BULLETIN DE LA S. M. F.

VINCENT COSSART

Sur le polyèdre caractéristique d'une singularité

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 13-19

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__13_0>

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 13-19.

SUR LE POLYÈDRE CARACTÉRISTIQUE D'UNE SINGULARITÉ

par

VINCENT COSSART

RÉSUMÉ. — Une condition géométrique suffisante pour que des variables définissent le polyèdre caractéristique d'une singularité d'un sous-espace analytique complexe lisse et une démonstration *a priori* de l'existence de telles variables.

Soit $F : Z \to \mathbf{C}^d$ un morphisme lisse d'espaces analytiques complexes lisses, et soit X un sous-espace analytique fermé de Z, plat sur S en un point x, soit $s = F(x)$. A chaque système de fonctions $y = (y_1, \ldots, y_r)$ définissant un $\mathbf{C}^d$-isomorphisme $\alpha : Z \to \mathbf{C}^{d+r}$ tel que $\alpha(x) = 0$, HIRONAKA attache un polyèdre $\Delta_x(X, y)$ de $\mathbf{R}^r$, et trouve que l'intersection $\Delta_x(X)$ de ceux-ci s'obtient pour un choix convenable de y [3]. Nous montrons directement que si la section W de F d'équations $y_1 = \ldots = y_r = 0$ contient la strate de Samuel relative $S_x(X/S)$ de X au point x (comme sous-espace et pas seulement ensemblistement) [2], alors $\Delta_x(X, y) = \Delta_x(X)$, ce qui assure en particulier que, aux points x' de $S_x(X/S)$ voisins de x, on a encore $\Delta_{x'}(X, y) = \Delta_{x'}(X)$. Ce résultat ne s'obtient pas par la méthode d'HIRONAKA, qui a le défaut d'être purement ponctuelle, mais qui, en revanche, donne un procédé de construction de $\Delta_x(X)$ et des y_i.

Rappelons les notations introduites par HIRONAKA [3].

NOTATIONS. — On note $R = \mathbf{C}\{u_1, \ldots, u_d, y_1, \ldots, y_r\} = \mathbf{C}\{u, y\}$ l'anneau des séries à coefficients complexes à $n = d+r$ variables qui convergent dans un voisinage à l'origine, et on considère un idéal J de R.

DÉFINITION 1. — *Une forme linéaire sur $\mathbf{R}^d$ à coefficients tous positifs $L(a_1, \ldots, a_d) = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_d a_d$, avec $c_1 > 0, c_2 > 0, \ldots, c_d > 0$, définit une valuation V_L sur $\mathbf{C}\{u, y\}$.*

Si $f = \sum f_{A,B}\, u^A y^B$, $A \in \mathbf{N}^d$, $B \in \mathbf{N}^d$, on pose

$$V_L(f) = \inf\{ L(A) + |B| ; f_{A,B} \neq 0 \}.$$

On vérifie que

$$V_L(fg) = V_L(f) + V_L(g)$$

et

$$V_L(f+g) \geqslant \inf(V_L(f),\ V_L(g)).$$

DÉFINITION 2. — *On définit*

$$\mathrm{gr}_L(\mathbf{C}\{u,\ y\}) = \oplus_{b\in\mathbf{R}^+} I(L,\ u,\ y,\ b)/I^+\,(L,\ u,\ y,\ b),$$

où

$$I(L,\ u,\ y,\ b) = \{f\in\mathbf{C}\{u,\ y\};\ V_L(f) \geqslant b\}$$

et

$$I^+(L,\ u,\ y,\ b) = \{f\in\mathbf{C}\{u,\ y\};\ V_L(f) > b\}.$$

La composante homogène $I(L, u, y, b)/I^+(L, u, y, b)$ n'est différente de O que pour un ensemble discret de réels b. Si $f\in\mathbf{R}$ avec $V_L(f) = b$, on appelle forme initiale de f, et on note $\mathrm{in}(f, L, u, y)$, la classe de f dans $I(L, u, y, b)/I^+(L, u, y, b)$.

PROPOSITION [3]. — *On a un isomorphisme de* $\mathbf{C}$*-algèbres graduées :* $\theta : \mathbf{C}[U, Y] \to \mathrm{gr}_L(\mathbf{C}\{u, y\})$, *où* $\mathbf{C}[U, Y] = \oplus_{b\in\mathbf{R}} A_b$, *où* A_b *a pour base les monomes* $U^A\ Y^B$ *avec* $L(A)+|B| = b$, *et où* $\theta(U_i) = \mathrm{in}(f, L, u, y)(u_i)$ *avec* $\theta(Y_i) = \mathrm{in}(f, L, u, y)(y_i)$.

DÉFINITION 3. — *Soit* J *un idéal de* $\mathbf{C}\{u, y\}$, *on pose*

$$\mathrm{in}(J,\ L,\ u,\ y) = \{\mathrm{in}(f,\ L,\ u,\ y); f\in J\},$$

c'est un idéal homogène de $\mathrm{gr}_L\,\mathbf{C}\{u, y\} = \mathbf{C}[U, Y]$.

DÉFINITION 4. — *On pose* $R' = R/(u)R$ *et* $J' = JR'$. *On désigne par* $\mathrm{in}(J')$ *le gradué de* J' *pour la filtration induite par la filtration* (y)*-adique de* R', *c'est un idéal de* $\mathbf{C}[Y]$. *On dit que* L *a la propriété* $(\star)$ *pour* (J, u, y) *si*

$$(\star)\qquad \mathrm{in}(J,\ L,\ u,\ y) = \mathrm{in}(J')\,\mathbf{C}[U,\ Y] \quad (cf.\ [3],\ 1.11.1).$$

DÉFINITION 5. — *On note* $\Delta(J; u; y)$ *le convexe de* $\mathbf{R}^d_+$ *formé des* $A\in\mathbf{R}^d_+$ *tels que, pour toute forme linéaire à coefficients strictement positifs* L *satisfaisant à* $(\star)$ *pour* (J, u, y), *on ait* $L(A) \geqslant 1$.

DÉFINITION 6 [3]. — *Étant donnée une partie* $u = (u_1, u_2, \ldots, u_d)$ *d'un système de coordonnées locales de* R, *on note* $\Delta(J; u)$ *l'intersection des* $\Delta(J; u; y')$, *où* (u, y') *est un système de coordonnées locales complétant* u. $\Delta(J; u)$ *est appelé* le premier polyèdre caractéristique *de* J *respectivement à* u.

DÉFINITION 7. — *On met sur* $\mathbf{R}^r$ *l'ordre suivant :* $B \leqslant B'$ *si* $|B| < |B'|$ *ou* $|B| = |B'|$ *et* $B \leqslant B'$ *pour l'ordre lexicographique.*

On appelle exposant d'une série $g = \sum g_B Y^B$ *de* $\mathbf{C}\{y\}$ *le plus petit multi-indice* B *pour l'ordre défini ci-dessus tel que* $g_B \neq 0$.

On appelle exposant d'un idéal H *de* $\mathbf{C}[Y_1, Y_2, \ldots, Y_r]$ *ou de* $\mathbf{C}\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ *l'ensemble des exposants de ses éléments non nuls. On le note* $\exp(H)$.

THÉORÈME. — *Soit* $F : Z \to S$ *un morphisme lisse d'espaces analytiques complexes lisses. Soit* X *un sous-espace fermé de* Z, *soit* x *un point de* X. *Supposons que* X *est plat sur* S *au point* x.

Soit $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_d)$ *un système de coordonnées locales de* S *centrées en* $s = F(x)$, *et soient* $(u_1, \ldots, u_d, y_1, \ldots, y_r)$ *et* $(u_1, u_2, \ldots, u_d, y'_1, \ldots, y'_r)$ *des systèmes de coordonnées locales de* Z *centrées en* x *tels que* $u_i = u'_i \circ F$.

Supposons que la strate de Samuel relative $S_x(X/S)$ ([2], 2.1) *soit contenue dans le sous-espace* W *d'équations* $y'_1 = \ldots = y'_r = 0$. *Alors si* J *est l'idéal de* $R = O_{Z,x}$ *définissant* X, *on a*

$$\Delta(J; u; y') \subset \Delta(J; u; y).$$

Remarque. — Si, de plus, le faîte $F_x(X_s)$ du cône tangent à la fibre X_s est nul, les $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_r)$ étant fixés, il existe toujours des coordonnées locales $(u_1, u_2, \ldots, u_r, y'_1, \ldots, y'_d)$ de $O_{Z,x}$ telles que $W \supset S_x(X/S)$, où W a pour idéal (y'). En effet, il suffit de montrer que l'espace tangent de Zariski en x à la fibre $S_x(X/S)_s$ est nul. Or, par définition, on a $S_x(X/S)_s = S_x(X_s)$ et, d'après [2] (2.5), $T_x(S_x(X_s)) = F_x(X_s) = 0$.

LEMME 1. — *Sous les hypothèses du théorème, soit* L *une forme linéaire ayant la propriété* $(\star)$ *pour* (J, u, y). *Alors il existe des éléments* $(f_1, \ldots, f_m)$ *de* J *tels que, si on pose* $\Phi_i = \operatorname{in}(f_i, L, u, y)$, *on a :*

(i) $\Phi_i \in \mathbf{C}[Y]$;

(ii) $\operatorname{in}(J') = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)\,\mathbf{C}[Y]$, $\deg \Phi_i \leqslant \deg \Phi_{i+1}$;

(iii) $\mathrm{in}(J, L, u, y) = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)\, \mathbf{C}[U, Y]$;

(iv) $f_i = \sum f_{i,B}(u)\, y^B$ *avec* $f_{i,B}(u) = 0$

si $B \in \exp[\Phi_1, \ldots, \Phi_{i-1})\, \mathbf{C}[Y])$.

Preuve. — C'est un théorème bien connu [1].

On dit alors que $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ est une base standard normalisée de J relativement à (u, y, L). Remarquons que les f_i engendrent J, en effet, on a (iii) et la filtration définie par L est séparée.

LEMME 2 (*Idéal de la strate de Samuel $S_x(X/S)$ au point x*). — *Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ une base standard normalisée de J relativement à (u, y, L), alors l'idéal $I(S_x(X/S))$ de la strate de Samuel relative au point x est*

$$I(S_x(X/S)) = (D_B^{(y)} f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ |B| < \nu_i) \qquad \text{où} \quad \nu_i = \deg \Phi_i,$$

où $D_B^{(y)} = (1/B\,!)\,(\partial^{|B|}/\partial y^B)$.

Preuve. — Vérifions que l'on peut appliquer la proposition 2.2 de [2]. Tout d'abord X est plat sur S par hypothèse, ensuite la forme initiale $\mathrm{in}_x(f_i \mid Z_s)$ de la restriction de f_i à la fibre $Z_s = F^{-1}(s)$, $s = F(x)$, est Φ_i puisque $\Phi_i(U, Y) = \mathrm{in}(f, L, u, y)$ ne dépend que de Y par (i). Enfin, d'après (ii), les Φ_i engendrent $\mathrm{in}(J')$ qui est l'idéal initial de la fibre X_s dans la fibre Z_s. Il reste à montrer que les f_i sont normalisés au sens de [3] (2, 1, 2), c'est-à-dire que si $B \in \exp(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, si $|B| < \nu_i$, alors on a $D_B^{(y)} f_i = 0$. Or, si $f_i = \sum f_{i,A}(u)\, y^A$, on a

$$D_B^{(y)} f_i = \textstyle\sum_A \binom{B+A}{B} f_{i,A+B}(u)\, y^A,$$

or si $|B| < \nu_i$ et $B \in \exp(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, alors $B \in \exp(\Phi_1, \ldots, \Phi_{i-1})$ puisque $\deg \Phi_{j-1} \leqslant \deg \Phi_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$, donc

$$A+B \in \exp(\Phi_1, \ldots, \Phi_{i-1})$$

pour tout A, donc $f_{i,A+B}(u) = 0$, donc $D_B^{(y)} f_i = 0$.

LEMME 3. — *Sous les hypothèses du théorème, on a :*

(1) $y_i' = M_i(y) + q_i(u, y)$; $1 \leqslant i \leqslant r$,

où les M_i sont des formes linéaires linéairement indépendantes, et si on pose $q_i(u, y) = \sum_A q_{i,A}(u)\, y^A$, alors :

(2) $q_{i,A}(0) = 0$ *pour* $|A| \leqslant 1$;

(3) $V_L(q_i(u, y)) > 1$.

Preuve. — Les relations (1) et (2) définissent M_i et q_i, et les M_i sont linéairement indépendantes parce que l'on a un changement de variables. Il reste à prouver (3).

Par hypothèse $y'_i \in I(S_x(X/S))$ donc, d'après le lemme 2, on a $y'_i \in (D_B^{(y)} f_j, |B| < \nu_j)$, donc

$$M_i(y)+q_i(u, y) = y'_i = \sum' a_{j,B}(u, y)\left(\sum_{A,C}\binom{C}{B} f_{j,A,C}\, u^A y^{C-B}\right),$$

donc

$$q_i(u, 0) = \sum' a_{j,B}(u, 0)(\sum_A f_{j,A,B}\, u^A),$$

où $\sum'$ désigne la sommation sur l'ensemble d'indices

$$\{1 \leqslant j \leqslant m, |B| < \nu_j\} \qquad \text{où} \quad f_j = \sum_{A,B} f_{j,A,B}\, u^A y^B \qquad \text{avec} \quad f_{j,A,B} \in \mathbf{C}.$$

Puisque $\mathrm{in}_L f_j \in (Y)^{\nu_j}\, \mathbf{C}[Y]$, si $B < \nu_j$ et $f_{j,A,B} \neq 0$, on a $L(A)+|B| > \nu_j$, donc $L(A) > \nu_j - |B| \geqslant 1$, donc $L(A) > 1$, donc

$$V_L(q_i(u, 0)) \geqslant \inf V_L(a_{j,B}(u, 0)\, u^A) \geqslant L(A) > 1,$$

donc $V_L(q_i(u, 0)) > 1$, donc $V_L(q_i(u, y)) > 1$ en vertu de (2).

LEMME 4. — *Avec les notations du lemme 3, soit L une forme linéaire ayant la propriété ($\star$) pour (J, u, y), et soit $h \in R$, on pose $h = g(u, y) = k(u, y')$, et on a*

$$\mathrm{in}(g, L, u, y)[U, Y] = \mathrm{in}(k, L, u, y')[U, M(Y)].$$

Preuve. — On désigne par V_L la valuation définie par (L, u, y), et par V'_L celle définie par (L, u, y'), soit $\nu = V_L(g, u, y)$. D'après la formule de Taylor, on a

$$(4) \quad h = g(u, y) = k(u, M+q) = k(u, M) + \sum_{|B|>1} D_B^{(y')} k(u, M)\, q^B;$$

on a évidemment

$$V'_L(k(u, y')) = V_L(k(u, M));$$

de plus,

$$V_L(D_B^{(y')} k(u, M)) = V'_L(D_B^{(y')} k(u, y')) \geqslant V'_L(k) - |B|.$$

On a aussi $V_L(q^B) > |B|$, d'après le lemme 3, donc

$$\nu = V'_L(k(u, y')) \qquad \text{et} \qquad h = k(u, M) \bmod I^+(L, u, y, \nu),$$

d'où

$$h = \mathrm{in}(k,\ L,\ u,\ y')[U,\ M(Y)] \bmod I^{+}\ (L,\ u,\ y,\ \nu),$$

d'où la conclusion.

LEMME 5. — *Avec les hypothèses du lemme* 3,

$$\Delta(J;\ u;\ y) \supset \Delta(J;\ u;\ y').$$

Preuve. — D'après le lemme 4, si L vérifie ($\star$) pour (J, u, y), pour tout $g \in J$, on a

$$\mathrm{in}(g,\ L,\ u,\ y)(U,\ Y) = \mathrm{in}(g,\ L,\ u,\ y')(U,\ M(Y)).$$

Donc l'isomorphisme

$$\theta : \ \mathbf{C}[U,\ Y'] \to \mathbf{C}[U,\ Y], \qquad \theta(U_i) = U_i, \qquad \theta(Y_i') = M_i(Y)$$

induit un isomorphisme

$$\mathrm{in}(J,\ L,\ u,\ y') \tilde{\to} \mathrm{in}(J,\ L,\ u,\ y),$$

et bien sûr, l'isomorphisme $\mathbf{C}[Y'] \tilde{\to} \mathbf{C}[Y]$, $Y_i' \to M_i(Y)$ induit un isomorphisme $\mathrm{in}_{(y')}(J') \to \mathrm{in}_{(y)}(J')$, et donc la condition ($\star$) pour (J, u, y, L) qui s'écrit $\mathrm{in}(J, L, u, y) = \mathrm{in}_{(y)}(J')\,\mathbf{C}[U,\ Y]$, équivaut à la condition ($\star$) pour (J, L, u, y') qui s'écrit :

$$\mathrm{in}(J,\ L,\ u,\ y') = \mathrm{in}_{(y')}(J')\,\mathbf{C}[U,\ Y'].$$

Donc $\Delta(J, u, y) \supset \Delta(J, u, y')$ par définition de Δ.

Le lemme 5 met fin à la démonstration du théorème.

COROLLAIRE. — *Soit x un point d'un sous-espace analytique fermé X d'un espace analytique complexe lisse Z. Soit $F : Z \to \mathbf{C}^d$ un morphisme lisse tel que X est plat sur $\mathbf{C}^d$ en x. Soit J l'idéal de $O_{Z,x}$ définissant X dans Z. Pour tout système de coordonnées (u, y) de Z, centré en x, tel que $F(u, y) = F(u, 0)$, et tel que $y_1, y_2, \ldots, y_r$ sont nuls sur la strate de Samuel relative $S_x(X/S)$, on a*

$$\Delta(J;\ u;\ y) = \Delta(J;\ u).$$

Preuve. — Ceci résulte immédiatement du théorème et de la définition 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRIANÇON (J.). — Weierstrass préparé à la Hironaka, « Singularités à Cargèse », *Astérisque*, vol. 7-8, 1973, p. 67-73.

[2] GIRAUD (J.). — Sur la théorie du contact maximal, *Math. Z.*, t. 137, 1974, p. 285-310.

[3] HIRONAKA (H.). — Characteristic polyhedra of singularities, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. 7, 1967, p. 251-293.

[4] HIRONAKA (H.). — *Bimeromorphic smoothing of a complex analytic space*, University of Warwick, 1971 (multigr.).

[5] HIRONAKA (H.). — Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I and II, *Annals of Math.*, t. 79, 1964, p. 109-326.

[6] LEJEUNE (M.) et TEISSIER (B.). — *Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton.* — Paris, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, 1972.

(Texte reçu le 25 avril 1974.)

Vincent COSSART,
2, square Chardin,
78150 Le Chesnay.