

BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD CŒURÉ

**Propriété de Runge et enveloppe d'holomorphie de
certaines variétés analytiques de dimensions infinies**

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 281-288

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__281_0

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**PROPRIÉTÉ DE RUNGE ET ENVELOPPE D'HOLOMORPHIE
DE CERTAINES VARIÉTÉS ANALYTIQUES
DE DIMENSIONS INFINIES**

PAR

GÉRARD COEURÉ

Résumé. — Dans un espace du type $X \times E$, où X est une variété de Stein et E est un espace localement convexe, séparé et complexe, on étudie quelques propriétés des fonctions analytiques sur un ouvert Ω de $X \times E$ dont les sections suivant E sont disquées. Si X est de dimension finie, on montre que $(\omega \times E) \cap \Omega$ et Ω forment une paire de Runge pour tout ouvert de Stein ω dans X , dont on déduit que l'enveloppe d'holomorphie de Ω est univalente au-dessus de l'enveloppe d'holomorphie de X . Sans hypothèse de finitude sur X , on obtient le même résultat en supposant que X est une enveloppe d'holomorphie convenable.

Introduction.

Dans cet article, l'abréviation e. l. c. désignera toujours un espace localement convexe séparé construit sur le corps des complexes \mathbf{C} .

On rappelle qu'une application f d'un ouvert ω d'un e. l. c. F dans un autre G , supposé séquentiellement complet, est dite analytique si, pour tout $x_0 \in \omega$, il existe une suite $f^n(x_0)$ d'applications polynomiales homogènes continues de F dans G , $d^0 f^n = n$, telle que, pour toute semi-norme p , continue sur G , il existe un voisinage V de l'origine de F , où la série $\sum_{n \geq 0} f^n(x_0)(h)$ converge uniformément vers $f(x_0 + h)$ relativement à p . On parlera de fonctions analytiques lorsque $G = \mathbf{C}$.

Dans la suite, X est une variété analytique connexe modelée sur un e. l. c. F séquentiellement complet; on se donne aussi un autre e. l. c. E qui pourra être considéré comme un espace de paramètres. Dans l'espace $X \times E$, on se donne un ouvert Ω possédant la propriété suivante :

« Pour tout $x \in X$, la section Ω_x est un ouvert disqué non vide de E . On dira que Ω est X -équilibré ».

Cet article a pour but d'étudier une propriété du type Runge sur Ω et l'enveloppe d'holomorphie de Ω . A cette fin, on utilisera les notations suivantes :

$\mathcal{O}(\cdot)$ désignera l'ensemble des fonctions analytiques sur (\cdot) .

Étant donné un ouvert ω de X , l'ensemble des fonctions $f(x, y)$ de $\mathcal{O}(\omega \times E)$ qui, pour tout $x \in \omega$, sont polynomiales en y , sera noté $P(\omega, E)$.

Soit H un espace vectoriel de fonctions continues sur un espace topologique séparé, H^* signifiera que H est muni d'une topologie d'e. l. c. dont la bornologie associée est identique à celle de la convergence compacte. Une topologie $*$ induit sur tout sous-espace vectoriel de H une topologie $*$.

I

HYPOTHÈSES. — F est de dimension finie, X est une variété de Stein.

Le théorème dont l'énoncé suit n'a d'intérêt que dans le cas où la dimension de E est infinie, car sinon $P(\omega, E)$ se tensorise en $\mathcal{O}(\omega) \otimes P(\{0\}, E)$, et le résultat obtenu est alors conséquence immédiate du fait que la paire (ω, X) est de Runge.

THÉORÈME 1. — *Pour tout ouvert de Runge et de Stein ω dans X , $P(X, E)$ est séquentiellement dense dans $P(\omega, E)^*$.*

Le dévissage de la démonstration est assez long. Le lemme suivant contient la difficulté principale.

LEMME. — *Soient K un compact holomorphiquement convexe de X , et U un voisinage relativement compact de K . Alors il existe un voisinage W de K tel que*

$$(i) \quad K \subset W \subset \overline{W} \subset U,$$

$$(ii) \quad \forall f \in P(U, E), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in P(X, E) \text{ tel que } \forall y \in E,$$

$$\sup_{x \in K} |g(x, y) - f(x, y)| \leq \varepsilon \sup_{x \in W} |f(x, y)|.$$

Démonstration. — (a) Soit ω un ouvert de Stein dans X , relativement compact, contenant U , on construit d'abord g dans $P(\omega, E)$.

Il existe un polyèdre analytique W , défini par $W = h^{-1}(\Delta) \cap U$, où h est une fonction convenable dans $\mathcal{O}(X)^N$ pour N assez grand, Δ est le polydisque unité de \mathbb{C}^N , h est choisi tel que (i) soit vérifié.

Pour tout $\rho \in]0, 1[$, l'ensemble $M = h^{-1}(\rho \Delta) \cap W$ est compact, et on choisit ρ assez voisin de 1 pour que K soit contenu dans M . On peut donc construire une fonction φ , indéfiniment différentiable sur X , valant 1 dans un voisinage de M , et à support dans W . Désignons par (x, z) le point courant de $X \times \rho \Delta$, et considérons l'équation

$$(1) \quad f(x, y) \bar{d}\varphi(x) + \sum [z_i - h_i(x)] \bar{d}u_i(x, y, z) = 0.$$

L'indice i marque les espaces facteurs de \mathbb{C}^N et \bar{d} est l'opérateur de la cohomologie de Dolbeaut sur la variété de Stein $\omega \times \rho \Delta$. L'étude de cette équation va nous occuper quelque temps.

Soit $d\sigma$ l'élément de volume sur $\omega \times \rho \Delta$ associé à une métrique riemannienne. Si θ est une fonction continue sur $\omega \times \rho \Delta$, on notera L_p^2 les espaces de Hörmander formés par les formes différentielles de degré p en $\bar{d}x$ et $\bar{d}z$ dont les coefficients sont de carré intégrable pour la mesure $e^{-\theta} d\sigma$. On utilise les opérateurs hilbertiens à domaines maximaux (en abrégé dom) suivants dont les adjoints seront notés par le surlignage \sim .

$$T \text{ (resp. } S) : u \mapsto \bar{d}u \text{ de } L_0^2 \text{ dans } L_1^2 \text{ (resp. de } L_1^2 \text{ dans } L_2^2),$$

$$\mathcal{T} : \mathcal{T}(u) = \sum (z_i - h_i(x)) \bar{d}u_i \text{ de } [L_0^2]_N \text{ dans } L_1^2,$$

$$\mathcal{S} : \mathcal{S}(v) = [(z_i - h_i(x)) \bar{d}v]_{i=1,2,\dots,N} \text{ de } L_1^2 \text{ dans } [L_2^2]^N.$$

D'après le théorème 5.2.4 de [2], on peut choisir θ tel que

$$(2) \quad \|v\|^2 \leq \|T(v)\|^2 + \|S(v)\|^2, \quad \forall v \in \text{dom } \tilde{T} \cap \text{dom } S.$$

D'autre part, puisque $z_i - h_i(x)$ est dans $\mathcal{O}(\overline{\omega \times \rho \Delta})$, $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}' = 0$ et $[z_i - h_i(x)] \cdot v$ est dans $\text{dom } \tilde{T} \cap \text{dom } S$, quel que soit v dans $\text{dom } \tilde{\mathcal{T}} \cap \text{dom } \mathcal{S}$, il résulte alors de (2) l'inégalité suivante :

$$\|v(\sum |z_i - h_i(x)|^2)^{1/2}\| \leq \|\tilde{\mathcal{T}}(v)\|^2 + \|\mathcal{S}(v)\|^2, \quad \forall v \in \text{dom } \tilde{\mathcal{T}} \cap \text{dom } \mathcal{S}.$$

Les lemmes 4.1.1 et 4.1.2 de [2] assurent l'existence de l'unicité des solutions dans $\text{dom } \mathcal{T} \cap \overline{\text{Im } \tilde{\mathcal{T}}}$ de l'équation $\mathcal{T}(u) = v$ pour tout v tel que

$$(3) \quad \int |v|^2 e^{-\theta} d\sigma < \infty \quad \text{et} \quad \int |v|^2 [\sum |z_i - h_i(x)|^2]^{-1} e^{-\theta} d\sigma < \infty,$$

et de plus, la solution u vérifie

$$(4) \quad \int |u|^2 e^{-\theta} d\sigma \leq \int |v|^2 \sum |z_i - h_i(x)|^2 e^{-\theta} d\sigma.$$

Les conditions (3) sont vérifiées par $v = f(x, y) \overline{d\varphi}$, pour tout y dans E . L'équation (1) admet donc, quel que soit y dans E , une solution unique dans l'espace fonctionnel $\mathcal{F} \cap \overline{\text{Im } \mathcal{F}}$ qui est indépendant de y . Il en résulte que la solution u est polynomiale en y en même temps que le second membre $f(x, y) \overline{d\varphi}$.

Soit G la fonction sur $\omega \times \rho \Delta \times E$ par

$$G(x, y, z) = \varphi(x) f(x, y) + \sum [z_i - h_i(x)] u_i.$$

Cette fonction est donc analytique sur $\omega \times \rho \Delta$ et polynomiale en y . Appliquons-lui l'inégalité de la moyenne; il existe une fonction $k_1(x, z)$ localement bornée sur $\omega \times \rho \Delta$ telle que

$$(5) \quad |G(x, y, z)|^2 \leq k_1(x, z) \int |G(x, y, z)|^2 e^{-\theta} d\sigma.$$

Utilisons maintenant (4) pour majorer le second membre de (5) en se rappelant que φ a son support dans W . On obtient une fonction k_2 localement bornée sur $\omega \times \rho \Delta$, indépendante de f , telle que

$$(6) \quad |G(x, y, z)|^2 \leq k_2(x, z) \sup_{x \in W} |f(x, y)|.$$

Soit enfin $\sum_{n \geq 0} G^n(x, y, z)$ le développement taylorien en z à l'origine de G , et soit $\lambda > 1$ tel que $\lambda \cdot h(K)$ soit contenu dans $\rho \cdot \Delta$. L'intégrale de Cauchy fournit les estimations suivantes en remarquant que $G[x, y, h(x)] = f(x, y)$, lorsque $x \in K$:

$$(7) \quad \begin{aligned} & \sup_{x \in K} |f(x, y) - \sum_{n \leq q} G^n(x, y, h(x))| \\ & \leq \frac{1}{\lambda^{q+1} - \lambda^q} \sup_{x \in K, |t| \leq \lambda} |G(x, y, h(x) \cdot t)|, \\ & |G^n(x, y, h(x))| \leq \left(\frac{2|h(x)|}{\rho} \right)^n \sup_{|z| \leq 1/2\rho} |G(x, y, z)|. \end{aligned}$$

Remarquons que la conjonction de (6) et (7) entraîne que chaque fonction $G^n[x, y, h(x)]$ est localement bornée sur $\omega \times E$, et appartient donc à $P(\omega, E)$. Posons alors $g_q = \sum_{n \leq q} G^n[x, y, h(x)]$, on obtient

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_q \in P(\omega, E) \\ \text{et} \\ \sup_{x \in K} |f(x, y) - g_q(x, y)| \leq \varepsilon_q \sup_{x \in W} |f(x, y)| \\ \text{et} \\ \lim \varepsilon_q = 0, \end{array} \right.$$

$$(ii) \quad |g_q(x, y)| \leq k(x) \sup_{x \in W} |f(x, y)|,$$

où k est une fonction localement bornée sur ω .

(b) Soit maintenant une exhaustion de X par des ouverts d'Oka-Weil ω_n , dans X ; on construit par récurrence une suite f_n telle que $f_0 = f$, et

$$(i) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_n \in P(\omega_{n+1}, E) \\ \text{et} \\ \sup_{x \in \overline{\omega_n}} |f_{n+1}(x, y) - f_n(x, y)| \leq \varepsilon \cdot 2^{-n} \sup_{x \in W} |f(x, y)|, \end{array} \right.$$

$$(ii) \quad |f_{n+1}(x, y)| \leq k_n(x) \sup_{x \in W} |f(x, y)|, \quad \forall x \in \omega_{n+2},$$

où k_n est localement borné sur ω_{n+2} .

La fonction f_1 est fournie par la partie (a); supposons f_2, \dots, f_n construits, et appliquons le (a) en posant $f = f_n$, $K = \overline{\omega_n}$, $U = \omega_{n+1}$, $\omega = \omega_{n+2}$. Il existe W_n avec une adhérence contenue dans ω_{n+1} , et f_{n+1} dans $P(\omega_{n+2}, E)$ te que

$$\sup_{x \in \overline{\omega_n}} |f_{n+1}(x, y) - f_n(x, y)| \leq \varepsilon \cdot 2^{-n} \sup_{x \in W_n} |f_n(x, y)| \frac{1}{\sup_{x \in W_n} k_{n-1}(x)},$$

$$|f_{n+1}(x, y)| \leq k(x) \sup_{x \in W_n} |f_n(x, y)|,$$

où k est localement bornée sur ω_{n+2} .

Il suffit maintenant d'appliquer (ii) à l'ordre $(n-1)$ pour constater que f_{n+1} vérifie (i) et (ii).

La suite f_n ainsi construite converge uniformément sur tout compact de X vers une fonction g de $P(X, E)$ vérifiant les conditions du lemme.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1.

Soit K_n une suite de compacts holomorphiquement convexes dont la réunion est ω , et soit f dans $P(\omega, E)$. Soit W_n l'ouvert W fourni par le (i) du lemme, il existe un voisinage U_n de l'origine dans E tel que f soit bornée sur $W_n \times U_n$ puisque W_n est relativement compact. La partie (ii) du lemme fournit f_n dans $P(X, E)$ tel que :

$$\sup_{(x, y) \in K_n \times U_n} |f(x, y) - f_n(x, y)| \leq 2^{-n}.$$

La suite $2^n [f - f_n]$ est donc bornée sur tout compact de $\omega \times E$, elle est donc bornée dans $P(\omega, E)^*$. Il en résulte que f_n converge vers f dans $P(\omega, E)^*$.

COROLLAIRE. — Soit K un compact holomorphiquement convexe de X , et posons $P(K, E)^* = \lim_{\rightarrow} P(\omega, E)^*$ lorsque ω décrit les voisinages de K . Alors $P(X, E)$ est séquentiellement dense dans $P(K, E)^*$.

Il suffit de remarquer que K admet un système fondamental de voisinages d'Oka-Weil.

THÉORÈME 2. — Soit ω un ouvert de Runge et de Stein dans X , alors $P(X, E)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{O}[(\omega \times E) \cap \Omega]^*$.

Démonstration. — Puisque les sections de $(\omega \times E) \cap \Omega$ suivant E sont aussi disquées, il suffit, d'après le théorème 1, de vérifier que $P(X, E)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{O}(\Omega)^*$. Soit donc f dans $\mathcal{O}(\Omega)$, et soit $\sum_{n \geq 0} f^n(x, y)$ son développement taylorien à l'origine en y . Soit ε_n une suite qui converge vers 1 et telle que ε_n^n tende vers $+\infty$. Si l'on montre que la suite $\varepsilon_N^N (f - \sum_{n \leq N} f^n)$ converge uniformément vers zéro sur tout compact K de Ω , le théorème sera démontré.

Soit $\lambda > 1$ tel que $\tilde{K} = \{(x, ty) \mid (x, y) \in K, \text{ et que } |t| < \lambda\}$ soit encore contenu dans Ω . L'intégrale de Cauchy fournit l'inégalité qui achève la démonstration

$$\varepsilon_N^N \sup_{(x, y) \in K} |f - \sum_{n \leq N} f^n| \leq \left(\frac{\varepsilon_N}{\lambda}\right)^N \frac{1}{\lambda - 1} \sup_{(x, y) \in \tilde{K}} |f|.$$

II

HYPOTHÈSES. — F est métrisable et complet, E est séquentiellement complet, X est étalée sur F .

On dira qu'un espace de Fréchet Γ de fonctions analytiques sur X est de type (N) si : Γ est invariant par dérivation, la topologie de Γ est plus fine que celle de la convergence simple et si les applications $(a, f) \mapsto f^n(a)$ de $F \times \Gamma$ dans Γ sont équicontinues à l'origine, où $f^n(a)$ désigne l'application $x \mapsto f^n(x, a)$.

THÉORÈME 3. — Si X est l'enveloppe d'holomorphic d'un espace de type (N) dans $\mathcal{O}(X)$, alors l'enveloppe d'holomorphic de Ω est un ouvert de $X \times E$.

Démonstration. — Désignons par p l'étalement de $X \times E$ sur $F \times E$, par (Y, q) l'enveloppe d'holomorphic de Ω , étalée par q sur $F \times E$, et par u le morphisme d'extension de Ω dans (Y, q) . On sait [1] que les applications analytiques $\varphi : (x, a) \mapsto x$ de Ω dans X , et $\psi : (x, a) \mapsto a$ de Ω dans E ,

admettent respectivement des prolongements analytiques $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ à Y . Soit v l'application $y \mapsto (\tilde{\varphi}(y), \tilde{\psi}(y))$ de Y dans $X \times E$. Par construction, v est un inverse à gauche de u , de telle sorte que $p_0 v_0 u = p = q_0$; il en résulte l'identité de $p_0 v$ et q , ce qui signifie que v est un morphisme de Y dans $X \times E$. Il reste à montrer que v est injective.

Soit f dans $\mathcal{O}(\Omega)$, la démonstration du théorème 2 montre que $\sum_{n \geq 0} f^n$ converge vers f dans $\mathcal{O}(\Omega)^*$. Puisque $f_0^n v$ est le prolongement analytique de f^n à Y , on sait, d'après [1], que $\sum_{n \geq 0} f_0^n v$ converge dans $\mathcal{O}(Y)^*$ vers le prolongement \tilde{f} de f à Y lorsqu'on choisit la topologie * bornologique. Par conséquent, si $v(y) = v(y')$, on a $\tilde{f}(y) = \tilde{f}(y')$, ce qui entraîne l'injectivité de v , puisque Y est séparé par $\mathcal{O}(Y)$.

Remarque. — Parmi les espaces de type (N) , il y a les classes $A_{\mathcal{O}}$, introduites par M. SCHOTTENLOHER dans [4]. On peut d'ailleurs montrer [1] que tout espace du type (N) se plonge continûment dans une classe $A_{\mathcal{O}}$.

Lorsque F est de dimension finie, $\mathcal{O}(Y)$, muni de la convergence compacte, est évidemment de type (N) ; dans ce cas, le résultat qui suit précise le théorème 3.

THÉORÈME 4. — *Si F est de dimension finie et si E est métrisable et complet, alors l'enveloppe d'holomorphic $\tilde{\Omega}$ de Ω est un ouvert de $\tilde{X} \times E$ contenant $\tilde{X} \times \{0\}$, où \tilde{X} désigne l'enveloppe d'holomorphic de X .*

Démonstration. — La démonstration du théorème 3 prouve que $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\tilde{X} \times E$. Soit \tilde{K} un compact de \tilde{X} , on sait que l'application de restriction de $\mathcal{O}(\tilde{X})$ dans $\mathcal{O}(\tilde{X})$ est continue pour la convergence compacte; il existe donc un compact K de X tel que

$$(8) \quad \sup_{x \in \tilde{K}} |g_n(x, a)| \leq \sup_{x \in K} |f^n(x, a)|, \quad \forall a \in E, \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega).$$

On a noté $\sum_{n \geq 0} f^n(x, a)$ le développement taylorien à l'origine de f dans Ω_x , et $g_n(x, a)$ le prolongement analytique de $f^n(x, a)$ à \tilde{X} .

Cette inégalité prouve la continuité en a du polynôme homogène $a \mapsto g_n(x, a)$. La fonction g_n est donc continue sur $\tilde{X} \times E$ d'après le théorème de HARTOGS [3].

Enfin, soit ω un voisinage de l'origine dans E tel que $K \times \omega$ soit contenu dans Ω . L'inégalité (1) et les inégalités de Cauchy entraînent la convergence normale de la série $\sum g_n(x, a)$ sur tout compact de $\tilde{K} \times \omega$. La somme de

cette série définit donc une fonction analytique dans un voisinage de $\tilde{X} \times \{0\}$ qui prolonge f . Puisque $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\tilde{X} \times E$, $\tilde{\Omega}$ contient $\tilde{X} \times \{0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] COEURÉ (G.). — *Analytic functions and manifolds in infinite dimensional spaces.* — Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1974 (*North-Holland Mathematics Studies*, 11).
- [2] HÖRMANDER (L.). — *Introduction to complexe analysis in several variables.* — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (*University Series in higher Mathematics*).
- [3] NOVERRAZ (P.). — Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 19, 1969, fasc. 2, p. 419-493 (Thèse Sc. math. Paris, 1969).
- [4] SCHOTTENLOHER (M.). — Über analytischer Fortsetzung in Banachräumen, *Math. Annalen*, t. 199, 1972, p. 313-336.

(Texte définitif reçu le 1^{er} juillet 1974.)

Gérard COEURÉ,
23, rue Laxou,
54600 Villers-Les-Nancy.