

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ADOLF VAN DEN HOMBERGH

**Sur des suites de racines dont la somme  
des termes est nulle**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 102 (1974), p. 353-364

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1974\\_\\_102\\_\\_353\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__353_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR DES SUITES DE RACINES  
DONT LA SOMME DES TERMES EST NULLE**

PAR

**ADOLF VAN DEN HOMBERGH**

[Nijmegen]

RÉSUMÉ. — Dans un article récent, J. DIXMIER a posé une conjecture sur des systèmes de racines. On montrera ici que cette conjecture est vraie seulement pour les systèmes de racines de type  $A_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ),  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ ,  $E_6$  et  $G_2$ .

Pour le cas  $A_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), on en déduit la vérité d'une autre conjecture de DIXMIER, posée dans le même article.

Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple complexe,  $\mathfrak{f}$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , et  $E$  l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ . Notons  $H$  l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{f}$ , et  $H'$  le commutant de  $\mathfrak{f}$  dans  $E$ . Soit  $\mathfrak{f}^*$  l'espace vectoriel dual de  $\mathfrak{f}$ , et soit  $R \subset \mathfrak{f}^*$  le système de racines de  $\mathfrak{g}$  relativement à  $\mathfrak{f}$ . Si  $B = \{ \beta_1, \dots, \beta_m \}$  est une base de  $R$ , on pose

$$x = \sum_{i=1}^m m_{\beta_i}(x) \beta_i, \quad \text{pour } x \in \mathfrak{f}^*.$$

Si  $B' \subset B$ , nous notons

$$R(B') = \{ \alpha \in R; m_{\beta_i}(\alpha) = 0 \text{ si } \beta_i \notin B' \}.$$

Nous notons  $W$  le groupe de Weyl de  $R$ , et  $W(B')$  le sous-groupe de Weyl de  $W$  correspondant à  $R(B')$ , où  $B' \subset B$ . Pour  $\alpha \in R$ , soit  $s_\alpha$  la réflexion correspondant à  $\alpha$ . Si  $C$  est une chambre de Weyl de  $R$ ,  $h_C$  sera l'homomorphisme d'Harish-Chandra correspondant de l'algèbre  $H'$  sur l'algèbre  $H$ . Sa construction est la suivante. Soient  $\mathfrak{n}_+$  la sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$  correspondante à  $C$ ;  $\mathfrak{n}_-$  la sous-algèbre nilpotente opposée de sorte que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$ ; alors

$$(\mathfrak{n}_- E) \cap H' = (E \mathfrak{n}_+) \cap H'$$

est un idéal bilatère  $I_C$  de  $H'$ , supplémentaire de  $H$  dans  $H'$ , et  $h_C$  est le projecteur de  $H'$  sur  $H$  défini par ce supplémentaire. Pour tout  $\alpha \in R$ ,

choisissons la coracine  $H_\alpha$  dans  $\Gamma^*$  telle que  $\alpha(H_\alpha) = 2$  et  $X_\alpha$  dans le sous-espace radiciel correspondant à  $\alpha$  tel que  $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ . (Pour plus de détails, cf. [3].)

Dans [3], DIXMIER a posé les conjectures suivantes :

(D<sub>1</sub>) On suppose  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  telle que :

(i)  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ ;

(ii) si  $\emptyset \subsetneq J \subsetneq \{1, \dots, n\}$ , on a  $\sum_{j \in J} \alpha_j \neq 0$ ,

alors il existe une chambre de Weyl  $C$  telle que  $n-1$  termes de la suite  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  soient positifs relativement à  $C$ .

(D<sub>2</sub>) Soit  $C$  une chambre de Weyl, et soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  telle que (i) et (ii) soient satisfaites. Alors  $h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n})$  est proportionnel à une coracine  $H_\alpha$ .

Nous montrons que (D<sub>1</sub>) est valable pour les systèmes de racines de type  $A_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ),  $B_2, B_3, D_4, D_5, E_6$  et  $G_2$ , et que (D<sub>1</sub>) n'est pas valable pour tous autres systèmes de racines irréductibles et réduits.

De plus, nous montrons que (D<sub>2</sub>) est valable quand  $g$  est de type  $A_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

Si  $B$  est une base fixe dans  $R$ , nous avons une relation d'ordre dans  $R$ , définie par  $B$  ([1], chap. VI, n° 1.6). Soit  $R_\pm = \{\alpha \in R; \pm \alpha > 0\}$ . Alors la conjecture (D<sub>1</sub>) est équivalente à la suivante.

(D<sub>1</sub>) Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  satisfait à (i) et (ii). Alors il existe  $w \in W$  tel que  $n-1$  termes de  $(w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n))$  soient positifs.

LEMME 1. — Soient  $R$  un système de racines, et  $B$  une base de  $R$ . Soient  $B' \subset B$ , et  $R(B')$  un système de racines de type  $A_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ); supposons  $B' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ , telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, \dots, m-1$ . Soit  $T \subset R_+$ , tel que  $s_{\beta_1} \dots s_{\beta_j}(T) \not\subset R_+$  pour  $j = 1, \dots, m$ . Alors, pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe  $T_j \subset T$  tel que

$$\sum_{\gamma \in T_j} \gamma = \beta_1 + \dots + \beta_j.$$

Démonstration. — Nous prouvons le lemme par récurrence sur  $j$ .

Si  $j = 1$ ,  $s_{\beta_1}(T) \not\subset R_+$  donne que  $\beta_1 \in T$ . On prend  $T_1 = \{\beta_1\}$ . Si  $j > 1$ , il existe  $p \in \{1, \dots, j\}$  tel que  $\beta_p + \dots + \beta_j \in T$ , parce que

$$(s_{\beta_1} \dots s_{\beta_p})^{-1}(R_-) \cap R_+ = \{\sum_{p=i}^j \beta_p; i = 1, \dots, j\},$$

(cf. [1], chap. VI, § 1.6, cor. 2 de la prop. 17).

On prend  $T_j = T_{p-1} \cup \{\beta_p + \dots + \beta_j\}$ .

PROPOSITION 1. — Soient  $R$  un système de racines, et  $B$  une base de  $R$ . Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  satisfait à (i) et (ii) et qu'il existe  $B' \subset B$  tel que  $R(B')$  est de type  $A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ) et

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap R(B') \cap R_- \neq \emptyset.$$

Si l'on a  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i_1 \neq i_2$ ,  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2} \in R_-$ , alors il existe  $\alpha_j \in R_- \cap R(B')$  et  $w \in W(B')$  tels que

$$w((\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap R_+) \cup \{\alpha_j\}) \subset R_+.$$

De plus, si l'on a

$$(\alpha_k \in R_-) \Rightarrow (k \in \{i_1, i_2\}),$$

il existe  $w \in W$ , tel que  $n-1$  termes de  $(w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n))$  sont positifs.

Démonstration. — On prend  $\alpha_j$  dans  $R_- \cap R(B')$ , telle que  $\sum_{\beta \in B'} m_\beta(\alpha_j)$  est minimale. Nous prouvons la proposition par récurrence sur  $-\sum_{\beta \in B'} m_\beta(\alpha_j)$ .

Il est permis de supposer que  $B' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, \dots, m-1$ , et que  $\alpha_j = -(\beta_1 + \dots + \beta_m)$ . Soit

$$T = R_+ \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Si  $s_{\beta_1} \dots s_{\beta_i}(T) \not\subset R_+$  pour  $i = 1, \dots, m$ , il existe  $T_{m_j} \subset T$  tel que

$$\sum_{\gamma \in T_{m_j}} = (\beta_1 + \dots + \beta_m),$$

et alors  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ne vérifie pas (ii).

Alors il existe  $p \in \{1, \dots, m\}$ , tel que  $s_{\beta_1} \dots s_{\beta_p}(T) \subset R_+$ .

Mais  $s_{\beta_1} \dots s_{\beta_p}(\alpha_j)$  est positive (si  $p = m$ ) ou

$$-\sum_{\beta \in B'} m_\beta(s_{\beta_1} \dots s_{\beta_p})(-\beta_1 - \beta_2 - \dots - \beta_m) = m-1,$$

et l'on applique l'hypothèse de récurrence.

COROLLAIRE 1. — (D<sub>1</sub>) est valable dans un système de racines de type  $A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

LEMME 2. — Soient  $R$  un système de racines de type  $A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ), et  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  une base de  $R$  telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, \dots, m-1$ . Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  satisfait à (i) et (ii). Alors  $m > n-1$ , et il existe  $w \in W$ , tel que

$$\{w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n)\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, -(\beta_1 + \dots + \beta_{n-1})\}.$$

*Démonstration.* — Utilisons le corollaire 1; il existe  $w \in W$ , tel que  $(w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n))$  a  $n-1$  termes positifs. Supposons

$$w(\alpha_n) = -(\beta_p + \dots + \beta_q) \quad (p \leq q).$$

En appliquant, quand nécessaire,  $s_{\beta_1} \dots s_{\beta_{p-1}}$ , on peut supposer que  $p = 1$ . Si  $\beta_1, \dots, \beta_q \in \{w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n)\}$ , on a  $n = q+1$ , et la démonstration est terminée. Autrement, il existe  $i \in \{1, \dots, q-1\}$  tel que  $\beta_i \notin \{w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n)\}$ .

Soit  $i_0 - 1$  le plus petit entier avec cette propriété, alors

$$s_{\beta_q} s_{\beta_{q-1}} \dots s_{\beta_{i_0}} \cdot w(\beta_j) \in R_+ \quad \text{pour } j < n$$

et

$$s_{\beta_q} s_{\beta_{q-1}} \dots s_{\beta_{i_0}} \cdot w(\alpha_n) = -(\beta_1 + \dots + \beta_{q-1}).$$

Il suffit donc d'appliquer une hypothèse de récurrence sur  $q$ .

**COROLLAIRE 2.** — Soient  $R$  un système de racines de type  $A_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  telle que (i) et (ii) sont vérifiées. Alors on a, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  exactement deux éléments  $i(1), i(2)$  dans  $\{1, \dots, n\}$  tels que  $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$  et  $\alpha_i + \alpha_{i(2)}$  sont des racines.

**LEMME 3.** — Soit  $C$  une chambre de Weyl. On suppose que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  vérifie (i) et (ii), et, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a deux indices  $i(1)$  et  $i(2)$  au plus, tels que  $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$  et  $\alpha_i + \alpha_{i(2)}$  sont des racines. Alors il existe une racine  $\alpha_0$  telle que

$$h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n}) = \mu H_{\alpha_0}, \quad \text{où } \mu \in \mathbb{C}.$$

Si l'on a choisi  $\{X_\alpha; \alpha \in R\}$  tel que, pour  $\alpha, \beta \in R$  avec  $\alpha + \beta \in R$ ,  $[X_\alpha, X_\beta] \in \mathbb{Z} \cdot X_{\alpha+\beta}$ , alors  $\mu \in \mathbb{Z}$ .

*Démonstration.* — Si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R_n$  vérifie les conditions du lemme, alors  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_i + \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n)$  les vérifie aussi quand  $\alpha_i + \alpha_j \in R$ . Nous prouvons le lemme par récurrence sur  $n$ . Le cas où  $n = 2$  est trivial, et il est exclu dans ce qui suit.  $C$  définit une relation d'ordre dans  $R : R = R_+ \cup R_-$ . Supposons  $\alpha_i \in R_+$ . S'il n'existe pas un indice  $j > i$  avec  $\alpha_i + \alpha_j \in R$ , alors

$$h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n}) = h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_{i-1}} X_{\alpha_{i+1}} \dots X_{\alpha_n} X_{\alpha_i}) = 0.$$

Si l'on a exactement un indice  $j > i$  avec  $\alpha_i + \alpha_j \in R$ , alors

$$\begin{aligned} h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n}) &= h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_{i-1}} X_{\alpha_{i+1}} \dots X_{\alpha_{j-1}} [X_{\alpha_i}, X_{\alpha_j}] X_{\alpha_{j+1}} \dots X_{\alpha_n}) \\ &= \mu h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_{i-1}} X_{\alpha_{i+1}} \dots X_{\alpha_{j-1}} X_{\alpha_i + \alpha_j} X_{\alpha_{j+1}} \dots X_{\alpha_n}), \end{aligned}$$

où  $\mu \in \mathbf{C}$ .

Il suffit donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Si  $\alpha_i \in R_+$ , on peut donc supposer qu'il existe des indices  $i(1)$ ,  $i(2)$ , avec  $i(1) \neq i(2)$ , et  $i(1), i(2) > i$ , de sorte que  $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$  et  $\alpha_i + \alpha_{i(2)} \in R$ . Par un raisonnement analogue, on peut supposer que si  $\alpha_i \in R_-$ , on a des indices  $i(1)$  et  $i(2) < i$  avec  $\alpha_i + \alpha_{i(1)}$  et  $\alpha_i + \alpha_{i(2)} \in R$ . Alors on peut supposer que  $\alpha_{i(1)}$  et  $\alpha_{i(2)}$  sont négatives si  $\alpha_i$  est positive, et que  $\alpha_{i(1)}$  et  $\alpha_{i(2)}$  sont positives si  $\alpha_i$  est négative. Après adaptation de l'indexation, nous pouvons nous restreindre au cas où  $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in R_+$ ,  $\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n \in R_-$ , et si  $\alpha_p + \alpha_q \in R$ , où  $p, q \in \{1, \dots, n\}$ , il s'en suit que  $p \leq j$ ,  $q > j$ . On suppose  $\alpha_1 + \alpha_n \in R$ ,  $\alpha_1 + \alpha_{n-1} \in R$  et  $\alpha_2 + \alpha_n \in R$ . Si  $\alpha_1 + \alpha_n \in R_+$ ,

$$\begin{aligned} h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n}) &= h_C(X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_{n-1}} [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_n}] X_{\alpha_n}) + h_C(X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_{n-1}} [X_{\alpha_1}, X_{\alpha_n}]) \\ &= \mu_1 h_C(X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_{n-1}} X_{\alpha_1 + \alpha_n} X_{\alpha_n}), \quad \text{où } \mu_1 \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Si  $\alpha_1 + \alpha_n \in R_-$ ,

$$\begin{aligned} h_C(X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_n}) &= h_C(X_{\alpha_1} [X_{\alpha_2}, X_{\alpha_n}] X_{\alpha_3} \dots X_{\alpha_{n-1}}) + h_C([X_{\alpha_1}, X_{\alpha_n}] X_{\alpha_2} \dots X_{\alpha_{n-1}}) \\ &= \mu_2 h_C(X_{\alpha_1} X_{\alpha_2 + \alpha_n} X_{\alpha_3} \dots X_{\alpha_{n-1}}), \quad \text{où } \mu_2 \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

**PROPOSITION 2.** —  $(D_2)$  est valable dans une algèbre de Lie de type  $A_m$  ( $m \in \mathbf{N}$ ).

*Démonstration.* — Soit  $R$  un système de racines de type  $A_m$ . Selon le corollaire 2, une suite  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ , qui vérifie (i) et (ii), vérifie aussi les conditions du lemme 3.

**PROPOSITION 3.** —  $(D_1)$  est valable dans un système de racines de type  $B_2$ ,  $G_2$ ,  $B_3$ ,  $D_4$ ,  $D_5$ ,  $E_6$ .

*Démonstration.* — Soient  $R$  un système de racines, et  $B$  une base. Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  vérifie (i) et (ii). Nous prouvons la proposition par récurrence sur  $n$ .

$$0 = (\alpha_1, \alpha_1 + \dots + \alpha_n) = \sum_{j>1} (\alpha_1, \alpha_j) + (\alpha_1, \alpha_1).$$

Donc il existe  $j \in \{2, \dots, n\}$  tel que  $(\alpha_1, \alpha_j) < 0$ , disons  $j = 2$ . Alors  $\alpha_1 + \alpha_2 \in R$ .  $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in R^{n-1}$  vérifie (i) et (ii), donc, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut supposer qu'il existe  $w \in W$  tel que  $n-2$  termes de  $(w(\alpha_1 + \alpha_2), w(\alpha_3), \dots, w(\alpha_n))$  sont positifs. Supposons que  $w = 1$ . Il y a deux possibilités.

1°  $\alpha_1 + \alpha_2 \in R_-$ . Si  $\alpha_1$  ou  $\alpha_2$  est positive, on a fini, donc on suppose  $\alpha_1, \alpha_2 \in R_-$ .

2°  $\alpha_1 + \alpha_2 \in R_+$ . Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont positives, on a fini, donc on suppose  $\alpha_1 \in R_+, \alpha_2 \in R_-$ . Disons que  $\alpha_3$  est aussi négative en ce cas.

Avec ces restrictions, on n'a pas de difficultés de prouver  $(D_1)$  aux cas où  $R$  est de rang 2.

Soient  $R$  de type  $B_3$ , et  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  une base de  $R$ , telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, 2$ , et  $(\beta_1, \beta_1) = (\beta_2, \beta_2) = 2(\beta_3, \beta_3)$ . On a  $s_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}(\beta_i) = \beta_i$  pour  $i = 2, 3$ , et  $s_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}(\beta_1) = -(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3)$ . Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  vérifie (i) et (ii), et limitons-nous aux cas des 1° et 2°. Dans ce qui suit, supposons que la proposition 1 n'est pas applicable. Dans le cas du 1°, on a alors

$$\alpha_1 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \quad \alpha_2 = -(\beta_2 + \beta_3).$$

Si  $\beta_2 \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , on peut appliquer  $s_{\beta_3} s_{\beta_2}$ . Si  $\beta_2 \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $s_{\beta_3} s_{\beta_2} s_{\beta_3}$  est applicable, sinon  $\beta_2 + 2\beta_3 \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . La seule suite possible, sauf pour la succession, est alors

$$(\beta_1, \beta_2 + 2\beta_3, \beta_2, -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), -(\beta_2 + \beta_3)).$$

Appliquons  $-1 \cdot s_{\beta_1 + \beta_2}$  ( $-1$  est un élément de  $W$ ).

Maintenant, supposons que nous sommes au cas du 2°. Si  $m_{\beta_1}(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$ , nous sommes, avec  $(s_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}(\alpha_n))$ , encore dans le premier cas. Si  $m_{\beta_1}(\alpha_1) \neq 0$  et  $m_{\beta_1}(\alpha_2) \neq 0$ , on a  $m_{\beta_3}(\alpha_1) = 2$ , parce que  $m_{\beta_3}(\alpha_2) \neq 0$ . Alors

$$(s_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}(\alpha_n))$$

a deux termes négatifs, l'un d'eux étant

$$s_{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}(\alpha_1) \in R(\{\beta_1, \beta_2\}).$$

Donc la proposition 1 est applicable. La seule autre possibilité est

$$\alpha_1 = \beta_2 + 2\beta_3, \quad \alpha_2 = -(\beta_2 + \beta_3).$$

Si  $m_{\beta_1}(\alpha_3) = 0$ ,  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est une suite dans un système de racines de rang 2, donc on suppose  $m_{\beta_1}(\alpha_3) = -1$ , et il suit que  $\alpha_3 \leq -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$ . Comme plus haut, on peut se limiter aux cas où  $\beta_2 \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Si  $\beta_1 \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , nous sommes avec  $(s_{\beta_1}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_1}(\alpha_n))$  dans un cas antérieur, et si  $\beta_1 \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , on a  $\alpha_3 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)$ . Alors la seule suite possible est

$$(\beta_2 + 2\beta_3, -(\beta_2 + \beta_3), -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3), \beta_1, \beta_2).$$

Appliquons  $-1 \cdot s_{\beta_1 + \beta_2}$  :

Soient  $R$  un système de racines de type  $D_m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ), et  $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  une base de  $R$  telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, \dots, m-2$  et  $(\beta_{m-2}, \beta_m) < 0$ . Désignons

$$w_0 = s_{\beta_1 + \dots + \beta_{m-2} + \beta_{m-1}} \cdot s_{\beta_1 + \dots + \beta_{m-2} + \beta_m}.$$

Alors

$$\begin{aligned} w_0(\beta_j) &= \beta_j & \text{pour } j = 2, \dots, m-2, \\ w_0(\beta_{m-1}) &= \beta_m, & w_0(\beta_m) = \beta_{m-1} \end{aligned}$$

et

$$w_0(\beta_1) = -(\beta_1 + 2\beta_2 + \dots + 2\beta_{m-2} + \beta_{m-1} + \beta_m).$$

Soit  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$ , et supposons que (i) et (ii) sont satisfaites. Nous nous limitons aux cas du 1° et du 2°. Si on est dans le cas du 1°,  $m_{\beta_m}(\alpha_1) = 0$  ou  $m_{\beta_m}(\alpha_2) = 0$ , alors la proposition 1 est applicable. Supposons que nous sommes dans le cas du 2°, et de plus que la proposition 1 n'est pas applicable. Si  $m_{\beta_1}(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$ , nous sommes, avec  $(w_0(\alpha_1), \dots, w_0(\alpha_n))$ , encore dans le cas du 1° :

$$m_{\beta_{m-1}}(\alpha_2) \neq 0 \quad \text{et} \quad m_{\beta_m}(\alpha_2) \neq 0,$$

et, parce que  $\alpha_1 + \alpha_2 \in R_+$ , on a  $m_{\beta_{m-1}}(\alpha_1)$  et  $m_{\beta_m}(\alpha_1) \neq 0$ . Alors  $(w_0(\alpha_1), \dots, w_0(\alpha_n))$  est une suite avec deux termes négatifs, l'un d'eux étant  $w_0(\alpha_1) \in R(\{\beta_1, \dots, \beta_{m-2}\})$ . Donc on peut appliquer la proposition 1 à  $(w_0(\alpha_1), \dots, w_0(\alpha_n))$ . Alors on peut se restreindre au cas où  $m_{\beta_1}(\alpha_1) = m_{\beta_1}(\alpha_2) = 0$ . Si  $m = 4$ , on a  $\alpha_2 \in R(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4\})$ , alors la proposition 1 est applicable. Si  $m = 5$ , et on ne peut pas appliquer la proposition 1,  $\alpha_2 = -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5)$ . Alors  $\alpha_1 = \beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5$ . Si  $\beta_1 \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , nous sommes, avec  $(s_{\beta_1}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_1}(\alpha_n))$ , dans un cas antérieur, et nous avons fini. Si, disons,  $\alpha_4 = \beta_1$ , on a

$$\alpha_3 \neq -(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_5),$$



autrement  $\sum_{j>4} \alpha_j = 2\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5$ , donc  $\beta_2 \in \{\alpha_4, \dots, \alpha_n\}$ , mais alors  $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_2 = 0$ , et c'est une contradiction. Alors

$$\alpha_3 + \alpha_4 \in R(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\}).$$

[Nous avons supposé que  $m_{\beta_1}(\alpha_3) \neq 0$ ], et  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_n)$  est une suite dans  $R(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\})$ , qui est de type  $D_4$ . Donc il existe  $w \in W(\{\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\})$  tel que

$$(w(\alpha_1), w(\alpha_2), w(\alpha_3 + \alpha_4), w(\alpha_5), \dots, w(\alpha_n))$$

a  $n-2$  termes positifs :  $w(\alpha_3) \in R_-$  et  $w(\alpha_4) \in R_+$ , alors on a terminé [quand  $w(\alpha_3 + \alpha_4) \in R_-$ ], ou on est dans un cas antérieur.

Soient  $R$  un système de racines de type  $E_6$ , et  $\{\beta_1, \dots, \beta_6\}$  une base telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$  et  $(\beta_3, \beta_6) < 0$ . Désignons  $\alpha_0 = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5 + 2\beta_6$  la plus grande racine de  $R$ , et  $w_0$  l'élément de  $W$  de longueur maximale. Comme dans [3], nous désignons  $w_\beta$  l'élément de longueur maximale de  $W(B \setminus \{\beta\})$ . En utilisant le lemme  $A_3$  (iii) de [3], on calcule que

$$w_0 w_{\beta_1} (\sum_{i=1}^6 m_i \beta_i) = (m_5 - m_1) \beta_1 + (m_4 - 2m_1) \beta_2 + (m_3 - 3m_1) \beta_3 \\ + (m_6 - 2m_1) \beta_4 - m_1 \beta_5 + (m_2 - 2m_1) \beta_6$$

et

$$w_0 w_{\beta_2} (\sum_{i=1}^6 m_i \beta_i) = (m_6 - m_2) \beta_1 + (m_3 - 2m_2) \beta_2 \\ + (m_4 - 2m_2) \beta_3 - m_2 \beta_4 + (m_1 - m_2) \beta_5 + (m_5 - m_2) \beta_6.$$

Des expressions analogues sont obtenues en remplaçant 1 par 5, ou 2 par 4. Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$  vérifie les conditions (i) et (ii), et que nous sommes dans le cas du 1° ou du 2°.

Si

(a) il existe  $B' \subset B$  de type  $A_k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ), telle que

$$R_- \cap R(B') \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \neq \emptyset,$$

ou

(b) il existe  $\alpha_k$  avec  $m_{\beta_j}(\alpha_k) = 2$  pour  $j = 2, 4$  ou  $6$ ,

ou

(c)  $\sum_{\alpha_i \in R_+} m_{\beta_j}(\alpha_i) \leq 2$  pour  $j = 2$  ou  $4$ , et il existe  $\alpha_l$  avec  $m_{\beta_3}(\alpha_l) = 2$ , on a terminé, car dans le cas (a), on peut appliquer la proposition 1; dans le cas (b), on peut appliquer la proposition 1 à  $(w_0 w_{\beta_1}(\alpha_1), \dots, w_0 w_{\beta_1}(\alpha_n))$ , où  $i = 1$  ou  $5$ , dépendant de  $m_{\beta_1}(\alpha_k) \neq 0$  ou  $m_{\beta_5}(\alpha_k) \neq 0$ ; dans le cas (c),

on peut appliquer la proposition 1 à  $(w_0 w_{\beta_j}(\alpha_1), \dots, w_0 w_{\beta_j}(\alpha_n))$ , qui a deux termes négatifs, l'un d'eux étant un élément de  $R(B \setminus \{B_{\beta_j}\})$  [Dans ce dernier cas, on a supposé que l'on n'a pas le cas (a)].

Supposons que nous sommes dans le cas du 1°. Si (a) n'est pas vérifiée,  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_0$ , et disons

$$-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6) \leq \alpha_1 \leq -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_6).$$

Si (c) n'est pas vérifiée, on a  $m_{\beta_3}(\alpha_k) < 2$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ , car

$$\sum_{\alpha_i \in R^+} m_{\beta_2}(\alpha_i) = m_{\beta_2}(\alpha_0) = 2.$$

Donc il existe  $\alpha_{k_0}$  avec  $m_{\beta_3}(\alpha_{k_0}) = 1$  et  $m_{\beta_1}(\alpha_{k_0}) = m_{\beta_5}(\alpha_{k_0}) = 0$ .

Si  $\alpha_1 = -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_6)$ , il existe alors  $j \in \{2, 4, 6\}$  avec  $\beta_j \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Alors  $(s_{\beta_j}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_j}(\alpha_n))$  vérifie (a). De manière analogue, on montre que si

$$\alpha_1 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_6) \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6),$$

il existe  $j \in \{1, 4, 6\}$  ou  $j \in \{4, 5, 6\}$  tel que  $\beta_j \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Alors nous sommes ramenés, avec  $(s_{\beta_j}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_j}(\alpha_n))$ , au cas précédent ou au cas (a). Si  $\alpha_1 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6)$ , il existe  $j \in \{1, 5, 6\}$ , tel que  $\beta_j \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Alors nous sommes ramenés, avec

$$(s_{\beta_j}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_j}(\alpha_n)),$$

au cas précédent ou au cas (a) (si  $j = 6$ ).

Maintenant, supposons que nous sommes dans le cas du 2°. Si  $m_{\beta_j}(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$  pour  $j = 1$  ou  $5$ ,  $(w_0 w_{\beta_j}(\alpha_1), \dots, w_0 w_{\beta_j}(\alpha_n))$  vérifie le 1°. Si  $m_{\beta_1}(\alpha_1 + \alpha_2) = m_{\beta_5}(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$  et que (a) et (b) ne sont pas vérifiées, il faut que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_3$$

et

$$-(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6) \leq \alpha_2 \leq -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_6).$$

Si (c) n'est pas vérifiée non plus, il faut que

$$m_{\beta_2}(\alpha_2) + m_{\beta_2}(\alpha_3) < -2 \quad \text{et} \quad m_{\beta_4}(\alpha_2) + m_{\beta_4}(\alpha_3) < -2.$$

Alors

$$\alpha_3 \in \{-\alpha_0, -\alpha_0 + \beta_6, -\alpha_0 + \beta_3 + \beta_6\}.$$

Parce que

$$\begin{aligned} w_0 w_{\beta_1}(-\alpha_0) &= \beta_5, & w_0 w_{\beta_1}(-\alpha_0 + \alpha_6) &= \beta_4 + \beta_5, \\ w_0 w_{\beta_1}(-\alpha_0 + \beta_3 + \beta_6) &= \beta_3 + \beta_4 + \beta_5, & (w_0 w_{\beta_1})^2(-\alpha_0) &= \beta_1, \\ (w_0 w_{\beta_1})^2(-\alpha_0 + \beta_6) &= \beta_1 + \beta_2, & (w_0 w_{\beta_1})^2(-\alpha_0 + \beta_3 + \beta_6) &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \end{aligned}$$

et parce que  $w_0 w_{\beta_1}(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2$ , on peut supposer que

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap \{\beta_1, \beta_1 + \beta_2, \beta_1 + \beta_2 + \beta_3\}$$

n'est pas vide, et que  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cap \{\beta_3 + \beta_4 + \beta_5, \beta_4 + \beta_5, \beta_5\}$  n'est pas vide non plus. Si  $\alpha_3 = -\alpha_0 + \beta_6$ , on peut supposer que

$$\{\beta_1, \beta_1 + \beta_2\} \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \quad \text{et} \quad \{\beta_4 + \beta_5, \beta_5\} \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$$

ne sont pas vides, et si  $\alpha_3 = -\alpha_0$  que  $\{\beta_1, \beta_5\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Parce que  $m_{\beta_3}(\alpha_2) = -1$ , on peut supposer que  $\beta_6 \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , autrement on peut appliquer la proposition 1 à  $(s_{\beta_6}(\alpha_1), \dots, s_{\beta_6}(\alpha_n))$ , et parce que  $w_0 w_{\beta_1}(\beta_6) = \beta_4$  et  $(w_0 w_{\beta_1})^2(\beta_6) = \beta_2$ , on peut supposer que  $\{\beta_2, \beta_4, \beta_6\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Si l'on a un indice  $k \neq 1$ , tel que  $m_{\beta_3}(\alpha_k) = 2$ , trois termes de  $(w_0 w_{\beta_2}(\alpha_1), \dots, w_0 w_{\beta_2}(\alpha_n))$  sont négatifs, parmi lesquels  $w_0 w_{\beta_2}(\alpha_1)$  et  $w_0 w_{\beta_2}(\alpha_k)$ , qui sont des éléments de  $R(\{\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\})$ . Alors on a fini en appliquant la proposition 1 deux fois. Les seules autres suites possibles sont :

$$\begin{aligned} a_0 &= (\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_6, -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_6), \\ &\quad -(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5 + \beta_6), \beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_1 + \beta_2, \beta_3 + \beta_4 + \beta_5); \\ &\quad s_{\beta_1}(a_0); \quad -w_0(a_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= (\beta_2 + 2\beta_3 + \beta_4 + \beta_6, -(\beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_6), \\ &\quad -(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5 + \beta_6), \beta_2, \beta_4, \beta_6, \beta_3 + \beta_4 + \beta_5, \beta_1, \beta_2), \end{aligned}$$

$-w_0(b_0) \cdot s_{\beta_4} s_{\beta_5}(a_0)$  a deux termes négatifs, et  $\sum_{\alpha_i \in R^+} m_{\beta_4}(s_{\beta_4} s_{\beta_5}(\alpha_i)) = 2$ . De plus,  $m_{\beta_3}(s_{\beta_4} s_{\beta_5}(\alpha_1)) = 2$ . Alors  $s_{\beta_4} s_{\beta_5}(a_0)$  vérifie (b), et il existe  $w \in W$ , tel que  $w(a_0)$  a seulement un terme négatif. Le même raisonnement est valable pour  $b_0$ .

**PROPOSITION 4.** — Soient  $R$  un système de racines, et  $B$  une base de  $R$ .

Supposons que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (R(B'))^n$  vérifie (i) et (ii), où  $B' \subset B$ . S'il n'existe pas  $w \in W(B')$ , tel que  $n-1$  termes de  $(w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n))$  sont positifs, il n'existe pas non plus  $w \in W$ , tel que  $n-1$  termes de  $(w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_n))$  sont positifs.

*Démonstration.* — Selon [2] ou [4], il existe un système de représentants  $D$  de  $W/W(B')$  de sorte que  $d(\beta) \in R_+$  pour tout  $d \in D$ ,  $\beta \in B'$ . Supposons  $\alpha \in R(B')$ ,  $w \in W$ . Il existe  $w' \in W(B')$ , et  $d \in D$  avec  $w = dw'$ . Alors

$$(w(\alpha) \in R_+) \Leftrightarrow (w'(\alpha) \in R_+),$$

et la proposition est claire.

Il résulte de la proposition 4, que pour démontrer que  $(D_1)$  n'est pas valable aux cas où  $R$  est de type  $B_n$  ( $n \geq 4$ ),  $C_n$  ( $n \geq 3$ ),  $D_n$  ( $n \geq 6$ ),  $E_7$ ,  $E_8$ ,  $F_4$ , il suffit de donner des contre-exemples aux cas où  $R$  est de type  $B_4$ ,  $C_3$ ,  $D_6$ .

*Contre-exemples.* — Soient  $R$  un système de racines, et  $B$  une base de  $R$ . Pour  $\alpha \in R$ ,  $\sum_{\beta \in B} m_\beta(\alpha)$  est l'ordre de  $\alpha$ .

1° Soient  $R$  un système de racines de type  $C_3$ , et  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  une base de  $R$ , telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, 2$  et

$$(\beta_1, \beta_1) = (\beta_2, \beta_2) = \frac{1}{2}(\beta_3, \beta_3).$$

Posons

$$\begin{aligned} &(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \\ &= (\beta_1, \beta_3, 2\beta_2 + \beta_3, -(\beta_2 + \beta_3), -(2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3), \beta_1 + \beta_2). \end{aligned}$$

Alors  $(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$  satisfait à (i) et (ii). Supposons qu'il existe  $w \in W$ , tel que 5 termes de  $(w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_6))$  sont positifs. L'ordre de la plus grande racine dans  $R$  est 5. Donc les 5 racines positives parmi  $w(\alpha_1), \dots, w(\alpha_6)$  sont d'ordre 1, donc certaines doivent être égales. C'est une contradiction.

2° Soient  $R$  un système de racines de type  $B_4$ , et  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$  une base de  $R$  telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $(\beta_3, \beta_3) = 2(\beta_4, \beta_4)$ . Posons

$$\begin{aligned} &(\alpha_1, \dots, \alpha_7) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_3 + 2\beta_4, \beta_2 + \beta_3 + \beta_4, \\ &-(\beta_3 + \beta_4), -(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4)). \end{aligned}$$

Alors  $(\alpha_1, \dots, \alpha_7)$  satisfait à (i) et (ii).

3° Soient  $R$  un système de racines de type  $D_6$ , et  $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$  une base de  $R$  telle que  $(\beta_i, \beta_{i+1}) < 0$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$  et  $(\beta_4, \beta_6) < 0$ .

Posons

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_9) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6, \beta_2 + \beta_3 + \beta_4, \beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5 + \beta_6, \\ -(\beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6), -(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4 + \beta_5 + \beta_6)).$$

On vérifie que  $(\alpha_1, \dots, \alpha_9)$  satisfait à (i) et (ii).

On raisonne comme dans le 1° pour démontrer qu'on a des contre-exemples pour  $(D_1)$  dans le 2° et le 3°. (L'ordre de la plus grande racine est 7 dans un système de racines de type  $B_4$ , et 9 dans un système de racines de type  $D_6$ .)

Je remercie Jacques DIXMIER de ses remarques, qui ont fait mes contre-exemples plus courts.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. IV, V et VI. — Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1337; Bourbaki, 34).
- [2] CARTER (R. W.). — Weyl groups and finite Chevalley groups, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 67, 1970, p. 269-276.
- [3] DIXMIER (J.). — Sur les homomorphismes d'Harish-Chandra, *Inventiones Math.*, t. 17, 1972, p. 167-176.
- [4] SOLOMON (L.). — The orders of the finite Chevalley groups, *J. of Algebra*, t. 3, 1966, p. 376-393.

(Texte reçu le 31 août 1973.)

A. van den HOMBERGH (\*),  
 Mathematisch Instituut,  
 Katholieke Universiteit,  
 Nijmegen, Pays-Bas.

(\*) Ce travail était supporté par l'Organisation néerlandaise pour le développement de la recherche scientifique (Z.W.O.).