert de $S_{r,d}$. Nous montrerons que cet ouvert est non vide. La valeur générale de $h^0(E)$ pour E dans $\mathscr{A}(r, d)$ sera donc aussi la plus petite valeur de $h^0(E)$ pour E simple de rang r et de degré d.

Remarque 1. — Tout fibré simple étant indécomposable, la valeur générale trouvée pourra être considérée comme valeur générale de $h^0(E)$ pour E dans $\mathscr{E}(r, d)$.

Remarque 2. — Dans le cas $g = 1$, une étude détaillée faite par ATIYAH [1] et KOSZUL [4] montre que, pour tout fibré vectoriel indécomposable de rang r et de degré 0, il existe un unique sous-fibré de rang d et de degré 0, et qu'on définit ainsi une bijection des classes de fibrés indécomposables de rang r et de degré 0 sur les classes de fibrés de rang 1 et de degré 0. De plus, si L est le fibré de rang 1 associé à E, E possède un clivage dont tous les quotients sont isomorphes à L (en particulier E n'est pas simple) : Donc, on peut énoncer le résultat suivant.

PROPOSITION 5. — *Si* $g = 1$,

(i) *Il existe une bijection entre les points de la jacobienne de X et les classes de fibrés indécomposables de rang r et de degré* 0.

(ii) *Pour toute classe de fibrés E de rang r et de degré* 0, *sauf une (celle correspondant à l'élément neutre de la jacobienne), on a* $h^0(E) = h^1(E) = 0$.

D'autre part, le corollaire à la proposition 2 nous montre que si $g = 1$ le seul cas à étudier est $d = 0$. Dans la suite, nous pourrons donc supposer $g \geqq 2$. Nous allons, pour tout rang r et tout degré d, construire un fibré vectoriel simple E de rang r et de degré d et, dans le cas où $d \leqq r(g-1)$, nous montrerons qu'on peut construire E de manière qu'il n'ait pas sections globales.

4. Construction de fibrés simples sans sections globales

Plaçons-nous sur une courbe X de genre $g \geqq 2$, et posons $d = kr + \rho$ avec $0 \leqq \rho < r$. Soit L un fibré vectoriel sur X de rang 1 et de degré $k+1$. Soient L_1 et L_2 deux fibrés de rang 1 et de degré k non isomorphes.

Si $\rho > 0$, nous supposerons, de plus, que

$$h^0(L_1^* \otimes L) = h^0(L_2^* \otimes L) = 0.$$

Il est possible de trouver de tels fibrés car $\mathrm{dg}\,(L_i^* \otimes L) = 1$, et d'après le théorème 1, la valeur générale de $h^0(E)$ est 0 si $d = r = 1$.

Considérons la suite d'extensions non triviales ci-dessous :

$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad E_1 = L_1, \\
0 \to E_1 \quad\ \ \to E_2 \qquad \to L_2 \to 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
0 \to E_{r-\rho-1} \to E_{r-\rho} \quad \to L_2 \to 0, \\
0 \to E_{r-\rho} \quad \to E_{r-\rho+1} \to L \to 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
0 \to E_{r-1} \quad \to E_r \qquad \to L \to 0,
\end{array}$$

(On n'utilise le fibré L que si $\rho \neq 0$.)

Les extensions de L_2 par E_i $(i < r-\rho)$ sont classées par $H^1(X, \mathbf{L}_2^* \otimes \mathbf{E}_i)$, or $\mathrm{dg}\,(L_2^* \otimes E_i) = 0$ et $\mathrm{rg}\,(L_2^* \otimes E_i) = i$, donc $h^1(L_2^* \otimes E_i) \neq 0$ d'après Riemann-Roch. Il existe donc une extension non triviale de L_2 par E_i. De même,

$$\mathrm{dg}(L^* \otimes E_j) = \rho - r \qquad \text{et} \qquad \mathrm{rg}(L^* \otimes E_j) = j \qquad (j \geqq r-\rho),$$

donc $h^1(L^* \otimes E_j) \neq 0$. Soit $E = E_r$, on a

$$\mathrm{rg}\,E = r \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dg}\,E = d = kr + \rho.$$

Si $d \leqq r(g-1)$, alors $k \leqq g-1$, donc on peut prendre

$$h^0(L_1) = h^0(L_2) = 0;$$

de plus, si $\rho \neq 0$, $k < g-1$, donc on peut prendre $h^0(L) = 0$ (d'après le théorème 1). Dans ce cas, on obtient $h^0(E) = 0$.

LEMME :

(i) *Tout sous-fibré de rang* 1 *de* E *est de degré au plus* k.

(ii) *Tout sous-fibré de rang* 1 *de* $E_{r-\rho}$ *différent de* E_1 *est de degré au plus* $k-1$.

(iii) *Le seul sous-fibré de rang* 1 *de* E, *isomorphe à* L_1, *est* E_1.

(iv) *Il n'y a pas de sous-fibré de rang* 1 *de* E *isomorphe à* L_2.

En effet, si L' est un sous-fibré de rang 1 de E et si i est le plus petit indice tel que $L' \subset E_i$, le morphisme composé $L' \to E_i \to E_i/E_{i-1}$ est non nul (si $i \geqq 2$). Donc

$$\operatorname{dg} L' \leqq \operatorname{dg} E_i/E_{i-1} \leqq k+1.$$

Si $\operatorname{dg} L' = k+1$, $L' \simeq E_i/E_{i-1}$, et l'extension de E_i/E_{i-1} par E_{i-1} serait scindée. Donc $\operatorname{dg} L' \leqq k$. Pour la même raison, si $i \leqq r-\rho$, $\operatorname{dg} E_i/E_{i-1} = k$, donc $\operatorname{dg} L' \leqq k-1$ si $L' \neq E_1$. D'où les deux premiers énoncés.

Supposons que L' soit isomorphe à L_1, et soit i comme ci-dessus, tel que $L' \subset E_i$ et $L' \not\subset E_{i-1}$. Comme $h^0(L_1^* \otimes L) = 0$ et $h^0(L_1^* \otimes L_2) = 0$, il n'existe pas de morphisme non nul de L' dans E_i/E_{i-1}, si $i \geqq 2$, donc $i = 1$, et $L' = E_1$. Un raisonnement identique démontre (iv).

Proposition 6. — *E est simple.*

Soit $\varphi : E \to E$. La restriction de φ à E_1, si elle n'est pas nulle se factorise (proposition 3) par un sous-fibré de rang 1, L', de E avec $\operatorname{dg} L' \geqq \operatorname{dg} E_1 = k$. D'après le lemme, $\operatorname{dg} L' = k$, et on en déduit que $L' \simeq E_1$, donc $L' = E_1$. E_1 étant simple, tout endomorphisme de E_1 est une homothétie. Donc $\varphi - \lambda I$ est nul sur E_1. On est ramené à φ nul sur E_1, c'est-à-dire à $\bar{\varphi}_1 : E/E_1 \to E$. La restriction de $\bar{\varphi}_1$ à E_2/E_1, si elle est non nulle, se factorise par un sous-fibré L'' de E de rang 1 et $\operatorname{dg} L'' \geqq \operatorname{dg} E_2/E_1 = k$, donc $\operatorname{dg} L'' = k$ et $L'' \simeq L_2$, ce qui est impossible d'après le lemme. Donc $\bar{\varphi}_1$ est nulle sur E_2/E_1 : φ se factorise par $\bar{\varphi}_2 : E/E_2 \to E$. Par récurrence on montre que φ se factorise par $\bar{\varphi}_{r-\rho} : E/E_{r-\rho} \to E$. La restriction de $\bar{\varphi}_{r-\rho}$ à $E_{r-\rho+1}/E_{r-\rho}$, si elle est non nulle, se factorise par un sous-fibré de E de rang 1 et degré $k+1$, ce qui est impossible. En continuant ainsi, on voit que φ est nul. D'où le résultat.

Les propositions 5 et 6 nous permettent alors d'énoncer les théorèmes suivants :

Théorème 2. — *Si $g \geqq 2$, pour tout rang et tout degré, il existe un fibré vectoriel simple.*

Théorème 3. — *Si X est une courbe projective lisse de genre g sur un corps algébriquement clos, la valeur générale de $h^0(E)$, pour un fibré vectoriel indécomposable E sur X de rang r et de degré $d \leqq r(g-1)$, est $h^0(E) = 0$.*

Corollaire. — *La valeur générale de $h^0(E)$ pour un fibré vectoriel sur X indécomposable, de rang r et de degré $d \geqq r(g-1)$, est $h^0(E) = d + r(1-g)$.*

Ces résultats peuvent se résumer dans le tableau suivant si $g \geqq 1$:

(i) $d < r(1-r)(g-1)$:

$$h^0(E) = 0,$$
$$h^1(E) = -d+r(g-1);$$

(ii) $r(1-r)(g-1) \leqq d < r(g-1)$:

$$h^0(E) = 0 \quad \text{en général},$$
$$h^1(E) = -d+r(g-1) \quad \text{en général},$$
$$h^1(E) \neq 0;$$

(iii) $d = r(g-1)$:

$$h^0(E) = 0 \quad \text{en général},$$
$$h^1(E) = 0 \quad \text{en général};$$

(iv) $r(g-1) < d \leqq r(r+1)(g-1)$:

$$h^0(E) = d+r(1-g) \quad \text{en général},$$
$$h^1(E) = 0 \quad \text{en général},$$
$$h^0(E) \neq 0;$$

(v) $r(r+1)(g-1) < d$:

$$h^0(E) = d+r(1-g),$$
$$h^1(E) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah (M. F.). — Vector bundles over on elliptic curve, *Proc. London math. Soc.*, Series 3, t. 7, 1957, p. 414-452.

[2] Grothendieck (A.). — Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, *Amer. J. of Math.*, t. 79, 1957, p. 121-138.

[3] Grothendieck (A.). — Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents, *Séminaire Bourbaki*, 9e année, 1956-1957, nº 149, 25 p.

[4] Koszul (J.-L.). — Fibrés vectoriels sur les courbes elliptiques, *Séminaire Bourbaki*, 10e année, 1957-1958, nº 154, 10 p.

[5] Mumford (D.). — *Abelian varieties.* — Bombay, Tata Institute, 1970 (*Tata Institute of fundamental Research. Studies in Mathematics*, 5).

[6] Narasimhan (M. S.) et Seshadri (C. S.). — Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface, *Annals of Math.*, Series 2, t. 82, 1965, p. 540-567.

[7] Serre (J.-P.). — *Groupes algébriques et corps de classes.* — Paris, Hermann, 1959 (*Act. scient. et ind.*, 1264; *Publ. Inst. math. Univ. Nancago*, 7).

(Texte reçu le 10 novembre 1973.)

François Digne,
104, boulevard Arago,
75014 Paris.