BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Opérateurs différentiels sur des cônes normaux de dimension 2

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 113-128
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__113_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 113-128.

OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS SUR DES CÔNES NORMAUX DE DIMENSION 2

PAR

JEAN-PIERRE VIGUÉ

[Orsay]

RÉSUMÉ. — On étudie l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels holomorphes au voisinage du sommet O d'un cône normal X plongé dans $\mathbf{C}^3$. On montre que si le genre de la courbe projective associée $\bar{X}$ est supérieur ou égal à 1, la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,O})$ des germes d'opérateurs différentiels sur X au voisinage du sommet O n'est pas engendrée par $\mathcal{O}_{X,O}$ et un nombre fini d'éléments.

1. Introduction

Si X est un espace analytique de faisceau structural $\mathcal{O}_X$, nous noterons $\mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_X)$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels sur X d'ordre $\leqslant d$; $\mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_X)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules cohérent. Si x est un point de X, on note $\mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x})$ le $\mathcal{O}_{X,x}$-module des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant d$ sur X au voisinage de x (pour les définitions, *voir* [2], [6] et [8]). On a

$$\mathrm{Diff}^0(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathcal{O}_{X,x},$$

et on pose

$$\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x}) = \varinjlim \mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Pour la composition des opérateurs différentiels, $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})$ est une $\mathbf{C}$-algèbre filtrée. L'algèbre graduée associée

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})) = \oplus_{d=0}^{\infty} \mathrm{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x})/\mathrm{Diff}^{d-1}(\mathcal{O}_{X,x})$$

est commutative et, en particulier, c'est une $\mathcal{O}_{X,x}$-algèbre.

L'étude des algèbres $\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})$ et $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x}))$ a été faite par KANTOR [5] dans le cas où (X, x) est une singularité-quotient (i. e., (X, x)

est isomorphe à un quotient de $(\mathbf{C}^n, O)$ par un sous-groupe fini du groupe linéaire), et par moi-même [8] dans le cas où (X, x) est un germe de courbe irréductible, ou un germe d'espace analytique dont le normalisé est $(\mathbf{C}^n, O)$.

Soit $X \subset \mathbf{C}^n$ un cône normal de dimension 2, et soit O le sommet du cône. Soit $\overline{X} \subset P_{n-1}(\mathbf{C})$ la courbe projective associée au cône X, elle est sans singularités; soit g son genre. Si $g = 0$, on déduit facilement d'un résultat de BRIESKORN [3] que (X, O) est une singularité-quotient. On peut appliquer le résultat de KANTOR [5], et l'on trouve :

Soit X un cône normal de dimension 2 *construit sur une courbe projective sans singularités de genre* $g = 0$. *Alors l'algèbre* $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,O}))$ *est une* $\mathcal{O}_{X,O}$*-algèbre de type fini. On en déduit que la* $\mathbf{C}$*-algèbre* $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,O})$ *est engendrée par* $\mathcal{O}_{X,O}$ *et un nombre fini d'éléments.*

Le cas du cône $x_1^3+x_2^3+x_3^3 = 0$ dans $\mathbf{C}^3$ (genre $(\overline{X}) = 1$) a été étudié par I. BERNSTEIN, I. GEL'FAND et S. GEL'FAND [1]. Nous allons démontrer le résultat suivant qui généralise le résultat de [1].

THÉORÈME 1.1. — *Soit* $X \subset \mathbf{C}^3$ *un cône normal défini par un polynôme P homogène de degré n, et soit* $\overline{X}$ *la courbe projective associée* ($\overline{X}$ *est sans singularités*). *Si* $n \geqslant 3$ (*i, e.*, genre $(\overline{X}) \geqslant 1$), *alors, pour tout* $d \geqslant 0$, *la* $\mathbf{C}$*-algèbre* $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,O})$ *n'est pas engendrée par* $\mathrm{Diff}^{d}(\mathcal{O}_{X,O})$.

Remarquons (*voir* [9]) que pour qu'un cône X de dimension 2 plongé dans $\mathbf{C}^3$ soit normal, il faut et il suffit que O soit le seul point singulier de X, ou ce qui revient au même, que $\overline{X}$ soit sans singularités. Compte tenu de la proposition 7 de [8], on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.2. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.1, *la* $\mathcal{O}_{X,O}$*-algèbre* $\mathrm{Gr}(\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,O}))$ *n'est pas une* $\mathcal{O}_{X,O}$*-algèbre de type fini.*

Dans notre étude de la $\mathbf{C}$-algèbre $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathcal{O}_{X,O})$, nous verrons que le cas $n = 3$ et le cas $n \geqslant 4$ sont assez différents. Nous montrerons comment le raisonnement de [1] se généralise au cas des cônes normaux définis par un pôlynome P homogène de degré $n = 3$, et nous donnerons la démonstration complète dans le cas $n \geqslant 4$.

Je remercie Henri CARTAN
de l'aide et des encouragements qu'il m'a apportés.

2. Définitions et premières propriétés

Dans ce paragraphe, on supposera seulement que $X \subset \mathbf{C}^p$ ($p \geqslant 3$) est un cône normal construit sur une courbe projective lisse $\overline{X} \subset P_{p-1}(\mathbf{C})$ de genre g. Soit O le sommet de X.

LEMME 2.1. — *Soit U un voisinage ouvert du sommet O dans X. Tout opérateur différentiel défini sur $U - \{ O \}$ se prolonge de manière unique en un opérateur différentiel sur U.*

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur l'ordre k de l'opérateur différentiel D. Si $k = 0$, D est la multiplication par une fonction holomorphe a sur $U - \{ O \}$. Comme X est normal, a se prolonge en une fonction holomorphe sur U tout entier, et par suite, D se prolonge en un opérateur différentiel sur U. Supposons le résultat démontré à l'ordre $(k-1)$, montrons-le à l'ordre k.

Soit $D \in \Gamma(U - \{ O \}, \operatorname{Diff}^k(\mathcal{O}_X))$. Pour tout voisinage ouvert ω de O contenu dans U, et pour tout $f \in \Gamma(\omega, \mathcal{O}_X)$, $D(f)$ est une fonction holomorphe sur $\omega - \{ O \}$; $O(f)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur ω tout entier, nous la noterons $\Delta(f)$. Pour montrer que $\Delta \in \Gamma(U, \operatorname{Diff}^k(\mathcal{O}_X))$, d'après la définition récurrente des opérateurs différentiels [8], il suffit de vérifier que, pour tout ouvert $\omega \subset U$, pour tout $a \in \Gamma(\omega, \mathcal{O}_X)$,

$$f \mapsto \Delta(af) - a\Delta(f) = \Delta'(f),$$
$$\Gamma(\omega, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(\omega, \mathcal{O}_X)$$

est un opérateur différentiel sur ω d'ordre $\leqslant k-1$. C'est évident d'après l'hypothèse de récurrence.

DÉFINITION 2.2. — *Soit U un ouvert de X. On dit qu'un opérateur différentiel $D \in \Gamma(U, \operatorname{Diff}^k(\mathcal{O}_X))$ est homogène de degré i, si pour tout ouvert $\omega \subset U$, pour tout $q \in \mathbf{Z}$, $D(M_q(\omega)) \subset M_{q+i}(\omega)$. [$M_q(\omega)$ désigne le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions holomorphes sur ω et homogènes de degré q].*

Nous noterons D^k le $\mathcal{O}_{X,O}$-module des germes d'opérateurs différentiels sur X au voisinage de O d'ordre $\leqslant k$. ($D^k = \operatorname{Diff}^k(\mathcal{O}_{X,O})$). Soit D_i^k le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des germes d'opérateurs différentiels sur X au voisinage de O d'ordre $\leqslant k$ et homogènes de degré i. On vérifie facilement que si $D \in D_i^k$, D se prolonge en un opérateur différentiel homogène d'ordre $\leqslant k$ et de degré i sur X tout entier.

LEMME 2.3. — *Soit D un germe d'opérateur différentiel sur X au voisinage du sommet O d'ordre $\leqslant k$. Alors, D se décompose de manière unique sous la forme d'une série convergente*

$$D = \sum_{i=-k}^{+\infty} D_i, \quad \textit{où, pour tout } i, \quad D_i \in D_i^k.$$

Démonstration. — Soit J l'idéal homogène qui définit X, et soit $D \in D^k$. D'après une des définitions équivalentes des opérateurs différentiels, on sait qu'il existe un germe d'opérateur différentiel d'ordre $\leqslant k$ sur $(\mathbf{C}^n, O)$,

$$\Delta = \sum_{|j| \leqq k} f_j(x) \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j}.$$

tel que $\Delta(J) \subset J$, et tel que Δ, par passage au quotient, induise D. On peut décomposer Δ en

$$\Delta = \sum_{i=-k}^{+\infty} \Delta_i,$$

où, pour tout i, Δ_i est homogène de degré i. On montre que $\Delta_i(J) \subset J$, et, par passage au quotient, on obtient une décomposition

$$D = \sum_{i=-k}^{+\infty} D_i,$$

et on vérifie facilement qu'une telle décomposition est unique.

Exemple. — Soit I l'opérateur différentiel défini sur $\mathbf{C}^p$ (coordonnées $x_1, \ldots, x_p$) par

$$I = \sum_{i=1}^{p} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

I induit sur X un opérateur différentiel (que nous noterons encore I) d'ordre 1, homogène de degré 0.

Soit $X_0 = X - \{O\}$, et soit π l'application naturelle $X_0 \to \overline{X}$. Soit $\mathscr{D}_i^k$ le faisceau sur X_0 des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leqslant k$ et de degré i. Soit $\Delta_i^k = \pi_* \mathscr{D}_i^k$. Soit $\mathscr{L} = \Delta_1^0$ le faisceau des germes de fonctions homogènes de degré 1.

PROPOSITION 2.4 :

(*a*) *Δ_i^k est un faisceau localement libre sur $\overline{X}$, et $H^0(\overline{X}, \Delta_i^k) = D_i^k$; $\mathscr{L}$ est inversible.*

(*b*) $\Delta_i^k = \Delta_0^k \otimes \mathscr{L}^i$.

(*c*) *Soit* $\sigma_k = \Delta_0^k/\Delta_0^{k-1}$ ($\sigma_0 = \mathcal{O}_{\overline{X}}$). *Alors* $\sigma_k = S^k(\sigma_1)$ (*puissance symétrique k-ième*).

(*d*) *Soit* $\mathcal{N}$ *le sous-*$\mathcal{O}_{\overline{X}}$*-module libre de* σ_1 *engendré par I, et soit* $\mathcal{K} = \sigma_1/\mathcal{N}$. *Alors* $\mathcal{K}$ *est isomorphe au faisceau des germes de sections holomorphes du fibré tangent de* $\overline{X}$.

La proposition 2.4. s'inspire de [1]. Sa démonstration est laissée en exercice!

PROPOSITION 2.5. — *Pour tout* $k \geqslant 1$, *il existe deux suites exactes* :

$$(1)_k \qquad 0 \to \mathcal{N}^k \xrightarrow{\varphi_k} \sigma_k \xrightarrow{\psi_k} \mathcal{K} \otimes \sigma_{k-1} \to 0,$$

$$(2)_k \qquad 0 \to \sigma_{k-1} \xrightarrow{\theta_k} \sigma_k \xrightarrow{\eta_k} \mathcal{K}^k \to 0,$$

où θ_k *est induite par la multiplication par* I.

Démonstration. — Soit U un ouvert de Stein contenu dans $\overline{X}$. Alors la suite

$$0 \to \Gamma(U, \mathcal{N}) \xrightarrow{\varphi_1} \Gamma(U, \sigma_1) \xrightarrow{\psi_1} \Gamma(U, \mathcal{K}) \to 0$$

est exacte, et on peut choisir U suffisamment petit de façon que $\Gamma(U, \mathcal{K})$ soit engendré comme $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\overline{X}})$-module par une section partout non nulle $h(U)$. Soit $\tilde{h}(U) \in \Gamma(U, \sigma_1)$ telle que $\psi_1(\tilde{h}(U)) = h(U)$.

(*a*) Les $(\tilde{h}(U)^i I^{k-i})_{i=0,\ldots,k}$ forment une base du $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\overline{X}})$-module libre $\Gamma(U, \sigma_k)$. Définissons

$$\varphi_{k|U}(I^k) = I^k,$$
$$\psi_{k\,|\,U}(\tilde{h}(U)^i I^{k-i}) = i h(U) \otimes (\tilde{h}(U)^{i-1} I^{k-i}).$$

Il est clair que, sur U, $(\varphi_{k\,|\,U}, \psi_{k\,|\,U})$ définissent une suite exacte. Le seul point qui reste à vérifier est que les $(\varphi_{k\,|\,U}, \psi_{k\,|\,U})$ se recollent pour définir (φ_k, ψ_k).

Soit V un autre ouvert. On choisit de même $h(V)$ et $h(V)$. On définit aussi $(\varphi_{k\,|\,V}, \psi_{k\,|\,V})$. Sur $U \cap V$, on a

$$h(V) = f(x)\,h(U), \qquad \text{avec } f(x) \neq 0, \quad \text{pout tout } x \in U \cap V;$$
$$\tilde{h}(V) = f(x)\,\tilde{h}(U) + g(x)\,I.$$

Il est évident que $\varphi_{k\,|\,U} = \varphi_{k\,|\,V}$ sur $U \cap V$. Comparons $\psi_{k\,|\,U}$ et $\psi_{k\,|\,V}$:

$$\begin{aligned}
&\psi_{k\,|\,U}(\tilde{h}(V)^i I^{k-i}) \\
&= \psi_{k\,|\,U}[(f(x)\tilde{h}(U)+g(x)I)^i I^{k-i}] \\
&= \psi_{k\,|\,U}(\textstyle\sum_{p=0}^{i} C_i^p\,(f(x)\tilde{h}(U))^p (g(x)I)^{i-p} I^{k-i}) \\
&= f(x)\,h(U) \otimes (\textstyle\sum_{p=0}^{i} p\,C_i^p (f(x)\tilde{h}(U))^{p-1} (g(x)I)^{i-p} I^{k-i}) \\
&= i\,f(x)\,h(U) \otimes [(f(x)\tilde{h}(U)+g(x)I)^{i-1} I^{k-i}].
\end{aligned}$$

On a bien $\psi_{k\,|\,U} = \psi_{k\,|\,V}$, et l'existence de la suite exacte $(1)_k$ est démontrée.

(*b*) On définit de même

$$\theta_{k\,|\,U}(\tilde{h}(U)^i I^{(k-1)-i}) = \tilde{h}(U)^i I^{k-i};$$

$$\eta_{k\,|\,U}(\tilde{h}(U)^i I^{k-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ h(U)^k & \text{si } i = k. \end{cases}$$

On montre de même que ces applications se recollent, et qu'elles définissent une suite exacte.

3. **Opérateurs différentiels d'ordre** 1 **sur** X

Nous supposerons dans ce paragraphe que X est un cône normal plongé dans $\mathbf{C}^3$, défini par un polynôme homogène P de degré $n \geqslant 3$. Montrons la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. — *Pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n-3$, D_i^1/D_i^0 est engendré comme* $\mathbf{C}$*-espace vectoriel par les $x^p.I$, où $|p| = p_1+p_2+p_3 = i$.*

Démonstration. — Les $x^p.I$ sont bien des éléments de D_i^1. Il suffit de vérifier que modulo D_i^0, ils engendrent D_i^1. Soit $\Delta \in D_i^1/D_i^0$. Il existe un opérateur différentiel D sur $\mathbf{C}^3$,

$$D = \textstyle\sum_{j=1}^{3} f_j \dfrac{\partial}{\partial x_j},$$

tel que D définisse un opérateur différentiel D_0 sur (X, O) dont la classe dans D_i^1/D_i^0 est égale à Δ. On peut choisir D de façon que les f_j soient des polynômes homogènes de degré $(i+1)$.

Comme D définit un opérateur différentiel sur (X, O), on sait que

$$D(P) = Q.P,$$

où Q est un polynôme homogène de degré i.

Donc

$$\left(D - \left(\frac{1}{n} Q\right) I\right)(P) = 0.$$

Pour montrer que $D = \left(\frac{1}{n} Q\right) I$, il suffit de démontrer le lemme suivant.

LEMME 3.2. — *Soit $P \in \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]$ un polynôme homogène de degré n, tel que la courbe projective associée $\overline{X} \subset P_2(\mathbf{C})$ soit sans singularités. Alors l'ensemble des polynômes (f_1, f_2, f_3) de degrés $\leqslant n-2$, solutions de l'équation*

$$\sum_{j=1}^{3} f_j \frac{\partial P}{\partial x_j} = 0$$

est réduit à $(0, 0, 0)$.

Démonstration. — Soit $J \subset \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ l'idéal engendré par $(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2, \partial P/\partial x_3)$. Du fait que O est le seul point singulier de X, on déduit que J est un idéal de hauteur 3. Un lemme sur les anneaux de Cohen-Macaulay (*voir* par exemple [7]) montre que $(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2, \partial P/\partial x_3)$ forment une suite régulière.

Du fait que $f_3\, \partial P/\partial x_3 = 0$ dans $\mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}/(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2)$, on déduit que f_3 appartient à $(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2)$, et si on suppose que $\deg(f_3) \leqslant n-2$, cela entraîne $f_3 = 0$. De même, on montre que $f_1 = f_2 = 0$.

On remarque que la démonstration de [1] se généralise au cas d'un cône normal $X \subset \mathbf{C}^3$, défini par un polynôme homogène P de degré 3, une fois qu'on a démontré

$$\dim H^0(\overline{X}, \sigma_1) = \dim D_0^1/D_0^0 = 1.$$

Le théorème 1.1 *est ainsi démontré dans le cas* $n = 3$. *Le reste de cet article sera consacré à la démonstration du théorème dans le cas* $n \geqslant 4$.

4. Opérateurs différentiels de degré $\leqslant 0$

Dans ce paragraphe, nous supposerons seulement que $X \subset \mathbf{C}^p$ est un cône normal de dimension 2, construit sur une courbe projective lisse $\ddot{\bar{X}}$ de genre $g \geqslant 2$.

PROPOSITION 4.1. — *Soit $X \subset \mathbf{C}^p$ un cône normal construit sur une courbe projective lisse $\bar{X}$ de genre $g \geqslant 1$. Alors, pour tout $i < 0$, pour tout $k \geqslant 0$, $D_i^k = 0$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que $\mathrm{H}^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) = 0$ par récurrence sur k.

Pour $k = 0$, on doit étudier $H^0(\bar{X}, \mathscr{L}^i)$. On sait que $\deg \mathscr{L} > 0$. Pour tout $i < 0$, $\deg \mathscr{L}^i < 0$, et par suite, $H^0(\bar{X}, \mathscr{L}^i) = 0$. Supposons le résultat démontré à l'ordre $(k-1)$, montrons-le à l'ordre k. A partir de la suite exacte $(2)_k$, on obtient par multiplication tensorielle par le faisceau localement libre $\mathscr{L}^i$ la suite exacte

$$0 \to \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i \to \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i \to \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i \to 0,$$

et la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i) \to H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) \to H^0(\bar{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i).$$

On a

$$\deg(\mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) = k \deg \mathscr{K} + i \deg \mathscr{L}.$$

On sait que $\deg \mathscr{K} = -(2g-2) \leqslant 0$, et que $i \deg \mathscr{L} < 0$. Donc $\deg(\mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) < 0$, et par suite $H^0(\bar{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, $H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i) = 0$, On en déduit que $H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) = 0$.

On montre alors facilement par récurrence sur k que $D_i^k = 0$. Il suffit pour cela de considérer la suite exacte

$$0 \to \Delta_i^{k-1} \to \Delta_i^k \to \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i \to 0,$$

et la suite exacte de cohomologie associée

$$0 \to D_i^{k-1} \to D_i^k \to H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i).$$

PROPOSITION 4.2. — *Soit $X \subset \mathbf{C}^p$ un cône normal construit sur une courbe projective lisse $\bar{X}$ de genre $g \geqslant 2$. Alors, le $\mathbf{C}$-espace vectoriel D_0^k admet une base formée des vecteurs $1, I, I^2, \ldots, I^k$.*

Démonstration. — Il est clair que $1, I, I^2, \ldots, I^k$ forment un système libre du $\mathbf{C}$-espace vectoriel D_0^k. Pour montrer la proposition, il suffit de démontrer par récurrence sur k que $\dim_{\mathbf{C}} H^0(\overline{X}, \sigma_k) = 1$.

La propriété est vraie pour $k = 0$, car $\sigma_0 = \mathcal{O}_{\overline{X}}$. Supposons-la démontrée à l'ordre $(k-1)$, montrons-la à l'ordre k.

De la suite exacte $(2)_k$, on tire la suite exacte de cohomologie

$$0 \to H^0(\overline{X}, \sigma_{k-1}) \to H^0(\overline{X}, \sigma_k) \to H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k).$$

On a $\deg \mathscr{K}^k = k \deg \mathscr{K} = k(2-2g) < 0$, et par suite $H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k) = 0$. On en déduit

$$\dim H^0(\overline{X}, \sigma_k) = \dim H^0(\overline{X}, \sigma_{k-1}) = 1,$$

et la proposition est démontrée.

Remarquons (nous l'utiliserons par la suite) que, pour tout $k \geqslant 0$, on a

$$D_0^k / D_0^{k-1} = H^0(\overline{X}, \sigma_k).$$

5. Étude d'une suite exacte

A partir de maintenant, nous supposerons que $X \subset \mathbf{C}^3$ est un cône normal défini par un polynôme P homogène de degré $n \geqslant 4$. On sait que la courbe projective associée $\overline{X}$ est sans singularités et que son genre est $g = ((n-1)(n-2))/2$. On a aussi :

$$\deg(\Omega) = n(n-3) \qquad \text{et} \qquad \deg(\mathscr{K}) = -n(n-3).$$

[Ω désigne le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes sur $\overline{X}$ de degré 1.]

LEMME 5.1. — *$\deg \mathscr{L} = n$ et $\mathscr{L}^{n-3}$ est isomorphe à Ω.*

Démonstration. — Toute section holomorphe de $\mathscr{L}$ a n zéros comptés avec leurs ordres de multiplicité, ce qui entraîne $\deg \mathscr{L} = n$.

Étudions $\mathscr{L}^{n-3}$. On montre que

$$\dim H^0(\overline{X}, \mathscr{L}^{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

On déduit du théorème de Riemann-Roch que $\dim H^1(\overline{X}, \mathscr{L}^{n-3}) = 1$. D'après [4], ceci entraîne que $\mathscr{L}^{n-3}$ est isomorphe à Ω.

Nous allons maintenant étudier, pour tout $k \geqslant 1$, pour tout $i \geqslant 0$ la suite exacte

$$0 \to \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i \to \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i \to \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i \to 0,$$

et la suite exacte de cohomologie associée

$$(3) \quad 0 \to H^0(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i) \xrightarrow{\varphi_{k,i}} H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) \xrightarrow{\psi_{k,i}} H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i)$$
$$\to H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i) \xrightarrow{\theta_{k,i}} H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) \xrightarrow{\eta_{k,i}} H^1(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) \to 0.$$

(La suite exacte s'arrête, car on sait que, pour tout faisceau cohérent $\mathscr{F}$ sur $\overline{X}$, on a, pour tout $i \geqslant 2$, $H^i(\overline{X}, \mathscr{F}) = 0$). L'étude de cette suite exacte nous permettra de calculer les opérateurs différentiels sur X.

LEMME 5.2 :

(*a*) $[i \geqslant (n-3)k+(n-2)] \Rightarrow [H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) = 0]$;

(*b*) *Pour tout* $k \geqslant 0$, $\dim H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k+1)}) = 1$;

(*c*) *Pour tout* $k \geqslant 0$, $\dim H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = ((n-1)(n-2))/2$.

Démonstration :

(*a*) se démontre, pour un i donné, par récurrence sur k. Si $k = 0$, $\sigma_0 \otimes \mathscr{L}^i$ est isomorphe à $\mathscr{L}^i$. Dès que $i \geqslant n-2$, on a

$$\deg \mathscr{L}^i > (2g-2) = n(n-3),$$

et par suite, $H^1(\overline{X}, \mathscr{L}^i) = 0$.

Supposons le résultat démontré à l'ordre $(k-1)$, montrons-le à l'ordre k [on suppose bien sûr que $i \geqslant (n-3)k+(n-2)$]. Dans (3), $H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i) = 0$ par l'hypothèse de récurrence. Du fait que $\mathscr{K}$ est le dual de Ω et du lemme 5.1, on déduit que $\mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i$ est isomorphe à $\mathscr{L}^{i-(n-3)k}$; donc $[i \geqslant (n-3)k+(n-2)]$ entraîne $[H^1(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) = 0]$, et par suite $H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) = 0$.

Remarquons que les résultats (*b*) et (*c*) sont déjà connus pour $k = 0$. On peut donc supposer $k \geqslant 1$.

(*b*) Considérons le morceau de la suite exacte (3) pour $i = (n-3)(k+1)$:

$$H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k+1)}) \to H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k+1)})$$
$$\to H^1(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k+1)}) \to 0.$$

D'après (*a*), $H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k+1)}) = 0$; d'autre part, on sait que $\mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k+1)}$ est isomorphe à $\mathscr{L}^{n-3}$ et que $\dim H^1(\overline{X}, \mathscr{L}^{n-3}) = 1$. Donc, $\dim H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k+1)}) = 1$.

(*c*) Considérons la suite exacte

$$0 \to \mathscr{N}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k} \to \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k} \to \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k} \to 0,$$

et le morceau de suite exacte de cohomologie associée :

$$H^1(\overline{X}, \mathscr{N}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) \to H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) \\ \to H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) \to 0.$$

Si $k > 1$,

$$H^1(\overline{X}, \mathscr{N}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = H^1(\overline{X}, \mathscr{L}^{(n-3)k}) = 0.$$

On a donc

$$\dim H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = \dim H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}).$$

Mais $\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{n-3}$ est isomorphe à $\mathscr{O}_{\overline{X}}$; on en déduit

$$\dim H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = \dim H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)(k-1)}).$$

Finalement, on trouve

$$\dim H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = \dim H^1(\overline{X}, \sigma_1 \otimes \mathscr{L}^{n-3}),$$

et (*c*) sera une conséquence du lemme suivant.

LEMME 5.3. — $\dim H^1(\overline{X}, \sigma_1 \otimes \mathscr{L}^{n-3}) = ((n-1)(n-2))/2$.

Démonstration. — Considérons la suite exacte (3) pour $k = 1$, $i = n-3$. Dans cette suite exacte, on connaît les dimensions de tous les espaces vectoriels sauf celle de $H^1(\overline{X}, \sigma_1 \otimes \mathscr{L}^{n-3})$. En effet, $\sigma_0 \otimes \mathscr{L}^{n-3}$ est isomorphe à Ω. On a donc

$$\dim H^0(\overline{X}, \sigma_0 \otimes \mathscr{L}^{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \qquad \dim H^1(\overline{X}, \sigma_0 \otimes \mathscr{L}^{n-3}) = 1.$$

On déduit de la proposition 3.1 que

$$\dim H^0(\overline{X}, \sigma_1 \otimes \mathscr{L}^{n-3}) = \dim D^1_{n-3}/D^0_{n-3} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Enfin, $\mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{n-3}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\overline{X}}$, on a donc :

$$\dim H^0(\overline{X}, \mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{n-3}) = 1, \qquad \dim H^1(\overline{X}, \mathscr{K} \otimes \mathscr{L}^{n-3}) = g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

On trouve finalement

$$\dim H^1(\overline{X}, \sigma_1 \otimes \mathscr{L}^{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

PROPOSITION 5.4 :

(*a*) $[i \geqslant (n-3)k+1] \Rightarrow [\psi_{k,i}$ *est surjective*$]$;

(*b*) $\dim H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = 1$, $\psi_{k,(n-3)k} = 0$, *et par suite* $\varphi_{k,(n-3)k}$ *est un isomorphisme;*

(*c*) $[i \leqslant (n-3)k-1] \Rightarrow [H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) = 0]$, *et par suite* $\varphi_{k,i}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration :

(*a*) Si $i \geqslant (n-3)k+1$, on a vu que $H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i) = 0$, par suite $\psi_{k,i}$ est surjective.

(*c*) Si $i \leqslant (n-3)k-1$, on a

$$\deg(\mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) = -kn(n-3) + in < 0,$$

ce qui entraîne $H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^i) = 0$. On en déduit que $\varphi_{k,i}$ est un isomorphisme.

(*b*) Soit $i = (n-3)k$. Le faisceau $\mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\overline{X}}$, on a donc :

$$\dim H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = 1,$$
$$\dim H^1(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

D'après le lemme 5.2,

$$\dim H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

On en déduit que $\theta_{k,(n-3)k} = 0$.

On sait aussi que $\dim H^1(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k}) = 1$. Cela entraîne que $\psi_{k,(n-3)k} = 0$, et que $\varphi_{k,(n-3)k}$ est un isomorphisme.

C. Q. F. D.

Il faut maintenant étudier les rapports entre les D_i^k et les $H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i)$.

PROPOSITION 5.5. — *Pour tout i, pour tout k,* $D_i^k/D_i^{k-1} = H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i)$. *De plus, pour tout* $k > 0$, *pour tout* $i \leqslant (n-3)k$, *tout opérateur différentiel* $D \in D_i^k$ *s'écrit :*

$$D = I.\Delta_1 + \Delta_2, \quad \textit{avec } \text{ordre}(\Delta_2) < k.$$

Démonstration. — Considérons la suite exacte

$$0 \to \Delta_i^{k-1} \to \Delta_i^k \to \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i \to 0,$$

et la suite exacte de cohomologie associée

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(\overline{X}, \Delta_i^{k-1}) \to H^0(\overline{X}, \Delta_i^k) \to H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) \\ &\to H^1(\overline{X}, \Delta_i^{k-1}) \to H^1(\overline{X}, \Delta_i^k) \to H^1(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) \to 0. \end{aligned}$$

En étudiant cette suite exacte, on montre d'abord facilement par récurrence sur $k \geqslant 0$ que, pour $i \geqslant (n-3)k+(n-2)$, $H^1(\overline{X}, \Delta_i^k) = 0$. On en déduit que, pour $i \geqslant (n-3)k+1$, on a $H^1(\overline{X}, \Delta_i^{k-1}) = 0$, et par suite $D_i^k/D_i^{k-1} = H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i)$. La première partie de la proposition est démontrée pour $i \geqslant (n-3)k+1$.

Supposons maintenant que $i \leqslant (n-3)k$. Le cas $i = 0$ a déjà été traité dans la proposition 4.2, on peut donc supposer $i > 0$. Montrons que $D_i^k/D_i^{k-1} = H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i)$ et que $D_i^k/D_i^{k-1} = I.(D_i^{k-1}/D_i^{k-2})$ par récurrence sur $k \geqslant i(n-3) > 0$. Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant, où les suites horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & D_i^{k-1}/D_i^{k-2} \arrow[r, "(\times I)"] \arrow[d, "\wr"] & D_i^k/D_i^{k-1} \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & H^0(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^i) \arrow[r, "(\times I)"] & H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Par l'hypothèse de récurrence, la première flèche verticale est un isomorphisme. Comme le diagramme est commutatif, ce'a entraîne que l'application $D_i^k/D_i^{k-1} \to H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i)$ est surjective, et par suite bijective (en effet, on sait que D_i^k/D_i^{k-1} s'injecte dans $H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^i)$). On en déduit que l'application $D_i^{k-1}/D_i^{k-2} \xrightarrow{(\times I)} D_i^k/D_i^{k-1}$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstra ion de la proposition.

6. Fin de la démonstration

Le théorème 1.1 sera une conséquence, dans le cas $n \geqslant 4$, de la proposition suivante.

PROPOSITION 6.1. — *Pour tout i, pour tout $k \geqslant 0$, soit H_i^k le sous-espace vectoriel de D_i^k formé des opérateurs différentiels obtenus comme somme de produits d'opérateurs d'ordre $< k$. Alors, pour tout $k \geqslant 2$,*

$$\dim_{\mathbf{C}} D^k_{(n-3)k+1}/H^k_{(n-3)k+1} = 3.$$

Montrons d'abord le lemme ci-après.

LEMME 6.2. — *Soient $k > 0$, et $i = (n-3)k+1$. Soit D un opérateur différentiel homogène de degré i, et supposons que $D = D_1 \circ \ldots \circ Dr$, avec, pour tout $j\,(j = 1, \ldots, r)$,* ordre $(D_j) < k$. *Alors* :

$$D = I.\Delta+\delta_0, \quad \textit{avec } \text{ordre } (\delta_0) < k.$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur $m =$ ordre (D). Si $m < k$, $D = \delta_0$, et il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat démontré à l'ordre $(m-1)$, et montrons-le à l'ordre $m \geqslant k$.

Du fait que D est homogène de degré i, on déduit que chacun des D_j est homogène, et l'on a

$$\deg(D_1)+\ldots+\deg(D_r) = i = (n-3)k+1;$$

d'autre part,

$$\text{ordre}(D_1)+\ldots+\text{ordre}(D_r) = m \geqslant k,$$

et donc

$$(n-3)\,\text{ordre}(D_1)+\ldots+(n-3)\,\text{ordre}(D_r) \geqslant (n-3)\,k.$$

Comme, pour tout j, ordre $(D_j) < k$, on sait que, dans le produit, il y a au moins deux facteurs. Il existe donc un indice j_0 tel que

$$(n-3)\,\text{ordre}(D_{j_0}) \geqslant \deg(D_{j_0}) > 0.$$

Alors d'après la proposition 5.5,

$$D_{j_0} = I.\Delta_1+\Delta_2,$$

avec ordre $(\Delta_2) <$ ordre (D_{j_0}).

On a donc :

$$\begin{aligned} D &= D_1 \circ \ldots \circ D_{j_0-1} \circ (I.\Delta_1+\Delta_2) \circ \ldots \circ D_r \\ &= I \circ (D_1 \circ \ldots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_1 \circ \ldots \circ D_r) \\ &\quad + \textstyle\sum_{j=1}^{j_0-1} D_1 \circ \ldots \circ D'_j \circ \ldots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_1 \circ \ldots \circ D_r \\ &\quad + D_1 \circ \ldots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_2 \circ \ldots \circ D_r, \end{aligned}$$

où $D'_j = D_j \circ I - I \circ D_j$, et on sait que ordre $(D'_j) \leqslant$ ordre (D_j). On applique alors l'hypothèse de récurrence aux

$$(D_1 \circ \ldots \circ D'_j \circ \ldots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_1 \circ \ldots \circ D_r)$$

et à

$$(D_1 \circ \ldots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_2 \circ \ldots \circ D_r),$$

qui sont tous d'ordre $< m$, et de degré i, et on obtient le résultat annoncé.

PROPOSITION 6.3. — *Pour tout* $k \geqslant 2$ (1),

$$H^k_{(n-3)k+1} = I.D^{k-1}_{(n-3)k+1} + D^{k-1}_{(n-3)k+1}.$$

Démonstration. — Comme $k \geqslant 2$, I est un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant k-1$; il est clair que $H^k_{(n-3)k+1}$ contient alors $I.D^{k-1}_{(n-3)k+1} + D^{k-1}_{(n-3)k+1}$. Réciproquement, soit $D \in H^k_{(n-3)k+1}$. On a

$$D = \textstyle\sum_{j \in J} D_{j_1} \circ \ldots \circ D_{j_r},$$

avec pour tout j_l, ordre $(D_{j_l}) < k$. Quitte à décomposer chacun des D_{j_l} en somme d'opérateurs différentiels homogènes, ce qui est possible d'après le lemme 2.3, on peut les supposer homogènes. On a donc, d'après le lemme 6.2,

$$D = \textstyle\sum_{j \in J} (I.\Delta_{j,1} + \Delta_{j,2}),$$

avec, pour tout j, ordre $(\Delta_{j,2}) < k$. Finalement, on trouve :

$$D = I.\Delta_1 + \Delta_2, \quad \text{avec ordre } (\Delta_2) < k.$$

C. Q. F. D.

---

(1) Si on ne suppose pas $k \geqslant 2$, on peut seulement montrer que $H^k_{(n-3)k+1}$ est contenu dans $I.D^{k-1}_{(n-3)k+1} + D^{k-1}_{(n-3)k+1}$.

Nous pouvons maintenant montrer la proposition 6.1. : On déduit de la proposition 6.3 que, pour tout $k \geqslant 2$,

$$H^k_{(n-3)k+1}/D^{k-1}_{(n-3)k+1} = I.(D^{k-1}_{(n-3)k+1}/D^{k-2}_{(n-3)k+1}),$$

$$\begin{aligned} D^k_{(n-3)k+1}/H^k_{(n-3)k+1} \\ &= [D^k_{(n-3)k+1}/D^{k-1}_{(n-3)k+1}]/[I.(D^{k-1}_{(n-3)k+1}/D^{k-2}_{(n-3)k+1})] \\ &= H^0(\overline{X}, \sigma_k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k+1})/I.H^0(\overline{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k+1}). \end{aligned}$$

$D^k_{(n-3)k+1}/H^k_{(n-3)k+1}$ est donc isomorphe à $\operatorname{Im} \psi_{k,(n-3)k+1}$, et comme $\psi_{k,(n-3)k+1}$ est surjective, on trouve :

$$\begin{aligned} \dim D^k_{(n-3)k+1}/H^k_{(n-3)k+1} \\ &= \dim H^0(\overline{X}, \mathscr{K}^k \otimes \mathscr{L}^{(n-3)k+1}) = \dim H^0(\overline{X}, \mathscr{L}) = 3, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 6.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNSTEIN (I. N), GEL'FAND (I. M.) et GEL'FAND (S. I.). — Opérateurs différentiels sur un cône cubique [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk*, t. 27, 1972, p. 185-190; et [en anglais], *Russian math. Surv.*, t. 27, 1972, p. 169-174).

[2] BLOOM (T.). — Opérateurs différentiels sur un espace analytique complexe, *Séminaire Lelong : Analyse*, Année 1967-1968. — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 71).

[3] BRIESKORN (E.). — Rationale Singularitäten komplexer Flächen, *Invent. Math.*, t. 4, 1968, p. 336-358.

[4] GUNNING (R. C.). — *Lectures on Riemann surfaces*. — Princeton, Princeton University Press, 1966 (*Mathematical Notes*).

[5] KANTOR (J.-M.). — Opérateurs différentiels sur les singularités-quotients, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, 1971, Série A, p. 897-899.

[6] MALGRANGE (B.). — Analytic spaces, "*Topics in several complex variables*", p. 1-29. — Genève, Enseignement Mathématique, 1968 (*Monographies de l'Enseignement mathématique*, 17).

[7] MATSUMURA (H.). — *Commutative algebra*. — New York, Amsterdam W. A. Benjamin, 1970 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[8] VIGUÉ (J.-P.). — Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques, *Invent. Math.*, t. 20, 1973, p. 313-336.

[9] WHITNEY (H.). — *Complex analytic varieties*. — Reading, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

(Texte reçu le 2 juillet 1974.)

Jean-Pierre VIGUÉ,
Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
Centre universitaire d'Orsay,
91405 Orsay.