BULLETIN DE LA S. M. F.

BIRGER IVERSEN
LÊ DŨNG TRÁNG

Calcul du nombre de cusps dans la déformation semi-universelle d'une singularité isolée d'hypersurface complexe

Bulletin de la S. M. F., tome 102 (1974), p. 99-107
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__99_0>

Bull. Soc. math. France,
102, 1974, p. 99-107.

CALCUL DU NOMBRE DE CUSPS DANS LA DÉFORMATION SEMI-UNIVERSELLE D'UNE SINGULARITÉ ISOLÉE D'HYPERSURFACE COMPLEXE

PAR

BIRGER IVERSEN et LÊ DŨNG TRÁNG

RÉSUMÉ. — Nous donnons une formule permettant de calculer le nombre de cusps dans la courbe intersection du discriminant de la déformation semi-universelle d'un germe d'hypersurface à singularité isolée et d'un plan complexe (de dimension 2) générique ne passant pas par le sommet du discriminant. En particulier nous avons un critère géométrique d'équisingularité d'idéaux jacobiens de courbes planes.

Soit $f : U \subset \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ une fonction analytique définie sur un voisinage ouvert U de l'origine $0 \in \mathbf{C}^n$. On suppose que

$$f(0) = 0,$$
$$df(0) = 0,$$

et que 0 est un point critique isolé de f. Le théorème des zéros de Hilbert montre que le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}/(\partial f)$ quotient de l'algèbre des séries convergentes par l'idéal (∂f), engendré par les dérivées partielles de f, a une dimension finie sur $\mathbf{C}$. Rappelons que

$$\mu = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}/(\partial f)$$

est le *nombre de cycles évanouissants* de f en 0 (*cf.* [8] et [5]), nous l'appellerons aussi *le nombre de Milnor de f en* 0.

D'autre part, posons

$$\tau = \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}/(f, \partial f).$$

On a

$$\tau \leqq \mu.$$

Rappelons que si $\tau = \mu$. K. SAITO, dans [13], a montré que uf est quasi homogène avec une unité u convenable de $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ et des coordonnées $X_1, \ldots, X_n$ convenablement choisies.

Dans [15], G. N. TJURINA a montré l'existence d'une déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$, où X_0 est l'hypersurface de U définie par $f = 0$. Dans [15], elle donne la « recette » suivante pour obtenir cette déformation semi-universelle :

Soient $f_1, \ldots, f_{\tau-1}$ des fonctions analytiques dans $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$ telles que les classes de $1, f_1, \ldots, f_{\tau-1}$ dans $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}/(f, \partial f)$, soient une base de cet espace vectoriel. Soit $\Phi : U \times \mathbf{C}^{\tau-1} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{\tau-1}$ l'application définie par

$$\lambda_0 = F(X_1, \ldots, X_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1}),$$
$$\lambda_i = \lambda_i \qquad (1 \leqq i \leqq \tau-1),$$

où $F(X_1, \ldots, X_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1}) = f + \sum_{i=1}^{\tau-1} \lambda_i f_i$.

Le germe $(\Phi, 0) : (\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^{\tau-1}, 0) \to (\mathbf{C} \times \mathbf{C}^{\tau-1}, 0)$ donne la déformation semi-universelle de $(X_0, 0)$.

On peut alors définir le lieu critique $C(\Phi)$ de Φ, i. e. les points de $U^n \times \mathbf{C}^{\tau-1}$ où

$$\partial F/\partial X_1 = \ldots = \partial F/\partial X_n = 0,$$

et le discriminant $\Delta(\Phi)$ image par Φ d'un représentant assez petit du germe $(C(\Phi), 0)$.

Pour simplifier, on supposera que l'on a un représentant $\Phi : \Omega \to V$ de $(\Phi, 0)$ de telle façon que :

(*a*) $V = D \times D'$, où D est un disque de $\mathbf{C}$ centré en 0 assez petit, et D' un polydisque;

(*b*) $\Omega = B \times D' \cap F^{-1}(D)$, où B est une boule ouverte de $\mathbf{C}^n$ centré en 0, contenue dans U et de rayon assez petit;

(*c*) Pour tout $(\varepsilon, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1}) \in D \times D'$, l'hypersurface

$$F(X_1, \ldots, X_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\tau-1}) = \varepsilon$$

de $\mathbf{C}^n$ est transverse au bord S de B;

(*d*) La restriction de Φ à $C(\Phi) \cap \Omega$ induit un morphisme de normalisation $C(\Phi) \cap \Omega \to \Delta(\Phi) \cap V$, et $C(\Phi) \cap \Omega$ est non singulier;

(*e*) La projection de $C(\Phi) \cap \Omega$ sur D' est plate;

(*f*) La projection de $\Delta(\Phi) \cap V$ sur D' est plate.

Le point (*c*) est automatiquement obtenu avec $D \times D'$ assez petit en choisissant B de telle sorte que $f = 0$ soit transverse à S.

Les points (*d*), (*e*) et (*f*) sont obtenus grâce aux résultats énoncés dans [1] et [14].

Rappelons que, pour toute suite (x_n) de points lisses de $\Delta(\Phi)$ qui tendent vers zéro et pour laquelle la suite $(T(x_n, \Delta(\Phi)))$ a une limite, cette limite est $\{0\} \times \mathbf{C}^{\tau-1}$ (propriété d'aplatissement du discriminant (*cf.* [1] et [3])).

D'autre part, on peut supposer que $f \in \mathcal{M}^3$, où $\mathcal{M}$ est l'idéal maximal de $\mathbf{C}\{X_1, \ldots, X_n\}$. En effet, si $f \in \mathcal{M}^2$, i. e. la multiplicité de f en 0 égale 2, quitte à changer de variables, on a $uf = X_1^2 + g$, où u est une unité, en appliquant le théorème de préparation de Weierstrass (comparer à [16]). On peut donc écrire :

$$uf = X_1^2 + \ldots + X_1^2 + g, \qquad \text{où} \quad g \in \mathcal{M}^3 \quad \text{et} \quad u \text{ est une unité.}$$

Le discriminant de la déformation universelle de f et celui de g sont alors analytiquement isomorphes.

On supposera désormais que $f \in \mathcal{M}^3$. Dans ce cas, on peut choisir $f_1 = X_1, \ldots, f_n = X_n$, donc

$$F = f + \lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n + \textstyle\sum_{j \geqq n+1}^{\tau-1} \lambda_j f_j.$$

Dans ce cas, $C(\Phi)$ est défini par

$$\partial F/\partial X_i = \partial f/\partial X_i + \lambda_i + \textstyle\sum_{j \geqq n+1}^{\tau-1} \lambda_j \, \partial f_j/\partial X_i \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Sous cette forme, on remarque facilement que $C(\Phi)$ est non singulière en 0, et que son espace tangent en 0 est donné par

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

La dimension de $C(\Phi)$ en 0 est donc $\tau - 1$.

On peut montrer qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{H}_1$ de l'espace projectif des droites de $\mathbf{C}^{\tau-1}$, qui passent par 0, tel que :

1° Pour tout $L_0, L_0' \in \mathcal{H}_1$, les courbes $(\mathbf{C} \times L_0) \cap \Delta(\Phi)$ et $(\mathbf{C} \times L_0') \cap \Delta(\Phi)$ soient équisingulières en 0. *On note* $\tilde{\mu}$ *leur nombre de Milnor en* 0.

2° Si $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{\tau-2} = 0$ sont des équations de $L_0 \in \mathcal{H}_1$, alors, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\tau-2})$ d'un ouvert analytique dense $V(L_0)$ d'un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbf{C}^{\tau-2}$, en notant L_ε la droite

$$\varphi_1 = \varepsilon_1, \ \ldots, \ \varphi_{\tau-2} = \varepsilon_{\tau-2},$$

la courbe $(\mathbf{C} \times L_\varepsilon) \times \Delta(\Phi)$ est une courbe qui n'a comme singularités que des cusps et des points doubles dont le nombre ne dépend pas de $L_0 \in \mathcal{H}_1$.

3° En appelant

$$\Gamma_0 = (\mathbf{C} \times L_0) \cap \Delta(\Phi), \qquad \Gamma_\varepsilon = (\mathbf{C} \times L_\varepsilon) \cap \Delta(\Phi),$$
$$\tilde{\Gamma}_0 = \Phi^{-1}(\Gamma_0) \cap C(\Phi), \qquad \tilde{\Gamma}_\varepsilon = \Phi^{-1}(\Gamma_\varepsilon) \cap C(\Phi),$$

la courbe $\tilde{\Gamma}_0$ est une courbe réduite, intersection complète, n'ayant éventuellement qu'une seule singularité à l'origine quand $L_0 \in \mathscr{H}_1$.

Le 1° est obtenu en utilisant [7].

Le 2° provient de [1] et [14], et le 3° résulte de ce que Φ induit une application $\varphi : C(\Phi) \to D'$ qui est un morphisme analytique fini et plat. Dans ce cas, si Δ' est le discriminant de φ, pour obtenir que $\tilde{\Gamma}_0$ soit une courbe réduite, il suffit de choisir L_0 de telle sorte que $L_0 \cap \Delta' = \{ 0 \}$. L'origine est alors éventuellement la seule singularité de $\tilde{\Gamma}_0$ si l'on a choisi Ω et V assez petits. Il est alors clair que $\tilde{\Gamma}_0$ est une intersection complète.

Le but de ce travail est de trouver le nombre de cusps de $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ *quand* $L_0 \in \mathscr{H}_1$ *et* $\varepsilon \in V(L_0)$.

En procédant comme dans [4], on peut montrer le résultat suivant.

LEMME. — *On peut choisir les formes linéaires* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\tau-2}$ *pour que le sous-espace analytique de* $C(\Phi)$, *défini par* $\varphi_1 = \ldots = \varphi_i = 0\ (1 \leqq i \leqq \tau-2)$, *soit une intersection complète n'ayant éventuellement qu'une seule singularité en* 0.

Remarquons alors que, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\tau-1-n}$ sont génériquement choisis,

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{\tau-1-n} = 0$$

définissent l'origine, et le sous-espace analytique de $C(\Phi)$, défini par $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{\tau-1-n} = 0$, est non singulier en 0 et son espace tangent y est $\mathbf{C}^n \times \{ 0 \}$.

Ainsi si $n = 1$, $\tilde{\Gamma}_0$ est non singulière en 0.

COROLLAIRE. — *On peut choisir* $V(L_0)$ *de telle sorte que, pour tout* $\varepsilon \in V(L_0)$, $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ *soit non singulière.*

Preuve. — On considère $\psi : C(\Phi) \to \mathbf{C}^{\tau-2}$ le morphisme dont les composantes sont définies par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\tau-2}$. L'image inverse de 0 est $\tilde{\Gamma}_0$ qui n'a qu'une singularité isolée, donc, en appliquant le théorème de Weierstrass, pour tout ε d'un ouvert analytique dense $V_1(L_0)$ d'un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{C}^{\tau-2}$ [précisément $V_1(L_0)$ est le complémentaire du discriminant de ψ dans ce voisinage ouvert], l'image inverse de ε est $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ qui est non singulière.

COROLLAIRE. — *La variété* $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$ *est une surface réelle dont le premier nombre de Betti est égal au nombre de cycles évanouissants* μ_1 *de* $\tilde{\Gamma}_0$ *en* 0.

Remarquons que, d'après [2] ou [4], $\tilde{\Gamma}_0$ étant une intersection complète de dimension 1, le nombre de cycles évanouissants de $\tilde{\Gamma}_0$ en 0 est bien défini, et est précisément le premier nombre de Betti de $\tilde{\Gamma}_\varepsilon$.

D'autre part, on peut choisir $\mathscr{H}_1$ de telle sorte que μ_1 ne dépende pas de $L_0 \in \mathscr{H}_1$.

Comme Φ induit la normalisation $C(\Phi) \to \Delta(\Phi)$, Φ induit également la normalisation $\tilde{\Gamma}_\varepsilon \xrightarrow{\Phi_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon$. Soient $x_1, \ldots, x_r$ les points singuliers de Γ_ε, soient $U_1, \ldots, U_r$ des voisinages ouverts de $x_1, \ldots, x_r$ dans Γ_ε, traces de petites boules B_i de $\mathbf{C} \times L_\varepsilon$. On a alors un isomorphisme

$$\Phi_\varepsilon : \quad (\tilde{\Gamma}_\varepsilon - \bigcup_{i=1}^r \Phi_\varepsilon^{-1}(U_i)) \to (\Gamma_\varepsilon - \bigcup_{i=1}^r U_i).$$

Le nombre de Betti de $\Gamma_\varepsilon - \bigcup_{i=1}^r U_i$ est alors $\mu_1 + \varkappa + 2\lambda$, où $\varkappa$ est le nombre de cusps, et λ est le nombre de croisements normaux, car $\Phi_\varepsilon^{-1}(x_i)$ est un ou deux points suivant que x_i est un cusp ou un croisement normal.

LEMME. — *On a* $\tilde{\mu} = \mu_1 + 2\varkappa + 2\lambda$.

Preuve. — Soit δ l'équation de $\Delta(\Phi)$ dans $D \times D'$. Soit

$$\theta : \quad D \times D' \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{\tau-2}$$

le morphisme dont les composantes sont définies par $\delta, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\tau-2}$. Remarquons que $\theta^{-1}(0)$ n'est autre que Γ_0 et $\theta^{-1}(0, \varepsilon)$. Pour η assez petit, tel que (η, ε) et $(\eta, 0)$ ne soient pas sur le discriminant de θ, $\theta^{-1}(\eta, 0)$ et $\theta^{-1}(\eta, \varepsilon)$ sont difféomorphes, et le premier nombre de Betti de $\theta^{-1}(\eta, 0)$ n'est autre que $\tilde{\mu}$.

Remarquons alors que $\theta^{-1}(\eta, \varepsilon)$ s'obtient à partir de

$$\Gamma_\varepsilon - \bigcup_{i=1}^r U_i = \theta^{-1}(0, \varepsilon) - \bigcup_{i=1}^r U_i,$$

en remplaçant $\Gamma_\varepsilon \cap B_i$ par un cylindre quand x_i est un croisement normal, et $\Gamma_\varepsilon \cap B_i$ par un tore troué quand x_i est un cusp.

On trouve alors que le premier nombre de Betti de $\theta^{-1}(\eta, \varepsilon)$ égale $\mu_1 + 2\varkappa + 2\lambda$. Ceci démontre notre lemme.

Enfin on peut démontrer (*cf.* [14] et [11]) le lemme suivant :

LEMME. — $\tilde{\mu}+\mu-1 = 3\varkappa+2\lambda$, *où* μ *est le nombre de Milnor de* f *en* 0.

THÉORÈME. — *On a* $\varkappa = \mu_1+\mu-1$.

Dans le cas de $n = 1$, on a $\mu_1 = 0$, d'après une remarque faite ci-dessus. On retrouve bien que le nombre de cusps est $n-2$ (car $\mu = n-1$).

Dans le cas de $n = 2$, nous avons une interprétation plus simple de μ_1.

THÉORÈME. — *Le nombre* μ_1 *est le nombre de Milnor à l'origine d'une combinaison linéaire générique des dérivées partielles* $\partial f/\partial X$ *et* $\partial f/\partial Y$.

Ainsi, si les coordonnées X et Y sont choisies génériquement, μ_1 est le nombre de Milnor de $\partial f/\partial X$ en 0.

Démonstration. — Comme $n = 2$, on peut choisir $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\tau-3}$ pour que $\lambda_1 = \lambda_2 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{\tau-3}$ définisse l'origine. Le sous-espace analytique S de $C(\Phi)$, défini par $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{\tau-3} = 0$, est une surface non singulière en 0 dont le plan tangent y est $\mathbf{C}^2 \times \{0\}$. Ainsi on peut obtenir du système $\varphi_1 = \ldots = \varphi_{\tau-3} = 0$, en choisissant les φ_i génériquement,

$$\lambda_j = \psi_j(\lambda_1, \lambda_2) \qquad (j = 3, \ldots, \tau-1),$$

où ψ_j sont linéaires et de coefficients génériques et aussi petits que l'on voudra.

D'autre part, on a une relation de dépendance linéaire

$$\varphi_{\tau-2} = \sum_{i=1}^{\tau-3} \alpha_i \varphi_i + \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2.$$

Comme $\varphi_{\tau-2}$ est génériquement choisi, α et β sont génériquement choisis et, sur S, $\tilde{\Gamma}_0$ est défini par $\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2 = 0$.

Or S est défini par

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial f/\partial X + \lambda_1 + \sum_{j=3}^{\tau-1} \psi_j(\lambda_1, \lambda_2)\, \partial f_j/\partial X = 0, \\ \partial f/\partial Y + \lambda_2 + \sum_{j=3}^{\tau-1} \psi_j(\lambda_1, \lambda_2)\, \partial f_j/\partial Y = 0; \\ \lambda_j = \psi_j(\lambda_1, \lambda_2) \qquad (j = 3, \ldots, \tau-1). \end{cases}$$

Choisissons sur S les coordonnées X et Y. De (1), on trouve que

$$\lambda_1 = \partial f/\partial X + h_1\, \partial f/\partial X + g_1\, \partial f/\partial Y,$$
$$\lambda_2 = \partial f/\partial Y + h_2\, \partial f/\partial X + g_2\, \partial f/\partial Y,$$

où les g_i et h_i sont d'ordre au moins 1 et les coefficients de g_i, h_i ($i = 1, 2$) tendent vers zéro quand les coefficients de ψ_j ($j = 3, \ldots, \tau-1$) tendent vers zéro. Dans ces coordonnées, la fonction $\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2$ sur S devient

$$F_0 = \alpha\,\partial f/\partial X+\beta\,\partial f/\partial Y+u\,\partial f/\partial X+v\,\partial f/\partial Y,$$

où u et v sont d'ordre au moins 1 et tendent vers zéro avec les coefficients des ψ_j.

Il reste à montrer que, pour α et β génériques, le nombre de Milnor de F_0 en 0 égale celui de $\alpha\,\partial f/\partial X+\beta\,\partial f/\partial Y$ en 0.

Tout d'abord on a (*cf.* [3]) le lemme suivant :

LEMME (J. P. G. HENRY). — *Le nombre de Milnor de* $\alpha\,\partial f/\partial X+\beta\,\partial f/\partial Y$ *en* 0 *égale la multiplicité de l'idéal des dérivées secondes* ∇J *dans* $\mathbf{C}\{X, Y\}$.

Ce nombre de Milnor est la multiplicité de l'idéal J_1 des dérivées partielles de $\alpha\,\partial f/\partial X+\beta\,\partial f/\partial Y$. Pour tout élément $\varphi\in J$, dont l'idéal $J(\varphi)$ des dérivées partielles est (X, Y)-primaire, la multiplicité de $J(\varphi)$ est inférieure ou égale à celle de ∇J, donc inférieure ou égale à celle de J_1, car $J(\varphi)\subset\nabla J$. Ainsi le nombre de Milnor en 0, d'un élément $\varphi\in J$ ayant un point critique isolé en 0, est inférieur ou égal au nombre de Milnor de $\alpha\,\partial f/\partial X+\beta\,\partial f/\partial Y$ en 0 pour α et β génériques.

La semi-continuité du nombre de Milnor donne que les nombres de Milnor de F_0 et de $\alpha\,\partial f/\partial X+\beta\,\partial f/\partial Y$ en 0 sont égaux dès que les coefficients des ψ_j ($j = 3, \ldots, \tau-1$) sont choisis assez petits.

Exemple. — Pour $f = X^n - Y^m$, le nombre de cusps est

$$(n-2)(m-2)+(n-1)(m-1)-1.$$

Toujours dans le cas $n = 2$, on obtient le résultat ci-dessous.

THÉORÈME. — *Supposons que le nombre de Milnor de* $\partial f/\partial x = 0$ *en* 0 *égale* μ_1 ; *dans ce cas, on a*

$$\varkappa = \mu+\mu_1-1 = \dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}\{X, Y\}/(\partial f/\partial X, H),$$

où $H = \partial^2 f/\partial X^2\times\partial^2 f/\partial Y^2-(\partial^2 f/\partial X\,\partial Y)^2$.

Démonstration. — On utilise le théorème (3.7.1) de [6]. En effet, on remarque que $\mu-1$ est le nombre de Milnor de l'intersection complète $(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$, en 0, et μ_1 le nombre de Milnor de $\partial f/\partial X$ en 0. Le théorème cité dit précisément

$$(\mu-1)+\mu_1 = \dim_{\mathbf{C}}\mathbf{C}\{X, Y\}/(\partial f/\partial X, \mathscr{J}_0),$$

où $\mathscr{J}_0$ est l'idéal engendré par $\partial(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)/\partial(X; Y)$, jacobien de l'application de $(\mathbf{C}^2, 0)$ dans $(\mathbf{C}^2, 0)$, définie par $(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$.

Remarque. — Si, dans une famille analytique de courbes planes, le nombre de Milnor ne change pas, dans [7] on a montré que le type topologique de ces courbes en 0 ne change pas, i. e. la famille de courbes est équisingulière. D'autre part, dans [9], F. PHAM donne un exemple où le nombre de Milnor ne change pas, mais le type topologique de la déformation semi-universelle change. Dans [12], J. J. RISLER a étudié l'équisingularité des idéaux jacobiens des courbes d'une famille analytique, et a montré que l'équisingularité des idéaux jacobiens entraîne celle des courbes. Malheureusement l'exemple de F. PHAM montrait que l'équisingularité des courbes planes n'implique pas l'équisingularité des idéaux jacobiens. Mais, dans [12], J. J. RISLER montre que l'équisingularité des idéaux jacobiens est équivalente à la constance du nombre de Milnor, multiplicité de l'idéal jacobien, et du nombre de Milnor d'un élément générique de l'idéal jacobien. On peut donc énoncer ce dernier théorème :

THÉORÈME. — *Si, dans une famille analytique de germes à l'origine de courbes réduites planes, le nombre de Milnor de ces courbes en* 0 *ne change pas, et si le nombre de cusps dans la déformation semi-universelle de ces courbes* (*défini ci-dessus*) *ne change pas, alors la famille des idéaux jacobiens correspondants est équisingulière* (*au sens de* [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRIESKORN (E.). — Exposés au *Séminaire Shih Weishu*, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1969-1970 (non rédigés).

[2] HAMM (H.). — *Die Topologie isolierter Singularitaten von vollständigen durchschnitten komplexer Hyperflächen*, Doct. Dissert., Bonn 1969.

[3] HENRY (J. P. G.). — *Un théorème sur la multiplicité des idéaux jacobiens* (à paraître).

[4] LÊ Dũng Tráng. — Singularités isolées des intersections complètes, *Séminaire Shih Weishu*, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1969-1970 (preprint).

[5] LÊ Dũng Tráng. — Topologie des singularités d'hypersurfaces complexes, « *Colloque sur les singularités en géométrie analytique* [1972, Cargèse] », p. 171-182, *Astérisque*, 1973, n^os 7-8.

[6] LÊ Dũng Tráng. — Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète, *Funkcional'nyj Analiz* (à paraître).

[7] LÊ Dũng Tráng and RAMANUJAM (C. P.). — *The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type.* — Paris, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique (à paraître).

[8] Milnor (J.). — *Singular points of complex hypersurfaces.* — Princeton, Princeton University Press, University of Tokyo Press, 1968 (*Annals of Mathematics Studies*, 61).

[9] Pham (F.). — *Remarques sur l'équisingularité universelle*, Faculté des Sciences de Nice, décembre 1970 (preprint).

[10] Pham (F.). — Déformations équisingulières des idéaux jacobiens de courbes planes, « *Proceedings of Liverpool singularities symposium*, II », p. 218-233. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 209).

[11] Pham (F.). — Courbes discriminantes des singularités planes d'ordre 3, « *Colloque sur les singularités en géométrie analytique* [1972. Cargèse] », p. 363-392, *Astérisque*, 1973, n^os 7-8.

[12] Risler (J.-J.). — Sur les déformations équisingulières d'idéaux, *Bull. Soc. math. France*, t. 101, 1973, p. 3-16.

[13] Saito (K.). — Quasi-homogene isolierte Singularitaten von Hyperflachen, *Invent. Math.*, Berlin, t. 14, 1971, p. 123-142.

[14] Teissier (B.). — Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney, « *Colloque sur les singularités en géométrie analytique* [1972, Cargèse] », p. 285-362, *Astérisque*, 1973, n^os 7-8.

[15] Tjurina (G. N.). — Déformations semi-universelles des singularités isolées des espaces complexes [en russe], *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Serija Matematičeskaja*, t. 33, 1969, p. 1026-1058.

[16] Tjurina (G. N.). — Sur les propriétés topologiques des singularités isolées des espaces complexes de codimension 1 [en russe], *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Serija matematičeskaja*, t. 32, 1968, p. 605-620.

(Texte reçu le 24 octobre 1973.)

Birger Iversen,
Matematisk Institut,
Universitetsparken,
Ny Munkegade,
DK-8000 Aarhus C (Danemark).

et

Lê Dũng Tráng,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris-Cedex 05.