BULLETIN DE LA S. M. F.

GILLES TISSIER

Quasi-analyticité et approximation sur la frontière d'un ouvert quelconque, dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 165-174

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__165_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 165-174.

QUASI-ANALYTICITÉ ET APPROXIMATION SUR LA FRONTIÈRE D'UN OUVERT QUELCONQUE, DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE DES FONCTIONS HARMONIQUES

PAR

GILLES TISSIER

[Nancy] .

RÉSUMÉ. — On se place dans le cadre axiomatique de M. BRELOT avec, en plus, des conditions de proportionnalité des potentiels à support ponctuel et de quasi-analyticité.

Soit w un ouvert de l'espace de base Ω et v un ouvert contenu dans $\Omega - \overline{w}$ et coupant chaque composante connexe de $\Omega - w$. On note

$$P_v = \{ p_y ;\ y \in v \};$$

$$E = \left\{ f \in \mathbf{C}(\partial w);\ (\exists\, p \in \mathbf{P}(\Omega))(\forall\, \delta \in]0,\ 1[)\left(\frac{|f|}{p^\delta} \to 0 \text{ a l'infini}\right)\right\}$$

muni d'une topologie de limite inductive.

Le résultat essentiel est le suivant : Si les potentiels à support compact tendent vers zéro à l'infini, alors la densité de Pv dans E équivaut au non-effilement de $\complement\,(\overline{w})$ sur ∂w.

SUMMARY. — The basic space Ω is equipped with a sheaf of harmonic functions which verify the axiomatic of M. BRELOT, with classical conditions of proportionality and of quasi-analyticity. Given an open set w in Ω, and v an open set contained in $\Omega - \overline{w}$ and intersecting every connected component of $\Omega - \overline{w}$, we put

$$P_v = \{ p_y ;\ y \in v \};$$

$$E = \left\{ f \in \mathbf{C}(\partial w);\ (\exists\, p \in \mathbf{P}(\Omega))(\forall\, \delta \in]0,\ 1[)\left(\frac{|f|}{p^\delta} \to 0 \text{ at the Alexandrof point}\right)\right\};$$

E is equipped with an inductive limit topology.

The main result is the following: if, for an $y \in \Omega$, $p_y \to 0$ at the alexandrof point, then the space P_v is dense in E if, and only if, $\complement\,(\overline{w})$ is not thin on ∂w.

Introduction

Dans la première partie, on étend à des ouverts à frontière non compacte, certains résultats de densité dans l'espace H_P établis par A. DE LA PRADELLE et J. DENY pour des ouverts à frontière compacte ([10] et [8]) et par M. BRELOT [2].

Dans la deuxième partie, on construit un espace topologique adapté $E_{\mathscr{C}}^{*}$ qui, dans certain cas particulier, est un sous-espace de H_P, mais dont la topologie est strictement plus fine que celle induite par H_P. On obtient alors des théorèmes d'approximation strictement plus fins que les précédents et aussi un théorème de type Runge.

Notations et hypothèses de base

L'espace de base Ω est supposé localement compact, non compact, connexe, localement connexe. α désigne le point à l'infini.

ω est un ouvert de Ω, et on note $\partial\omega$ (resp. $\bar{\omega} = \omega+\partial\omega$) la frontière (resp. l'adhérence) de ω dans Ω; $\partial\omega$ est supposée non compacte.

$C(X)$ est l'espace des fonctions continues sur X.

$C_0(X) = \{f \in C(X); f(x) \to 0 \text{ quand } x \to \alpha,\ x \in X\}$.

$C_K(X)$ est le sous-espace des fonctions de $C_0(X)$ qui ont leur support dans le compact K.

$K(X)$ est l'espace des fonctions de $C_0(X)$ à support compact, muni de la topologie limite inductive de celles des $C_K(X)$.

On se donne sur Ω un faisceau de fonctions harmoniques vérifiant l'axiomatique de M. BRELOT ([3], [4], [5]); on suppose que Ω est à base dénombrable d'ouverts (ce qui, avec les hypothèses précédentes, et d'après MOKODOBZKY ([5], p. 22), implique l'axiome (3′) de M. BRELOT) formée de domaines complètement déterminants, qu'il existe un potentiel strictement positif sur Ω (1) et que, pour tout $y \in \Omega$, les potentiels dans Ω de support $\{y\}$ sont proportionnels. Ces hypothèses ont permis à Mme HERVÉ [9] de définir les fonctions harmoniques adjointes à celles du faisceau donné. p_y est un potentiel normalisé de support $\{y\}$ ([10], p. 388).

Un astérisque caractérisera l'extension aux fonctions harmoniques adjointes d'une notation définie auparavant pour les fonctions harmoniques. On supposera enfin que, pour tout $x \in \Omega$, les potentiels*, $p_x^* : y \to p_y(x)$, sont proportionnels, et que les fonctions harmoniques* sont de type analytique ([10], [1]).

---

(1) Ω est alors dénombrable à l'infini (*cf.* CORNEA [7]).

On note **P** le cône adapté des potentiels continus sur Ω, et $\mathbf{P}_c$ le sous-espace des potentiels de **P** qui ont un support compact. Pour tout $p \in \mathbf{P}$, on définit :

$H_{\mathbf{P}}(X) = \{f \in C(X);\ |f| \leqslant \lambda p$ sur X pour un $\lambda \geqslant 0\}$, muni de la norme $\|f\|_{p,X} = \sup_{x \in X} |(f/p)(x)|$,

$H_{\mathbf{P}}(X) = \bigcup_{p \in \mathbf{P}} H_p(X)$, muni de la topologie limite inductive de celles des H_p, $p \in \mathbf{P}$.

Pour $p \in \mathbf{P}$, on note $o(p)_X = \{f \in C(X);\ |f|/p \to 0$ quand $x \to \alpha$, muni de la norme $\|f\|_{p,X} = \sup_{x \in X} |(f/p)(x)|\}$. Soit v une partie de Ω; on notera $P_v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_{y_i};\ n < +\infty$ et $y_i \in v\}$.

1. Approximation dans l'espace $H_{\mathbf{P}}$

1.1. On dira que le couple (v, ω) est admissible si v est un ouvert contenu dans $\Omega - \omega$ et coupant chaque composante connexe de $\Omega - \varpi$.

THÉORÈME 1.1.1. — *Soit* (v, ω) *un couple admissible. Alors* $P_v |_{\partial\omega}$ *est partout dense dans* $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ *si, et seulement si,* $\complement(\varpi)$ *n'est effilé en aucun point de* $\partial\omega$.

Démonstration. — On commence par étendre le théorème 10.1 de Mme HERVÉ [9] aux mesures de Radon continues positives sur l'espace adapté $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$. On procède ensuite comme dans [10].

Considérons maintenant l'espace $\mathbf{P}_c$ des potentiels sur Ω continus et à support compact. Il est immédiat, d'après le principe du minimum, que

$$(\forall p_1, p_2 \in \mathbf{P}_c), \quad (\exists \lambda_1, \lambda_2 > 0 \text{ et } K \text{ compact} \subset \Omega),$$
$$\lambda_1 p_1 \leqslant p_2 \leqslant \lambda_2 p_1 \text{ sur } \Omega - K.$$

Dans ces conditions, il existe un potentiel $p \in \mathbf{P}$ qui domine à l'infini chaque élément de $\mathbf{P}_c$, c'est-à-dire tel que $(\forall p \in \mathbf{P}_c)\ (p/\tilde{p})(x) \to 0$ quand $x \to \alpha$, $x \in \Omega$.

On a alors $P_v |_{\partial\omega} \subset o(\tilde{p})_{\partial\omega}$ qui est un espace adapté au sens de CHOQUET [12], et on démontre, comme ci-dessus, que le théorème 1.1.1 est encore valable si on y remplace $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ par $o(\tilde{p})_{\partial\omega}$ avec $p \in \mathbf{P}_c$.

2. Étude d'un espace topologique particulier

Nous nous proposons maintenant d'étudier un espace topologique adapté qui, dans certain cas particulier, est un sous-espace de $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$, mais dont la topologie est strictement plus fine que celle induite par $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$.

2.1. *L'espace* $E_{\tilde{\mathscr{C}}}(\partial\omega)$. — Soit $\tilde{\mathscr{C}}(\partial\omega)$ une partie filtrante croissante de fonctions continues > 0 définies sur $\partial\omega$.

Pour toute fonction $p \in \tilde{\mathscr{C}}(\partial\omega)$, on définit $E_p(\partial\omega) = \bigcap_{\delta \in]0,1[} o(p^\delta)_{\partial\omega}$. On munit $E_p(\partial\omega)$ de la famille de normes

$$f \to \pi_\delta(f) = \sup_{x \in \partial\omega} \left| \frac{f}{p^\delta}(x) \right| .$$

On note $E_{\tilde{\mathscr{C}}}(\partial\omega) = {}_p\mathrm{U}_{\in \tilde{\mathscr{C}}(\partial\omega)} E_p$ muni de la topologie limite inductive de celles des E_p quand p décrit $\tilde{\mathscr{C}}(\partial\omega)$.

PROPOSITION 2.1.1. — *La famille* $E_{\tilde{\mathscr{C}}}$ *des* E_p, *lorsque* p *décrit* $\tilde{\mathscr{C}}(\partial\omega)$ *est une famille filtrante, croissante d'espaces de Riesz, chacun de ceux-ci étant muni d'une topologie d'espace de Fréchet.*

Démonstration :

1° Soit f et g dans $E_{\tilde{\mathscr{C}}}$; puisque $\tilde{\mathscr{C}}$ est filtrante croissante, on peut supposer que f et g sont dans le même E_p; il est alors immédiat que sup (f, g) et inf (f, g) sont dans E_p.

2° La topologie de chaque E_p est métrisable, car la famille des normes π_δ, lorsque δ décrit $\mathbf{Q} \cap]0, 1[$, définit la même topologie.

3° E_p est complet : Soit f_n une suite de Cauchy d'éléments de E_p. Pour tout $\delta \in]0, 1[$, f_n s'écrit $f_n = p^\delta h_{n,\delta}$ avec $h_{n,\delta} \in C_0(\partial\omega)$. On vérifie alors que $h_{n,\delta}$ est une suite de Cauchy dans $C_0(\partial\omega)$.

PROPOSITION 2.1.2 :

(a) *L'espace des fonctions continues à support compact sur* $\partial\omega$ *est partout dense dans* E_p, *et par conséquent dans* $E_{\tilde{\mathscr{C}}}$, *et l'injection canonique* $K(\partial\omega) \to E_p$ *est un morphisme d'espaces topologiques qui est non strict lorsque* $\partial\omega$ *n'est pas compacte.*

(b) $E_{\tilde{\mathscr{C}}}$ *est un espace vectoriel adapté.*

Démonstration :

(a.1) Soit $\mathscr{V}_0$ un voisinage de 0 dans E_p. Il existe alors $\delta \in]0, 1[$ et $\varepsilon > 0$ tels que la boule $B_\delta(0; \varepsilon) = \{f \in E_p;\ \pi_\delta(f) < \varepsilon\}$ soit incluse dans $\mathscr{V}_0$.

Soit $f \in E_p$; on a alors $f = p^\delta h_\delta$ avec $h_\delta \in C_0(\partial\omega)$. $K(\partial\omega)$ étant dense dans $C_0(\partial\omega)$, on peut trouver $g_{\varepsilon,\delta} \in K(\partial\omega)$ telle que $\| h_\delta - (g_{\varepsilon,\delta}/p^\delta) \| < \varepsilon$. On a alors $f - g_{\varepsilon,\delta} \in B_\delta(0; \varepsilon) \subset \mathscr{V}_0$.

(a.2) $K(\partial\omega) \to E_p$ est continue.

(a.3) L'injection canonique $E_p \cap K(\partial\omega) \to K(\partial\omega)$ n'est pas continue lorsque $\partial\omega$ n'est pas compacte, comme le montre le contre-exemple suivant.

Soit x_n une suite de points de $\partial\omega$ telle que $x_n \to \alpha$. A l'aide du théorème d'Urisohn, on peut associer à chaque x_n un voisinage compact K_n ne contenant aucun autre point de la suite, et une fonction $f_n \in C^+_{K_n}(\partial\omega)$ tels que

$$f_n(x) \leqslant \inf\left(p(x_n), \frac{1}{n}\right),$$

$$\forall x \in K_n, \qquad f_n(x_n) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad p \geqslant \frac{1}{2} p(x_n) \quad \text{sur } K_n.$$

Il vient alors :

1° f_n tend vers zéro dans $E_p \cap K(\partial\omega)$: On a en effet :

$$\pi_\delta(f_n) = \sup_{x \in \partial\omega} \left| \frac{f_n(x)}{p^\delta(x)} \right| \leqslant 2^\delta n^{\delta - 1} \to 0,$$
$$\forall \delta \in]0, 1[, \quad \text{quand } n \to \infty.$$

2° f_n ne tend pas vers zéro dans $K(\partial\omega)$: Il suffit de trouver une mesure de Radon μ telle que $\mu(f_n)$ ne tende pas vers zéro.

La mesure $\mu = \sum_n \delta_{x_n}/f_n(x_n)$ répond à la question, car $\mu(f_n) = 1$, $\forall n$.

(b) Ce point est une conséquence immédiate du résultat suivant.

LEMME 2.1.1. — *Pour toute fonction continue positive $p : \partial\omega \to R$, l'espace $E_p(\partial\omega)$ est un espace vectoriel adapté.*

Démonstration. — Il suffit d'exhiber, pour toute fonction $f \in E_p$, une fonction continue u ayant les propriétés suivantes :

(a) $|u/f|(x) \to +\infty$, quand $x \to \alpha$, $x \in \partial\omega$.

(b) $|u/p^\delta|(x) \to 0$, $\forall \delta \in]0, 1[$, quand $x \to \alpha$, $x \in \partial\omega$.

La fonction $u = f.\sup(|\log|f||, |\log(p)|)$ répond à la question.

Soit en effet $f \in E_p(\partial\omega)$ et (x_n) une suite de points de $\partial\omega$ telle que $x_n \to \alpha$. On va montrer qu'on peut en extraire une sous-suite x_{n_k} telle que

$$x_{n_k} \to \alpha, \qquad \left| \frac{u}{f}(x_{n_k}) \right| \to +\infty$$

et

$$\left| \frac{u}{p^\delta}(x_{n_k}) \right| \to 0, \qquad (\delta \in]0, 1[) \quad \text{quand } k \to \infty,$$

ce qui prouvera notre assertion. On peut se limiter à $f \geqslant 0$.

1° *Supposons que* $(f/p)(x_n)$ *tend vers zéro :* deux cas sont alors à envisager.

(α) *La suite* $p(x_n)$ *n'est pas bornée :* on peut alors extraire de (x_n) une sous-suite (x_{n_k}) telle que $p(x_{n_k}) \to +\infty$ quand $k \to \infty$. Comme

$$\frac{u}{f} \geqslant |\log p|,$$

on obtient $(u/f)(x_{n_k}) \to +\infty$.

Par ailleurs, pour tout $\beta \in]0, \delta[$, il existe $h_\beta \in C_0^+(\partial\omega)$ telle que

$$\frac{u}{p^\delta}(x_{n_k}) = h_\beta\, p^{\beta-\delta} \sup(|\log f|, |\log p|)(x_{n_k}) \to 0.$$

(β) *La suite* $p(x_n)$ *est bornée :* il vient alors $f(x_n) \to 0$ et $(u/f)(x_n) \to +\infty$.

On a d'autre part $(u/p^\delta)(x_n) \to 0$, car

$$\frac{f|\log f|}{p^\delta}(x_n) = \left(\frac{f}{p^{\delta/(1-\lambda)}}\right)^{1-\lambda} f^\lambda |\log f|(x_n) \to 0 \qquad \text{si} \quad 0 < \lambda < 1-\delta$$

$$\frac{f|\log p|}{p^\delta}(x_n) = h_\beta\, p^{\beta-\delta} |\log p|(x_n) \to 0 \qquad \text{si} \quad \beta > \delta, \quad \text{car } h_\beta \in C_0(\partial\omega).$$

2° *Supposons maintenant que* $(f/p)(x_n)$ *ne tend pas vers zéro :* il existe alors $\gamma > 0$, et une sous-suite (x_{n_k}) tels que $(f/p)(x_{n_k}) \geqslant \gamma$ pour tout k. On en déduit alors que $p(x_{n_k}) \to 0$, puis que $f(x_{n_k}) \to 0$ et donc aussi que $(u/f)(x_{n_k}) \to \infty$. Enfin, en procédant comme dans le (β) précédent, on vérifie que $(u/p^\delta)(x_{n_k}) \to 0$.

2.2. *Densité de l'espace* P_v *dans* $E_{\mathscr{C}}$ *et dans* $C_0(\partial\omega)$. — Nous supposons dorénavant que la constante 1 est surharmonique.

Il résulte de cette dernière hypothèse que, pour tout $\delta \in]0, 1[$ et pour tout $p \in \mathbf{P}$, la fonction p^δ est un potentiel appartenant à $\mathbf{P}$.

On supposera également, dans la suite, que $P_v|_{\partial\omega} \subset \tilde{\mathscr{C}}(\partial\omega)$, que $\tilde{\mathscr{C}}$ $(\partial\omega$ est constituée par les traces sur $\partial\omega$ d'une famille $\mathscr{F}$ d'éléments de $\mathbf{P}$, et que, pour tout $p \in \mathbf{P}_c$, $p(x) \to 0$, quand $x \to \alpha$, $x \in \partial\omega$.

Il suffit, pour que ce dernier point soit vérifié, que l'on des éléments de $\mathbf{P}_c$ ait cette propriété (*cf.* la fin du n° 1.1).

PROPOSITION 2.2.1. — *Si* $\mathscr{F} \subset \mathbf{P}_c$, *l'espace* $E_{\mathscr{C}}(\partial\omega)$ *est isomorphe à* $E_p(\partial\omega)$, *où* p *est un élément quelconque de* $\mathbf{P}_c$.

Cela résulte du fait que les potentiels à support compact ont même comportement à l'infini (*cf.* la fin du n° 1.1), et qu'alors les espaces E_p ont des topologies équivalentes pour $p \in \tilde{\mathscr{C}}$.

THÉORÈME 2.2.1. — *Si $\mathscr{F} \subset \mathbf{P}_c$, l'espace $E_{\tilde{\mathscr{C}}}(\partial\omega)$ s'injecte continûment dans $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$, et sa topologie est strictement plus fine que celle induite par $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$* (resp. $C_0(\partial\omega)$).

Démonstration :

1° $E_{\tilde{\mathscr{C}}} \subset H_p$, car $(\forall\, \delta \in)0, 1()$ $(\forall p \in \mathbf{P})$ $p^\delta \in \mathbf{P}$.

2° L'injection canonique $E_{\tilde{\mathscr{C}}} \to H_{\mathbf{P}}$ est continue. Cela résulte de la continuité des injections de la chaîne

$$E_{\tilde{\mathscr{C}}} \leftrightarrows E_p \to o(p^\delta) \to H_{p^\delta} \to H_{\mathbf{P}}.$$

3° La topologie de $E_{\tilde{\mathscr{C}}}(\partial\omega)$ est strictement plus fine que celle induite par $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ (resp. $C_0(\partial\omega)$). Il suffit, pour le prouver, d'exhiber une suite $f_n \in E_{\tilde{\mathscr{C}}}$ tendant vers zéro dans $H_{\sqrt{p}}$, $p \in \tilde{\mathscr{C}}$ (donc tendant aussi vers zéro dans $C_0(\partial\omega)$) et ne tendant pas vers zéro dans $E_{\tilde{\mathscr{C}}}$.

La suite $f_n = n^\alpha p.[\log np]^-$, $p \in \tilde{\mathscr{C}}$, $0 < \alpha < 1/2$, répond à la question. Il vient en effet :

(α) $f_n \in E_{\tilde{\mathscr{C}}} \cap H_{\mathbf{P}}$: Cela résulte du fait que

$$\frac{f_n}{p^\delta}(x) = n^\alpha p^{1-\delta}[\log np]^-(x) \to 0 \quad \text{quand } x \to \alpha,$$

$$x \in \Omega, \qquad \forall\, \alpha, \qquad \forall\, n, \qquad \forall\, \delta \in)0, 1(.$$

(β) $f_n \to 0$ dans $H_{\mathbf{P}}$ et dans $C_0(\partial\omega)$ si $\alpha < 1/2$: On a

$$\left|\frac{f_n}{\sqrt{p}}\right| = |n^\alpha \sqrt{p}[\log np]^-| = |n^{\alpha-(1/2)} \quad np[\log np]^-| \leqslant n^{\alpha-(1/2)}\gamma_0,$$

où γ_0 est la constante

$$\gamma_0 = \max_{x \in \mathbf{R}^+}(|\sqrt{x}[\log x]^-|) = \max_{x \in]0,\, 1[}(\sqrt{x}\,|\log x|).$$

On en déduit que $f_n \to 0$ dans $H_{\sqrt{p}}$, donc dans $H_{\mathbf{P}}$, et aussi dans $C_0(\partial\omega)$ puisque p est borné, pour tout $\alpha < 1/2$.

(γ) f_n ne tend pas vers zéro dans $E_{\tilde{\mathscr{C}}}$ si $\alpha < 1/2$: Cela résulte de l'inégalité

$$\max_{x \in \partial\omega}\left|\frac{f_n}{p^\delta}\right| = \left\|\frac{f_n}{p^\delta}\right\| = \|n^{\alpha-(1/2)} p^{(1/2)-\delta}\sqrt{np}[\log np]^-\|$$
$$\geqslant n^{\alpha-(1/2)}\gamma_0\left(\frac{u_0}{n}\right)^{(1/2)-\delta} = n^{\alpha+\delta-1}\gamma_0',$$

où $u_0 \in]0, 1[$ est donné par $\gamma_0 = \sqrt{u_0} . | \log u_0 |$, et où

$$\gamma'_0 = \gamma_0 . \min_{\delta \in]0,1[} (n_0^{(1/2)-\delta}) \geqslant \gamma_0 \sqrt{u_0},$$

d'où l'on déduit que $\| f_n/p^\delta \| \to \infty$ si $\alpha+\delta-1 > 0$, condition qui est en particulier réalisée si $0 < \alpha < 1/2$, pour tout δ tel que $1-\alpha < \delta < 1$ $\|$.

THÉORÈME 2.2.2.

(a) *Le théorème* 1.1.1 *est encore vrai si on y remplace* $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$ *par* $E_{\mathscr{C}}(\partial\omega)$ (*resp.* $C_0(\partial\omega)$).

(b) *Soit* $\complement(\bar{\omega}) = \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i *connexe*, $i \in I \subset N$; *soit* $(a_i)_{i \in I}$ *une suite de points* $a_i \in U_i$; *on pose* $W = \bigcup_{i \in I} \{ a_i \}$.

Si $\complement(\bar{\omega})$ *n'est effilé en aucun point de* $\partial\omega$, *l'espace* $\mathscr{H}(\Omega - W) = \{ f$ *harmoniques dans* $\Omega - W \}$ *a une trace sur* $\partial\omega$ *qui est partout dense dans* E_p, $p \in \mathbf{P}_c$, *et dans* $C_0(\partial\omega)$.

On remarquera que l'énoncé ne nécessite pas que $\mathscr{F} \subset \mathbf{P}_c$.

Démonstration :

(*a*) Il résulte de la proposition 2.1.2 (*b*) et du théorème de G. CHOQUET que toute forme linéaire continue $\mu \geqslant 0$ sur $E_{\mathscr{C}}$ est représentable par une mesure de Radon portée par $\partial\omega$. On procède alors comme pour le théorème 1.1.1.

(*b*) Pour tout ouvert $X \subset \Omega$ et $p \in \mathbf{P}$, notons $\mathscr{H}(\bar{X})$ le sous-espace des fonctions de $H_p(\bar{X})$, harmoniques dans X.

Soit v_i un voisinage ouvert de a_i non effilé en ses points-frontière [2], $v_i \subset \Omega - \bar{\omega}$. D'après le théorème 1.1.1, la somme directe des $\tilde{\mathscr{H}}(\Omega - v_i)$, $i \in I$, est dense dans $E_p(\partial\omega)$; il suffit donc de montrer que, pour chaque $i \in I$, $\mathscr{H}(\Omega - \{ a_i \})$ est dense dans $\tilde{\mathscr{H}}(\Omega - v_i)$. Dans la suite de la démonstration, on omettra donc l'indice i.

Soit ω_n un système fondamental de voisinages ouverts de a, non effilés en leurs points-frontière [2], fortement décroissant, avec $\omega_0 = v$, et soit $f \in \tilde{\mathscr{H}}(\Omega - \omega)$. Pour tout $n > 0$, $\tilde{\mathscr{H}}(\Omega - \omega_{n+1})$ est dense dans $\tilde{\mathscr{H}}(\Omega - \omega_n)$ d'après [10] (théorème 6) et le principe du minimum; il existe donc une suite $f_n \in \tilde{\mathscr{H}}(\Omega - \omega_n)$ telle que $f_0 = f$, et vérifiant :

$$| f_{n+1} - f_n | < \varepsilon_n p, \ \varepsilon_n > 0, \quad \text{sur } \Omega - \omega_n.$$

---

(2) De tels ouverts existent d'après G. MOKOBODZKI et D. SIBONY (*cf.* [10], p. 392).

En choisissant la suite ε_n telle que $\sum \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$, on construit ainsi une suite de fonctions f_n qui converge uniformément sur tout compact de $\Omega - \{ a \}$ vers une fonction $g \in \mathscr{H} (\Omega - \{ a \})$ vérifiant :

$$|g - f_0| \leqslant (\Sigma \varepsilon_n) p \leqslant \varepsilon p \quad \text{sur } \Omega - \omega_0.$$

Remarque :

1° *Si* $\complement(\bar{\omega})$ *n'est effilé en aucun point de* $\partial\omega$, *l'espace* $\mathscr{H}(\Omega - W)$, *défini dans le théorème* 2.2.2, *est dense dans le Banach* $o(\tilde{P})_{\partial\omega}$, *défini en fin du* n° 1.1. (*Même démonstration que pour le* (*b*) *précédent.*)

2° *Moyennant des adaptations immédiates des notations, tous les théorèmes de densité, établis dans cet article pour les espaces* $H_{\mathbf{P}}(\partial\omega)$, $E_{\mathscr{C}}^{*}(\partial\omega)$ ..., *s'étendent, grâce au principe du minimum, aux espaces* $\mathscr{H}(\omega) \cap H_{\mathbf{P}}(\bar{\omega})$, $\mathscr{H}(\omega) \cap E_{\mathscr{C}}^{*}(\bar{\omega})$, ...

3° *D'après* [1], *les résultats obtenus dans cet article s'appliquent aux espaces de solutions d'opérateurs différentiels elliptiques du second ordre étudiés par* M^me^ Hervé [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aronszain (N.). — Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 242, 1956, p. 723-725.

[2] Brelot (M.). — Complément à la théorie de J. Deny, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 1, 1949, p. 113-120.

[3] Brelot (M.). — *Séminaire de théorie du potentiel*, 2e année, 1958. — Paris, Secrétariat mathématique, 1959.

[4] Brelot (M.). — *Lectures on potential theory*, 2nd edition. — Bombay, Tata Institute, 1967 (*Tata Institute on Fundamental Research. Lectures on Mathematics*, 19).

[5] Brelot (M.). — *Axiomatique des fonctions harmoniques.* — Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1966 (*Séminaire de Mathématiques supérieures*, Été 1965, 14).

[6] Choquet (G.). — Le problème des moments, *Séminaire d'initiation à l'analyse*, 1re année, 1962, n° 4, 10 p.

[7] Cornea (A.). — Sur la dénombrabilité d'un espace harmonique de Brelot, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, série A, p. 190-191.

[8] Deny (J.). — Systèmes totaux de fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 1, 1949, p. 103-113.

[9] Hervé (R.-M.). — Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 12, 1962, p. 415-471 (*Thèse Sc. math., Paris*, 1961).

[10] de La Pradelle (A.). — Approximation et caractère de quasi-analyticité dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 17, 1967, n° 1, p. 383-399.
[11] de La Pradelle (A.). — A propos du mémoire de G. F. Vincent-Smith sur l'approximation des fonctions harmoniques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 19, 1969, n° 2, p. 355-370.
[12] Mokobodzki (G.) et Sibony (D.). — Cônes et espaces de fonctions continues, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, série A, p. 506-509.
[13] Vincent-Smith (C. F.). — Uniform approximation of harmonic functions, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 19, 1969, n° 2, p. 339-353.

(Texte reçu le 18 décembre 1974.)

Gilles Tissier,
I.U.T. Informatique,
2 *bis*, boulevard Charlemagne,
54000 Nancy.