DANIEL PERRIN

Approximation des schémas en groupes, quasi compacts sur un corps

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 323-335
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__323_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 323-335.

APPROXIMATION DES SCHÉMAS EN GROUPES, QUASI COMPACTS SUR UN CORPS

PAR

DANIEL PERRIN

[Orsay]

RÉSUMÉ. — Soit k un corps, et G un k-schéma en groupes quasi compact; G est limite projective filtrante de k-groupes algébriques G_i qui sont des quotients de G pour la topologie f. p. q. c.

Comme corollaire, on obtient le théorème de passage au quotient suivant : si H est un sous-schéma en groupes fermé de G, le faisceau f. p. q. c. G/H est un schéma dans les deux cas suivants :

1° H est défini par un idéal de type fini;

2° H est distingué.

Table des matières

Introduction

Le résultat essentiel prouvé dans cet article est le suivant : si k est un corps, tout k-schéma en groupes quasi compact G est limite projective filtrante de k-groupes algébriques.

Ce résultat est classique lorsque G est affine ([1], III, 3.7.5) et était conjecturé dans le cas général ([2], EGA, IV, 8.13.6).

Il admet comme corollaires immédiats un certain nombre de résultats connus dans le cas algébrique (*cf.* 4.2).

La technique de démonstration consiste à construire des sous-schémas en groupes H_α, distingués dans G, définis par des faisceaux d'idéaux de type fini et en nombre suffisant pour que $\bigcap_\alpha H_\alpha$ soit réduit à l'élément neutre.

En effet, on a alors $G \simeq \varprojlim G/H_\alpha$ au sens des faisceaux pour la topologie fidèlement plate quasi compacte (f. p. q. c.). Les H_α sont construits comme stabilisateurs de fonctions rationnelles (3.1.1) à l'aide d'un lemme de représentabilité (1.1.1).

Le point essentiel est donc de prouver la représentabilité des faisceaux G/H_α.

On se ramène au cas où G est connexe en utilisant la composante neutre G^0 et le quotient G/G^0 (4.1).

Lorsque G est intègre (connexe et réduit), on utilise une technique de passage au quotient générique en définissant la notion de groupe rationnel (2.1) qui n'est autre que ce qu'André WEIL appelait « loi de composition normale ».

On approxime directement ces groupes rationnels (2.2) puis, à partir des groupes rationnels de type fini, on reconstruit des groupes algébriques grâce au théorème de Weil (2.3).

Il serait évidemment satisfaisant de traiter de la même manière le cas connexe non réduit, mais des difficultés techniques, liées au défaut de platitude, rendent caducs les théorèmes de passage au quotient utilisés (1.2 et 1.3).

On utilise dans ce cas un théorème de GROTHENDIECK qui permet de passer au quotient lorsqu'on sait le faire modulo un idéal nilpotent (*cf.* [1], III, 2.7.1), et on se ramène au cas intègre en construisant le sous-groupe H_α Gred qui est défini par un idéal nilpotent (3.2), et en utilisant l'isomorphisme H_α Gred$/H_\alpha \simeq$ Gred$/H_\alpha \cap$ Gred.

Cet article est un résumé de l'article [4] « Schémas en groupes quasi compacts sur un corps » paru aux *Publications mathématiques de l'Université Paris-Sud.* Il ne contient donc que les résultats principaux et seulement des indications sommaires sur les démonstrations.

0. Notations et énoncés des résultats principaux

Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, k désigne un corps. On note **Sch**$/k$ la catégorie des k-schémas.

De même, si S est un schéma, **Sch**$/S$ est la catégorie des S-schémas. Pour deux schémas S et X, on pose $X(S) = \text{Hom}(S, X)$. Un k-groupe algébrique est un k-schéma en groupes de type fini. On désigne par Gred le groupe réduit associé à G.

Soit G un k-schéma en groupes.

Considérons les propriétés suivantes :

(L) LIMITES PROJECTIVES. — Il existe une famille de k-groupes algébriques $(G_i)_{i \in I}$, indexée par un ensemble I ordonné filtrant et une famille $u_{ij} : G_j \to G_i$ de morphismes de groupes, définis pour $j \geqslant i$ et tels que :

1° Le système (G_i, u_{ij}) est un système projectif filtrant de k-schémas en groupes.

2° Les G_i sont des quotients f. p. q. c. de G et, muni des morphismes canoniques $u_i : G \to G_i$, G s'identifie à la limite projective du système (G_i, u_{ij}) dans **Sch**$/k$.

3° Pour i assez grand, u_i et u_{ij} sont affines, de sorte que G est aussi limite du système dans la catégorie des espaces annelés.

(Q) QUOTIENT. — Soit H un sous-schéma en groupes fermé de G. Le faisceau f. p. q. c. quotient G/H est un schéma dans les deux cas suivants :

1° H est défini par un idéal de type fini, l'espace homogène G/H étant alors de type fini sur k.

2° H est distingué dans G.

Nous prouverons alors les résultats suivants.

0.0. THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si G est quasi compact, G vérifie* (L).

0.1. LEMME. — *Si G vérifie* (L), *G vérifie* (Q).

(0.1) est immédiat à partir des théorèmes de passage au quotient pour les groupes algébriques.

0.2. COROLLAIRE (*théorème de passage au quotient*). — *Si G est quasi compact, G vérifie* (Q).

1. Résultats préliminaires

1.1. Un lemme de représentabilité

LEMME 1.1.1. — *Soit k un corps, X_0 un k-schéma, S un k-schéma quasi compact,*

$X = X_0 \times_k S$. Soit U un ouvert de X quasi compact et schématiquement dense dans X relativement à S.

Soient h_1 et h_2 deux S-fonctions rationnelles sur X, définies sur U.

Soit R le sous-foncteur de S des coïncidences de h_1 et h_2, i. e. si $T \in$ **Sch**$/S$,

$$R(T) = \{u \in S(T);\ u^* h_1 = u^* h_2\},$$

où l'égalité $u^* h_1 = u^* h_2$ signifie que ces fonctions coïncident sur un ouvert relativement schématiquement dense de $X_T = X \times_S T$.

Alors, R est un sous-schéma fermé de S défini par un idéal de type fini.

Preuve. — On se ramène au cas où S et X_0 sont affines d'anneaux A et B_0, donc $X = \operatorname{spec} B$ avec $B = B_0 \otimes_k A$. Puis, par passage à la limite, on se ramène au cas où B_0 est de type fini sur k. Quitte à restreindre U, on peut supposer $U = X_b$, avec $b \in B$, universellement non diviseur de zéro. On a alors $h_1 = f_1/b^n$, $h_2 = f_2/b^n$ avec $f_1, f_2 \in B$, et R est aussi le foncteur des coïncidences de f_1 et f_2. Si on choisit alors une base $(e_i)_{i \in I}$ de B sur A, et si $f_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$, $f_2 = \sum_{i=1}^{p} \mu_i e_i$, on a $R = \operatorname{spec} A/I$ avec

$$I = (\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_p - \mu_p).$$

1.2. Lemme de passage au quotient

DÉFINITION 1.2.1. — Soit k un anneau, K une k-algèbre, I un idéal de $K \otimes_k K$. On dit que I est un équidéal sur K si $R = \operatorname{spec} K \otimes_k K/I$ est une relation d'équivalence sur $\operatorname{spec} K = X$ (i. e. pour tout $S \in \mathbf{Sch}/k$, $R(S)$ est une relation d'équivalence sur $X(S)$).

PROPOSITION 1.2.2. — *Soit k un corps, K une extension de k, I un équidéal sur K. On suppose I de type fini. Soit K' le noyau de la double flèche canonique*

$$i_1, i_2 : \quad K \rightrightarrows K \otimes_k K/I.$$

Alors, K' est une sous-k-extension de K, de type fini, et on a un isomorphisme

$$K \otimes_{K'} K \simeq K \otimes_k K/I.$$

Preuve. — On se ramène par passage à la limite au cas où K est de type fini sur k. On peut alors écrire K comme le corps des fractions d'une k-algèbre de type fini intègre A. Quitte à localiser A, on peut supposer que la relation d'équivalence sur K provient de A, et même qu'elle est plate sur A en vertu du théorème de platitude générique. Le résultat découle alors du théorème de passage au quotient par une relation plate ([3], SGA, Exp. V, th. 8.1).

Remarque 1.2.3. — On peut se poser un problème analogue : soit K une k-algèbre locale, de dimension zéro, et I un équidéal sur K, de type fini. On suppose de plus que la flèche $i_1 : K \to K \otimes_k K/I$ est plate. Soit $K' = \operatorname{Ker}(i_1, i_2)$, a-t-on encore l'isomorphisme $K \otimes_{k'} K \simeq K \otimes_k K/I$?

La démonstration précédente ne s'applique plus, faute de savoir conserver la platitude de i_1 par passage à la limite, ou de pouvoir appliquer le théorème de platitude générique (K a des éléments nilpotents). Cette difficulté complique notablement l'étude des groupes connexes non réduits.

1.3. Un corollaire

PROPOSITION 1.3.1. — *Soit k un corps, K et K_0 deux extensions de k géométriquement intègres, de sorte que $K \otimes_k K_0$ est intègre. Soient $f_1, \ldots, f_n \in K \tilde{\otimes}_k K_0$, corps des fractions de $K \otimes_k K_0$.*

Alors, il existe une plus petite sous-extension K' de K telle que $f_1, \ldots, f_n \in K' \tilde{\otimes}_k K_0$.

De plus :

1° *K' est de type fini sur k;*

2° *Si $\alpha : K \to L$ est un homomorphisme de corps et si L' est la plus petite sous-extension de L telle que $\alpha \tilde{\otimes} 1\,(f_i) \in L' \tilde{\otimes}_k K_0$, on a $L' = \alpha(K')$.*

Preuve :

1° On peut supposer $n = 1, f_i = f$.

2° Posons $A = K \otimes_k K$, et considérons les deux flèches canoniques :

$$i_1, i_2 : \ K \otimes_k K_0 \ \rightrightarrows \ A \otimes_k K_0.$$

Soient $f_1 = i_1(f)$, $f_2 = i_2(f)$, $X_0 = \operatorname{spec} K_0$, $S = \operatorname{spec} A$. On peut appliquer (1.1.1), et le sous-foncteur R de S des coïncidences de f_1 et f_2 est un sous-schéma fermé défini par un idéal I de type fini qui est un équidéal sur K. Soit K' le noyau de la double flèche $j_1, j_2 : K \rightrightarrows K \otimes_k K/I$. Par descente fidèlement plate, il résulte alors de (1.2.2) que $f \in K' \tilde{\otimes}_k K_0$. Les autres assertions sont faciles.

2. Groupes rationnels. Démonstration du théorème fondamental dans le cas intègre

2.1. Définition des groupes rationnels

Soit k un corps, K une extension de k que nous supposerons géométriquement intègre. On note $K \tilde{\otimes}_k K$ le corps des fractions de $K \otimes_k K$. De même, $K \tilde{\otimes}_k K \tilde{\otimes}_k K$ est le corps des fractions de $K \otimes_k K \otimes_k K$.

DÉFINITION 2.1.1. — On appelle *groupe rationnel sur k*, la donnée d'une extension K géométriquement intègre et de deux homomorphismes de

k-algèbres :

$$\Delta : \quad K \to K \otimes_k K,$$
$$\sigma : \quad K \to K$$

vérifiant les propriétés suivantes :

(*a*) $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_K$.

(*b*) *Associativité :* considérons le diagramme suivant

$$K \xrightarrow{\Delta} K \tilde{\otimes}_k K \overset{\Delta \tilde{\otimes} 1}{\underset{1 \tilde{\otimes} \Delta}{\rightrightarrows}} K \tilde{\otimes}_k K \tilde{\otimes}_k K.$$

Alors, $(\Delta \tilde{\otimes} 1) \circ \Delta = (1 \tilde{\otimes} \Delta) \circ \Delta$.

(*c*) Soient $\Delta_1, \Delta_2 : K \to K \tilde{\otimes}_k K$ les homomorphismes $\Delta_1 = (\sigma \tilde{\otimes} 1) \circ \Delta$, $\Delta_2 = (1 \tilde{\otimes} \sigma) \circ \Delta$. Désignons par i_1, i_2, s les homomorphismes

$$i_1 : \quad K \to K \tilde{\otimes}_k K, \qquad x \mapsto x \otimes 1,$$
$$i_2 : \quad K \to K \tilde{\otimes}_k K, \qquad x \mapsto 1 \otimes x,$$
$$s : \quad K \tilde{\otimes}_k K \to K \tilde{\otimes}_k K, \qquad x \otimes y \mapsto y \otimes x.$$

On a les égalités suivantes :

$$i_2 = (i_1 . \Delta_1) \circ \Delta, \qquad i_2 = (i_1 . \Delta) \circ \Delta_1,$$
$$i_1 = (\Delta . i_2) \circ \Delta_2, \qquad i_1 = (\Delta_2 . i_2) \circ \Delta,$$
$$\Delta \circ \sigma = (\sigma \tilde{\otimes} \sigma) \circ s \circ \Delta,$$

où $i_1 . \Delta_1 : K \tilde{\otimes}_k K \to K \tilde{\otimes}_k K$ est défini par $(i_1 . \Delta_1)(x \otimes y) = i_1(x) \Delta_1(y)$, et de même pour $i_1 . \Delta$, $\Delta . i_2$, $\Delta_2 . i_2$.

DÉFINITION 2.1.2. — On dit qu'un *k-groupe rationnel* (K, Δ, σ) *est de type fini sur k*, si K est une extension de type fini de k.

DÉFINITION 2.1.3. — Un *homomorphisme de k-groupes rationnels* $\varphi : (K, \Delta, \sigma) \to (K', \Delta', \sigma')$ consiste en la donnée d'un k-homomorphisme $\varphi : K \to K'$ tel que :

1° $\Delta' \circ \varphi = (\varphi \tilde{\otimes} \varphi) \circ \Delta$;

2° $\sigma' \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$.

Exemple fondamental 2.1.4. — Soit G un k-schéma en groupes géométriquement intègre, K le corps des fonctions rationnelles sur G.

Soit $\pi : G \times G \to G$ la loi de composition, $\tau : G \to G$ le passage à l'inverse.

Alors, π induit $\Delta : K \to K \tilde{\otimes}_k K$, τ induit $\sigma : K \to K$, et (K, Δ, σ) est un groupe rationnel. En effet, il est clair que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_K$, d'autre part, (*b*) résulte de l'égalité $(xy)z = x(yz)$ dans G et (*c*) résulte des égalités

$$x(x^{-1}y) = y; \qquad x^{-1}(xy) = y, \qquad (xy)(y^{-1}) = x;$$
$$(xy^{-1})y = x; \qquad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$

On en déduit un foncteur F de la catégorie $\mathbf{GI}_k$ des k-schémas en groupes géométriquement intègres avec comme flèches les homomorphismes dominants dans la catégorie $\mathbf{Rat}_k$ des k-groupes rationnels.

Remarques 2.1.5. — Un certain nombre de questions se posent naturellement à propos des groupes rationnels :

(*a*) Tout groupe rationnel est-il de type ci-dessus ? Nous verrons que c'est vrai si K est de type fini, faux sinon.

(*b*) Tout groupe rationnel est-il limite de groupes rationnels de type fini ? C'est l'objet du paragraphe suivant.

(*c*) Enfin, on peut donner une définition plus générale des groupes rationnels (par exemple en admettant des éléments nilpotents). Malheureusement, les difficultés techniques évoquées en (1.2.3) ne permettent pas, pour l'instant, d'en poursuivre l'étude.

2.2. **Approximation des groupes rationnels**

THÉORÈME 2.2.1. — *Soit* (K, Δ, σ) *un k-groupe rationnel. Alors* (K, Δ, σ) *est limite inductive filtrante de k-groupes rationnels de type fini* $(K_i, \Delta_i, \sigma_i)$, *les* K_i *étant des sous-extensions de* K, *et* Δ_i *et* σ_i *les restrictions à* K_i *de* Δ et σ.

Preuve. — La démonstration est facile à partir de (1.3.1), mais nécessite quelques étapes. On montre d'abord, $x_1, \ldots, x_n \in K$ étant donnés, qu'il y a une plus petite sous-extension K' de K, contenant les x_i, de type fini et telle que $\Delta K' \subset K' \tilde{\otimes}_k K$. Il suffit d'appliquer (1.3.1) avec $f_i = \Delta x_i$, $f_i \in K' \tilde{\otimes}_k K$, et de remarquer que, comme

$$\Delta \tilde{\otimes} 1 (f_i) = (1 \tilde{\otimes} \Delta)(f_i) = u_i,$$

on a

$$u_i \in \Delta K' \tilde{\otimes} K \qquad \text{et} \qquad u_i \in K' \tilde{\otimes} K \tilde{\otimes} K,$$

et qu'en vertu de (1.3.1, 2°)

$$\Delta K' \subset K' \tilde{\otimes} K.$$

L'étape suivante est analogue, mais on impose $\Delta K' \subset K' \tilde{\otimes}_k K'$ et enfin $\sigma K' \subset K'$. Il suffit alors de prendre toutes les parties finies $J = \{x_1 \ldots x_n\}$ de K et de construire $K' = K_J$. D'après ce qui précède, $(K_J, \Delta/K_J, \sigma/K_J)$ est un groupe rationnel de type fini, et on a $K = \bigcup_{J \subset K, J \text{finie}} K_J$.

2.3. **Construction d'un groupe algébrique à partir d'un groupe rationnel de type fini**

C'est le théorème de Weil qu'on utilise sous la forme de [3] (SGA, Exp. XVIII).

PROPOSITION 2.3.1 (WEIL). — *Le foncteur* F (2.1.4) *est une équivalence de catégories entre la catégorie des k-groupes algébriques lisses et connexes et celle des k-groupes rationnels de type fini.*

Pour la preuve de (2.3.1), le lecteur est renvoyé à [4] (III, 3.1 et 4.1) et à [2] (SGA, Exp. XVIII).

2.4. **Le théorème d'approximation pour les groupes géométriquement intègres**

THÉORÈME 2.4.1. — *Soit k un corps; il y a équivalence entre les données suivantes :*

1° *Un k-groupe rationnel* (K, Δ, σ).

2° *Un système projectif filtrant* (G_i, u_{ji}) *de k-groupes algébriques lisses et connexes à morphismes de transition fidèlement plats.*

De plus, la limite projective du système (G_i, u_{ji}) *dans la catégorie des espaces annelés est un schéma si, et seulement si, les* u_{ji} *sont affines à partir d'un certain rang. La limite G est alors un k-schéma en groupes géométriquement intègre de corps de fonctions rationnelles isomorphe à K.*

Preuve. — Si on a un système projectif (G_i, u_{ji}), et si K_i est le corps des fonctions de G_i, on a sur $K = \varinjlim K_i$ une structure de groupe rationnel.

Réciproquement, si (K, Δ, σ) est un groupe rationnel, en vertu de (2.2.1), il est limite de groupes rationnels $(K_i, \Delta_i, \sigma_i)$ de type fini, d'où un système projectif (G_i, u_{ji}) de groupes algébriques en vertu de (2.3.1).

Contre exemple 2.4.2. — Le théorème de Weil ne se généralise pas sans hypothèses de finitude.

Soit en effet $(G_n, u_{mn})_{n \in \mathbf{N}}$ un système projectif de variétés abéliennes lisses et connexes avec $\dim G_n < \dim G_{n+1}$.

Par (2.4.1), on en déduit un groupe rationnel (K, Δ, σ) avec $K = \varinjlim K_n$, mais K ne provient pas de G, groupe intègre, sinon les morphismes u_{nm} seraient affines pour n assez grand, or il sont propres, donc ils seraient finis ce qui contredit l'hypothèse dim $G_n <$ dim G_{n+1}.

THÉORÈME 2.4.3. — *Le théorème fondamental est vrai pour un k-schéma en groupes G-géométriquement intègre, i. e. si G est géométriquement intègre, G vérifie* (L).

Preuve. — Soit (K, Δ, σ) le groupe rationnel associé à G. Par (2.4.1), on en déduit un système projectif (G_i, u_{ji}) de groupes algébriques lisses et connexes. Le seul point non trivial est de prouver que les u_{ji} sont affines à partir d'un certain rang.

Alors $H = \varprojlim G_i$ est un schéma en groupes, et on a un isomorphisme $u : G \to H$ (C'est un épimorphisme f. p. q. c., et un monomorphisme en raison de l'isomorphisme au point générique.)

COROLLAIRE 2.4.4. — *Le théorème de passage au quotient est vrai pour les groupes géométriquement intègres* (0.2). *Autrement dit, si G est géométriquement intègre, G vérifie* (Q).

3. Le cas des groupes connexes

3.1. Construction de stabilisateurs

THÉORÈME 3.1.1. — *Soit k un corps, G un k-schéma en groupes quasi compact.*

Il existe une famille filtrante $(H_\alpha)_{\alpha \in A}$ *de sous-schémas en groupe, fermés, affines, distingués dans G, définis par des idéaux de type fini et tels que l'intersection* $\bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$ *soit réduite à l'élément neutre.*

En particulier, on a, au sens des faisceaux f. p. q. c., un isomorphisme

$$G \tilde{\to} \varprojlim G/H_\alpha .$$

Preuve. — On obtient les H_α comme stabilisateurs à gauche et à droite des familles finies de fonctions rationnelles sur G.

De façon précise, si f est une fonction rationnelle sur G, définie sur un ouvert affine schématiquement dense U, et si T est un k-schéma, on désigne par f_T la fonction rationnelle image réciproque de f sur $G_T = G \times_k T$, définie sur $U_T = U \times_k T$. Si maintenant $g \in G(T)$, g induit par multiplication à gauche un automorphisme noté encore g de G_T.

L'image réciproque par g de f_T est noté ${}^g f_T$, et on écrit ${}^g f_T(a) = f_T(ga)$. De même, on définit f_T^g avec $f_T^g(a) = f(ag)$. Le stabilisateur H de f est alors défini comme sous foncteur de G par

$$H(T) = \{ g \in G(T); f_T = {}^g f_T = f_T^g \}.$$

En vertu de (1.1.1), il est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de G défini par un idéal de type fini, et distingué dans G.

On a évidemment le même résultat pour un nombre fini de fonctions $f_1, \ldots, f_n$. On prouve alors que si $\alpha = \{f_1, \ldots, f_n\}$ parcourt l'ensemble des familles finies de fonctions rationnelles, on a $\bigcap_\alpha H_\alpha = \{ e \}$, et il en résulte que H_α est affine pour α assez grand, ce qui achève de prouver (3.1.1).

3.2. **Construction de** H_α Gred

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit k un corps parfait, G un k-schéma en groupes connexe,* Gred *le groupe réduit qui est alors géométriquement intègre.*

Soit H_α un des sous-groupes définis en (3.1.1). *Alors le faisceau H_α* Gred *est un sous-schéma en groupes fermé de G défini par un idéal de type fini* (*donc nilpotent*).

Preuve. — On obtient H_α Gred comme quotient f. p. q. c. de $H_\alpha \times$ Gred, produit semi-direct. La représentabilité du quotient résulte du fait que H_α et Gred sont limites projectives de groupes algébriques (0.1), H_α parce qu'il est affine, Gred en vertu de (2.4.3).

La démonstration du fait que H_α Gred est un sous-groupe fermé, défini par un idéal nilpotent, est un peu technique, et nous renvoyons à [4] (IV, § 2).

3.3. **Démonstration du théorème fondamental, cas connexe**

THÉORÈME 3.3.1. — *Le théorème fondamental est vrai pour un k-schéma en groupes connexe.*

Preuve. — En vertu de (3.1.1), il suffit de prouver la représentabilité des faisceaux G/H_α. On se ramène à k parfait par descente radicielle.

La clé de la démonstration est alors le lemme suivant, dû à GROTHENDIECK ([1], III, § 2.7.1).

LEMME 3.3.2. — *Soit S un k-schéma, R un k-schéma d'équivalence sur S tel que* $\mathrm{pr}_1 : R \to S$ *soit f. p. q. c. Soit S_0 un sous-schéma fermé de S défini par un idéal nilpotent, de type fini, et saturé sous R.*

Si R_0 est la relation induite par R sur S_0 et si le faisceau f. p. q. c. quotient S_0/R_0 est un k-schéma de type fini, alors le faisceau f. p. q. c. S/R est un k-schéma de type fini.

Il suffit alors, en vertu de (3.2.1), d'appliquer ce lemme avec $S = G$ et $S_0 = H_\alpha$ Gred. En effet, H_α Gred$/H_\alpha \simeq$ Gred$/H_\alpha \cap$ Gred, et ce quotient est représentable en vertu de (2.4.4).

COROLLAIRE 3.3.3. — *Le théorème de passage au quotient est vrai pour les groupes connexes.*

4. Le cas général

4.1. La composante neutre

PROPOSITION 4.1.1. — *Soit G un k-schéma en groupes. Il existe un sous-schéma en groupes fermé G^0 de G, appelé composante neutre, tel que :*

1° *L'espace sous-jacent à G^0 est la composante irréductible de l'élément neutre;*

2° *$G^0 \longrightarrow G$ est une immersion fermée plate;*

3° *G^0 est géométriquement irréductible.*

De plus,

4° *G^0 est quasi compact;*

5° *G^0 est un sous-groupe caractéristique de G.*

PROPOSITION 4.1.2. — *Sous les hypothèses de* (4.1.1), *supposons de plus G quasi compact. Alors le faisceau f. p. q. c. $G/G^0 = Y$ est un k-schéma en groupes, affine, dont les anneaux locaux sont des corps.*

De plus, Y est compact et totalement discontinu.

COROLLAIRE 4.1.3. — *Soit G un k-schéma en groupes quasi compact, H un sous-schéma en groupes fermé de G, affine, distingué, défini par un idéal de type fini.*

Alors le faisceau f. p. q. c. G/H est un groupe algébrique.

Preuve. — On a la suite exacte

$$0 \to G^0 \to G \to G/G^0 \to 0.$$

Posons $G' = G/G^0$, $H' = H/H \cap G^0$, on a aussi la suite exacte de faisceaux

$$0 \to H G^0/G^0 \to G/H \to G'/H' \to 0$$

ou encore

$$0 \to G^0/H \cap G^0 \to G/H \to G'/H' \to 0,$$

$G^0/H \cap G^0$ est représentable (3.3.3), G'/H' l'est aussi car G' est affine, de plus c'est un groupe étale fini. Il en résulte aisément que l'extension est représentable.

COROLLAIRE 4.1.4 (*Théorème fondamental*). — *Le théorème fondamental est vrai pour tout k-schéma en groupes quasi compact* (0.0).

Preuve. — Cela résulte de (3.1.1) et (4.1.3).

4.2. **Corollaires du théorème fondamental**

4.2.1. THÉORÈME DE PASSAGE AU QUOTIENT. — *Tout k-schéma en groupes quasi compact vérifie* (Q) (0.2).

Contre exemple 4.2.2. — Si on n'a pas l'une des hypothèses 1° ou 2° de (0.2), G/H n'est pas nécessairement un schéma.

En effet, prenons $G_0 = \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$, et B_0 un sous-groupe de Borel tel que $G_0/B_0 \simeq \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$. Comme G_0 et B_0 sont affines, les produits infinis $G = \prod_{n \in \mathbf{N}} G_n$, $B = \prod_{n \in \mathbf{N}} B_n$, avec $G_n = G_0$, $B_n = B_0$, sont des groupes affines, et B est un sous-groupe de G. Cependant $G/B \simeq \prod_{n \in \mathbf{N}} G_n/B_n$ n'est pas représentable.

COROLLAIRE 4.2.3. – *Soient G et H deux k-schémas en groupes, $f : G \rightarrow H$ un homomorphisme quasi compact. Soit $N =$* Ker *u. Alors le faisceau f. p. q. c. G/N est un schéma, et le monomorphisme canonique $G/N \rightarrow H$ est une immersion fermée.*

COROLLAIRE 4.2.4. — *Un monomorphisme quasi compact de k-schémas en groupes est une immersion fermée.*

COROLLAIRE 4.2.5. — *Soit $u : G \rightarrow H$ un homomorphisme de k-schémas en groupes quasi compacts. Alors u est fidèlement plat si, et seulement si, u est schématiquement dominant.*

COROLLAIRE 4.2.6. — *La catégorie des k-schémas en groupes quasi compacts commutatifs est abélienne.*

COROLLAIRE 4.2.7. — *Soit G un k-schéma en groupes quasi compact. L'ensemble des points à corps résiduel algébrique sur k est dense dans G.*

C'est aussi l'ensemble des points fermés, et si k est algébriquement clos, des points rationnels.

COROLLAIRE 4.2.8 (CARTIER). — *Si k est de caractéristique zéro, tout schéma en groupes est géométriquement réduit.*

COROLLAIRE 4.2.9 (CHEVALLEY). — *Soit G un k-schéma en groupes connexe. On a une suite exacte :*

$$0 \to H \to G \to A \to 0,$$

où H est un groupe affine et A une variété abélienne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DEMAZURE (M.) et GABRIEL (P.). — *Groupes algébriques.* Tome 1 : *Géométrie algébrique.* — Paris, Masson; Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1970.

[2] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique* (EGA). — Paris, Presses universitaires de France, 1960 à 1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32).

[3] GROTHENDIECK (A.) et DEMAZURE (M.). — *Séminaire de géométrie algébrique* (SGA 3) : *Schémas en groupes*, I-III. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 151, 152, 153).

[4] PERRIN (D.). — *Schémas en groupes quasi compacts sur un corps.* (*Publications mathématiques de l'Université Paris-Sud*, n° 165, 75-46)

(Texte reçu le 17 octobre 1975.)

Daniel PERRIN,
6, rue du Professeur Einstein,
92160 Antony.