

# BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN MAROT

## Sur les anneaux universellement japonais

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 103 (1975), p. 103-111

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1975\\_\\_103\\_\\_103\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__103_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LES ANNEAUX UNIVERSELLEMENT JAPONAIS

PAR

JEAN MAROT

[Brest]

---

RÉSUMÉ. — On démontre le résultat suivant : « Soient  $A$  un anneau de Zariski complet, et  $\mathfrak{I}$  un idéal de définition de  $A$ . Alors, si  $A/\mathfrak{I}$  est universellement japonais,  $A$  est aussi universellement japonais ». Ceci permet de répondre par l'affirmative à une question de GROTHENDIECK, et de donner des exemples d'anneaux universellement japonais.

### Introduction

L'origine de cet article est la question suivante, posée par A. GROTHENDIECK, dans EGA [4], IV, n° 7.4.8 : « Soient  $A$  un anneau noethérien,  $\mathfrak{I}$  un idéal de  $A$  tel que  $A$  soit séparé et complet pour la topologie  $\mathfrak{I}$ -adique. Si  $A/\mathfrak{I}$  est un  $P$ -anneau, en est-il de même de  $A$  ? » Nous nous limitons à la propriété  $P$  des fibres formelles d'être géométriquement réduites. Dans ce cas, la question précédente admet une réponse positive, si on suppose en outre  $A$  semi-local. Ce résultat est un cas particulier du résultat principal de cet article (proposition 2.3) : « Soient  $A$  un anneau de Zariski complet, et  $\mathfrak{I}$  un idéal de définition de  $A$ . Alors, si  $A/\mathfrak{I}$  est universellement japonais,  $A$  est aussi universellement japonais », résultat qui peut être considéré comme la bonne généralisation du lemme classique de TATE [3] (23.1.3).

La première partie est consacrée à quelques lemmes préliminaires; dans la seconde partie, nous établissons le résultat principal; enfin, dans la troisième partie, nous donnons un certain nombre d'applications, qui fournissent surtout de nouveaux exemples d'anneaux universellement japonais.

Il reste encore des questions ouvertes, ne serait-ce que la suivante : « Soient  $A$  un anneau de Zariski complet, et  $\mathfrak{I}$  un idéal de définition de  $A$ . Si  $A_{\mathfrak{M}}/\mathfrak{I}_{\mathfrak{M}}$  est universellement japonais pour tout idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $A$ , en est-il de même de  $A_{\mathfrak{M}}$  pour tout idéal maximal  $\mathfrak{M}$  de  $A$  ? » Si cela est vrai, la question de A. GROTHENDIECK aurait une réponse positive (sans la restriction que  $A$  est semi-local).

Les anneaux considérés sont noethériens commutatifs et unitaires. Les notations et la terminologie sont celles de N. BOURBAKI et de A. GROTHENDIECK.

### 1. Lemmes préliminaires

Dans les trois lemmes qui suivent,  $A$  est un anneau noethérien intègre de corps des fractions  $K$ ,  $K'$  une extension finie de  $K$ , et  $A'$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $K'$ .

LEMME 1.1. — *Soient  $\mathfrak{p}' \in \text{Spec } A'$ , et  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A \in \text{Spec } A$ . Si l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est japonais, alors le  $A/\mathfrak{p}$ -module  $A'/\mathfrak{p}'$  est de type fini.*

Comme  $K'$  est une extension finie de  $K$ , il existe une sous- $A$ -algèbre finie  $B$  de  $A'$  ayant  $K'$  comme corps des fractions. L'homomorphisme canonique  $A/\mathfrak{p} \rightarrow B/\mathfrak{q}$ , où  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap B$ , est injectif et fini; donc l'anneau  $B/\mathfrak{q}$  est japonais, comme  $A/\mathfrak{p}$ . Nous pouvons donc supposer  $K' = K$ . Soient  $k$  et  $k'$  les corps des fractions de  $A/\mathfrak{p}$  et  $A'/\mathfrak{p}'$ . D'après [6] (33.10),  $k'$  est une extension finie de  $k$ . Le  $A/\mathfrak{p}$ -module  $A'/\mathfrak{p}'$  est contenu dans la fermeture intégrale de  $A/\mathfrak{p}$  dans  $k'$ . Comme l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est noethérien et japonais, le  $A/\mathfrak{p}$ -module  $A'/\mathfrak{p}'$  est de type fini.

LEMME 1.2. — *Si, pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(K/A)$ , l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est japonais, alors l'anneau  $A'$  est noethérien.*

Rappelons que  $\text{Ass}_A(K/A) = \bigcup_x \text{Ass}_A(A/xA)$ , où  $x$  parcourt l'ensemble des éléments non nuls et non inversibles de  $A$ . En particulier, si  $A$  vérifie  $S_2$ ,  $\text{Ass}_A(K/A)$  est l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de  $A$ .

Il existe une sous- $A$ -algèbre finie  $B$  de  $A'$  ayant  $K'$  comme corps des fractions; l'anneau  $B$  est noethérien intègre, et  $A'$  est sa clôture intégrale. D'après le théorème 4 [5] (p. 27) <sup>(1)</sup>, il suffit alors de montrer que l'anneau  $A'/\mathfrak{p}'$  est noethérien, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}'$  de hauteur 1 de  $A'$ . Soit  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$ ; d'après le théorème de Cohen-Seidenberg, il existe  $x \in \mathfrak{p}$ ,  $x \neq 0$ . Désignons par  $C$  la clôture intégrale de  $A$ ; les anneaux  $C$  et  $A'$  sont des anneaux de Krull. D'après la proposition 12 [1] (chap. 7, § 1, n° 8),  $\mathfrak{p}' \cap C$  est un idéal premier de hauteur 1 de  $C$ ; d'autre part,  $\mathfrak{c}'$  est un idéal premier minimal de  $x C$ ; donc, d'après [6] (33.11), l'idéal premier  $\mathfrak{p}$

---

<sup>(1)</sup> Ce théorème est un cas particulier du théorème suivant, plus général et de démonstration plus simple, dû à J. NISHIMURA (à paraître). *Soit  $A$  un anneau de Krull tel que, pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de hauteur 1 de  $A$ , l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  soit noethérien. Alors l'anneau  $A$  est noethérien.*

appartient à  $\text{Ass}_A(A/xA)$ . L'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est alors japonais; et  $A'/\mathfrak{p}'$  est noethérien d'après le lemme 1.1.

LEMME 1.3. — Soit  $\mathfrak{J}$  un idéal de  $A$ , distinct de  $A$ . Alors le  $A$ -module  $A'$  est séparé pour la topologie  $\mathfrak{J}$ -adique.

On se ramène immédiatement au cas où  $A$  est local d'idéal maximal  $\mathfrak{M}$ , et où  $\mathfrak{J}$  est égal à  $\mathfrak{M}$ . D'après [3] (23.2.7), l'anneau  $A'$  est alors semi-local, de radical  $\mathfrak{M}'$ ; et, comme  $\mathfrak{M} A' \subseteq \mathfrak{M}'$ , il suffit de montrer que l'anneau  $A'$  est séparé pour la topologie  $\mathfrak{M}'$ -adique. D'après la démonstration de [3] (23.2.4), il existe une sous- $A$ -algèbre finie  $B$  de  $A'$ , de corps des fractions  $K'$ , telle que les anneaux  $(A' \otimes_B \hat{B})_{\text{red}}$  et  $(\hat{B})_{\text{red}}$  soient canoniquement isomorphes (nous les identifions) et que le morphisme canonique  $\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } B$  soit radiciel. Désignons par  $\mathfrak{N}$  le radical de l'anneau semi-local  $(\hat{B})_{\text{red}}$ , et par  $C$  la fermeture intégrale de  $(\hat{B})_{\text{red}}$  dans son anneau total des fractions. D'après [3] (23.2.7.1), l'homomorphisme canonique  $f: B \rightarrow (\hat{B})_{\text{red}}$  se prolonge en un homomorphisme injectif  $g: A' \rightarrow C$ . Le diagramme commutatif canonique de  $A$ -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & (\hat{B})_{\text{red}} \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ A' & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

factorise suivant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & (\hat{B})_{\text{red}} \\ i \downarrow & h \searrow & \downarrow \lambda \\ A' & \xrightarrow{\quad} & (A' \otimes_B \hat{B})_{\text{red}} \\ & & \downarrow j \\ & & C \\ & g \nearrow & \uparrow \end{array}$$

Le morphisme  $h$  est injectif, puisque  $g$  l'est et que  $g = j \circ h$ . Désignons par  $X, X', Y$  les spectres maximaux respectifs des anneaux  $B, A', (\hat{B})_{\text{red}}$ . D'après la proposition 8 [1] (chap. 3, § 3, n° 4),  ${}^a f: \text{Spec } (\hat{B})_{\text{red}} \rightarrow \text{Spec } B$  induit une bijection de  $Y$  sur  $X$ ; de même le morphisme entier radiciel  ${}^a i: \text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } B$  induit une bijection de  $X'$  sur  $X$ ; donc  ${}^a h$  induit une bijection de  $Y$  sur  $X'$ . On a alors  $\mathfrak{M}' = h^{-1}(\mathfrak{N})$ . Ceci démontre le lemme, puisque  $h$  est injectif, et que  $(\hat{B})_{\text{red}}$  est noethérien.

## 2. Le résultat principal

PROPOSITION 2.1. — *Conservons les hypothèses et notations précédentes. Soit  $\mathfrak{S}$  un idéal de  $A$ , distinct de  $A$ , tel que :*

- (i)  *$A$  est complet pour la topologie  $\mathfrak{S}$ -adique;*
- (ii) *L'anneau  $A/\mathfrak{S}$  est universellement japonais.*

*Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Le  $A$ -module  $A'$  est de type fini;*

(2) *a. La racine de  $\mathfrak{S}A'$  est un idéal de type fini de  $A'$ ; et b. Les idéaux premiers minimaux de  $\mathfrak{S}A'$  sont en nombre fini.*

L'implication (1)  $\Rightarrow$  (2) est évidente : en effet, l'anneau  $A'$  est alors noethérien, comme  $A$ . Montrons que (2)  $\Rightarrow$  (1). L'idéal  $\mathfrak{S}A'$  de  $A'$  est distinct de  $A'$ , puisque  $\mathfrak{S}$  est distinct de  $A$  et que  $A'$  est entier sur  $A$ ; soient  $r$  sa racine, et  $(\mathfrak{p}'_i)_{1 \leq i \leq m}$  la famille de ses idéaux premiers minimaux, en nombre fini d'après (2 b). Le  $A$ -module  $A'/r$  est un sous- $A$ -module du  $A$ -module  $\prod_{i=1}^m A'/\mathfrak{p}'_i$ ; ce dernier est de type fini, puisque, pour tout  $i$ , le  $A$ -module  $A'/\mathfrak{p}'_i$  est de type fini d'après l'hypothèse (ii) et le lemme 1.1. Donc le  $A$ -module  $A'/r$  est de type fini, puisque  $A$  est noethérien. Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $r^n/r^{n+1}$  est un  $A'/r$ -module de type fini d'après (2 a), donc un  $A$ -module de type fini. Comme  $A$  est noethérien, la suite exacte de  $A$ -modules :

$$0 \rightarrow \frac{r^n}{r^{n+1}} \rightarrow \frac{A'}{r^{n+1}} \rightarrow \frac{A'}{r^n} \rightarrow 0$$

montre alors par récurrence que  $A'/r^n$  est un  $A$ -module de type fini pour tout entier  $n \geq 1$ . D'après (2 a), il existe un entier  $p \geq 1$  tel que  $r^p \subseteq \mathfrak{S}A'$ ; le  $A$ -module  $A'/\mathfrak{S}A'$  est quotient du  $A$ -module  $A'/r^p$ ; il est donc de type fini. D'après EGA [2], 0<sub>1</sub>, n° 7.2.7, le séparé complété  $\hat{A}'$  du  $A$ -module  $A'$  pour la topologie  $\mathfrak{S}$ -adique est alors un  $A$ -module de type fini. D'après le lemme 1.3, le  $A$ -module  $A'$  est un sous- $A$ -module de  $\hat{A}'$ ; c'est donc un  $A$ -module de type fini, puisque  $A$  est noethérien.

Remarques 2.2. — (i) L'assertion (2 b) est vérifiée si  $A$  est semi-local ou si  $\mathfrak{S}A'$  est un idéal divisoriel de  $A'$ . En effet, dans le premier cas,  $\text{Spec } A'$  est noethérien d'après [3] (23.2.5); dans le second cas, il existe un nombre

fini d'idéaux premiers  $(\mathfrak{p}_i)_{1 \leq i \leq p}$  de hauteur 1 de  $A'$  et, pour tout  $i$ , un entier  $n_i \geq 1$ , tels que  $\mathfrak{S} A' = \bigcap_{i=1}^p \mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ ; les idéaux premiers minimaux de  $\mathfrak{S} A'$  sont les  $\mathfrak{p}_i$ .

(ii) Si  $\mathfrak{S} A'$  est un idéal divisoriel de  $A'$ , les assertions (1) et (2) de la proposition 2.1 sont chacune équivalente à l'assertion suivante :

(3) Tout idéal premier minimal de  $\mathfrak{S} A'$  est de type fini.

Pour établir que (3)  $\Rightarrow$  (1), il suffit de montrer que le  $A$ -module  $A'/\mathfrak{S} A'$  est de type fini. Comme dans la proposition 2.1, pour tout  $i$ , le  $A$ -module  $A'/\mathfrak{p}_i^{n_i}$  est de type fini; il en est de même du  $A$ -module  $A'/\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ , quotient du  $A$ -module précédent, donc aussi de  $A'/\mathfrak{S} A'$ , sous- $A$ -module du  $A$ -module  $\prod_{i=1}^p A'/\mathfrak{p}_i^{(n_i)}$ .

(iii) Si l'idéal  $\mathfrak{S}$  est principal, dans la proposition 2.1, on peut remplacer (ii) par :

(ii)' Pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A/\mathfrak{S})$ , l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est japonais.

Il suffit de reprendre la démonstration, en remarquant que, pour tout idéal premier minimal  $\mathfrak{p}'$  de  $\mathfrak{S} A'$ , l'idéal  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$  appartient à  $\text{Ass}_A(A/\mathfrak{S})$ .

**PROPOSITION 2.3.** — *Soient  $A$  un anneau de Zariski complet, et  $\mathfrak{S}$  un idéal de définition de  $A$ . Alors, si  $A/\mathfrak{p}$  est universellement japonais,  $A$  est aussi universellement japonais.*

Il faut montrer que l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est japonais pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ . En vertu du principe de récurrence noethérienne, il suffit d'établir que l'ensemble des  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ , tel que  $A/\mathfrak{p}$  est japonais, possède la propriété suivante : « Si  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  est tel que  $A/\mathfrak{q}$  est japonais pour tout idéal premier  $\mathfrak{q}$  contenant strictement  $\mathfrak{p}$ , alors  $A/\mathfrak{p}$  est japonais ». Posons  $B = A/\mathfrak{p}$ ; par hypothèse,  $B/\mathfrak{q}$  est japonais, pour tout idéal premier non nul  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ . Soient  $K$  le corps des fractions de  $B$ ,  $K'$  une extension finie de  $K$ , et  $B'$  la fermeture intégrale de  $B$  dans  $K'$ . D'après le lemme 1.2, l'anneau  $B'$  est noethérien. D'autre part,  $B$  est séparé et complet pour la topologie  $\mathfrak{S} B$ -adique, d'après le théorème 3 [1] (chap. 3, à 3, n° 4); et  $B/\mathfrak{S} B$  est universellement japonais, puisque tout quotient intègre de  $B/\mathfrak{S} B$  est un quotient intègre de  $A/\mathfrak{S}$ . La proposition 2.1 montre alors que le  $B$ -module  $B'$  est de type fini; donc l'anneau  $B$  est japonais.

### 3. Applications

**PROPOSITION 3.1.** — *Soient  $A$  un anneau de Zariski complet, et  $\mathfrak{S}$  un idéal de définition de  $A$ . Alors, si  $A/\mathfrak{S}$  est universellement japonais, tout anneau*

de séries formelles restreintes à un nombre fini de variables  $A \{ T_1, \dots, T_n \}$  est aussi universellement japonais.

Posons  $A' = A \{ T_1, \dots, T_n \}$ . D'après EGA [2], 0<sub>1</sub>, n° 7.5.2, l'anneau  $A'$  est noethérien complet pour la topologie  $\mathfrak{S}$ -adique. D'autre part, l'anneau  $A'/\mathfrak{S}A'$  est isomorphe à l'anneau de polynômes  $(A/\mathfrak{S})[T_1, \dots, T_n]$ ; donc, d'après l'hypothèse et [4], (7.7.2) l'anneau  $A'/\mathfrak{S}A'$  est universellement japonais. La proposition 2.3 permet de conclure.

**COROLLAIRE 3.2.** — *Soit  $A$  un anneau noethérien semi-local complet. Alors tout anneau de séries formelles restreintes à un nombre fini de variables  $A \{ T_1, \dots, T_n \}$  est universellement japonais.*

**PROPOSITION 3.3.** — *Soient  $A$  un anneau noethérien,  $\mathfrak{S}$  un idéal de  $A$  distinct de  $A$ , et  $\hat{A}$  le séparé complété de  $A$  pour la topologie  $\mathfrak{S}$ -adique. Alors, si  $A/\mathfrak{S}$  est universellement japonais,  $\hat{A}$  est aussi universellement japonais.*

La proposition 2.3 permet de conclure, compte tenu de l'isomorphisme canonique  $A/\mathfrak{S} \xrightarrow{\sim} \hat{A}/\mathfrak{S}\hat{A}$ .

**COROLLAIRE 3.4.** — *Tout anneau noethérien semi-local complet est universellement japonais.*

Ce résultat était déjà connu (voir [7] (1.1)).

**PROPOSITION 3.5.** — *Soit  $A$  un anneau noethérien universellement japonais. Alors tout anneau de séries formelles à un nombre fini de variables  $A[[X_1, \dots, X_n]]$  est universellement japonais.*

Il suffit d'appliquer la proposition 2.3 à l'anneau  $A[[X_1, \dots, X_n]]$  et à l'idéal  $(X_1, \dots, X_n)A[[X_1, \dots, X_n]]$ .

Compte tenu de [4] (7.6.4) et [4] (7.7.1), la proposition et le corollaire suivants résultent immédiatement des propositions 2.3 et 3.3.

**PROPOSITION 3.6.** — *Soient  $A$  un anneau noethérien semi-local, et  $\mathfrak{S}$  un idéal de  $A$ ; on suppose que  $A$  est séparé et complet pour la topologie  $\mathfrak{S}$ -adique. Alors, si les fibres formelles de  $A/\mathfrak{S}$  sont géométriquement réduites, il en est de même des fibres formelles de  $A$ .*

Cette proposition répond par l'affirmative à une question d'EGA [4], IV, n° 7.4.8, dans le cas où  $A$  est semi-local, et où la propriété  $P$  des fibres formelles est celle d'être géométriquement réduites.

**COROLLAIRE 3.7.** — Soient  $A$  un anneau noethérien semi-local,  $\mathfrak{I}$  un idéal de  $A$ , et  $\hat{A}$  le séparé complété de  $A$  pour la topologie  $\mathfrak{I}$ -adique. Alors, si les fibres formelles de  $A$  sont géométriquement réduites, il en est de même de celle de  $\hat{A}$ .

**PROPOSITION 3.8.** — Soient  $A$  un anneau noethérien muni d'une topologie  $\mathfrak{I}$ -adique, où  $\mathfrak{I}$  est un idéal de  $A$ , et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  telle que  $0$  ne soit pas adhérent à  $S$ . Alors, si  $A$  est universellement japonais, l'anneau  $A\{S^{-1}\}$  est aussi universellement japonais.

L'anneau  $A\{S^{-1}\}$ , non réduit à  $0$ , est le séparé complété de  $S^{-1}A$  pour la topologie  $S^{-1}\mathfrak{I}$ -adique. D'après [4] (7.7.2),  $S^{-1}A$  est universellement japonais; donc aussi  $A\{S^{-1}\}$ , d'après la proposition 3.3.

**COROLLAIRE 3.9.** — Soient  $A$  un anneau noethérien muni d'une topologie  $\mathfrak{I}$ -adique, où  $\mathfrak{I}$  est un idéal de  $A$ , et  $S$  une partie multiplicative de  $A$  telle que  $0$  ne soit pas adhérent à  $S$ , et que l'anneau  $S^{-1}A$  soit semi-local. Alors, si les fibres formelles de  $A$  sont géométriquement réduites, il en est de même de celles de  $A\{S^{-1}\}$ .

Ce corollaire répond par l'affirmative à la question d'EGA [4], IV, n° 7.4.8 (c), dans le cas où la topologie de  $A$  est une topologie adique,  $S^{-1}A$  un anneau semi-local, et  $P$  la propriété des fibres formelles d'être géométriquement réduites.

Comme dernière application, signalons la proposition suivante, qui améliore le lemme classique de TATE [3] (23.1.3).

**PROPOSITION 3.10.** — Soient  $A$  un anneau noethérien intègre, de corps des fractions  $K$ ,  $p$  l'exposant caractéristique de  $K$ ,  $x$  un idéal principal de  $A$  distinct de  $A$ , et  $\bar{A}$  la clôture intégrale de  $A$ . On suppose que :

- (i)  $A$  est complet pour la topologie  $x$ -adique;
- (ii) Pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A/xA)$ , l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est japonais;
- (iii) L'une des deux conditions suivantes est vérifiée :
  - (a) Les idéaux premiers minimaux de  $x\bar{A}$  sont principaux;
  - (b) Les idéaux premiers minimaux de  $x\bar{A}$  sont de type fini, et  $(K : K^p) < \infty$ .

Alors l'anneau  $A$  est japonais.

Nous supposons évidemment  $x \neq 0$ . Soient  $K'$  une extension radicielle finie de  $K$ , et  $A'$  la fermeture intégrale de  $A$  dans  $K'$ ; il existe un entier  $n \geq 1$



tel que  $K' \subseteq K^{p^{-n}}$ . D'après la proposition 2.1 et la remarque 2.2, il suffit de montrer que l'anneau  $A'$  vérifie la condition (iii) ci-dessus. Dans l'hypothèse (b),  $K^{p^{-n}}$  est une extension radicielle finie de  $K$ , puisque  $(K : K^p) < \infty$ ; on peut alors se limiter aux extensions radicielles de  $K$  de la forme  $K^{p^{-n}}$ . L'anneau  $\bar{A}$  vérifie (iii) (b), donc aussi  $A'$ , isomorphe à  $\bar{A}$  par l'isomorphisme de Frobenius  $\sigma : A' \rightarrow \bar{A}$  défini par  $\sigma(y) = y^{p^n}$ . Plaçons-nous dans l'hypothèse (a). L'anneau  $A'$  est l'ensemble des  $y \in K'$  tels que  $y^{p^n} \in \bar{A}$ . Soient  $(a_i \bar{A})_{1 \leq i \leq r}$  la famille des idéaux premiers minimaux de  $x \bar{A}$ , en nombre fini d'après la remarque 2.2. Quitte à grossir  $K'$  on peut toujours supposer que, pour tout  $i$ ,  $\alpha_i$  appartient à  $K'$ , où  $\alpha_i^{p^n} = a_i$ . Soit  $\mathfrak{p}'$  un idéal premier minimal de  $x A'$ ; d'après la proposition 12 [1], (chap. 7, § 1, n° 8),  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$  est un idéal premier minimal de  $x A$ . Il existe donc un indice  $i$  tel que  $\mathfrak{p} = a_i A$ . De plus,  $\mathfrak{p}'$  est l'ensemble des  $y \in K'$  tels que  $y^{p^n} \in \mathfrak{p}$ . On montre alors facilement que  $\mathfrak{p}' = \alpha_i A'$ . L'anneau  $A'$  vérifie (iii) (a).

Si  $x A$  est un idéal premier de  $A$ , alors  $x \bar{A}$  est un idéal premier de  $\bar{A}$ . On retrouve comme cas particulier de la proposition 3.10 le théorème [8] (1.1).

**COROLLAIRE 3.11.** — *Soient  $A$  un anneau noethérien intègre, et  $x A$  un idéal principal de  $A$  distinct de  $A$ . On suppose que :*

- (i)  *$A$  est complet pour la topologie  $x A$ -adique;*
  - (ii) *Pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A/x A)$ , l'anneau  $A/\mathfrak{p}$  est japonais;*
  - (iii) *La clôture intégrale de  $A$  est un anneau factoriel.*
- Alors l'anneau  $A$  est japonais.*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (N.). — *Algèbre commutative*. Chap. 1-2, 3-4, 5-6, 7. — Paris, Hermann, 1961-1965 (*Act. scient. et ind.*, 1290, 1293, 1308, 1314; *Bourbaki*, 27, 28, 30 et 31).
- [2] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, I [EGA I]. — Paris, Presses universitaires de France, 1960 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 4); et Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 166).
- [3] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, IV [EGA IV], 1<sup>re</sup> partie. — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 20).
- [4] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, IV [EGA IV], 2<sup>e</sup> partie. — Paris, Presses universitaires de France, 1965 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 24).

- [5] MORI (Y.). — On the integral closure of an integral domain, II., *Bull. Kyoto Gakugei Univ.*, series B, n° 7, 1955, p. 19-30.
- [6] NAGATA (M.). — *Local rings*. — New York, Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 13).
- [7] SEYDI (H.). — Sur la théorie des anneaux de Weierstrass, I., *Bull. Sc. math.*, 2<sup>e</sup> série, t. 95, 1971, p. 227-235.
- [8] SEYDI (H.). — Sur la théorie des anneaux japonais, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 271, série A, 1970, p. 73-75.

(Texte reçu le 11 septembre 1974.)

Jean MAROT,  
Département de Mathématiques,  
Université de Bretagne occidentale,  
avenue Le Gorgeu,  
29283 Brest Cedex.