BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN SAINT-RAYMOND

Boréliens à coupes K_σ

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 389-400
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__389_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 389-400.

BORÉLIENS À COUPES K_σ

PAR

JEAN SAINT-RAYMOND

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris VI]

RÉSUMÉ. — Soit, dans le produit $L \times M$ de deux espaces métrisables compacts, un borélien H dont les coupes parallèles à M sont des K_σ. On démontre que H est alors la réunion d'une suite de boréliens dont les coupes sont compactes.

On supposera, dans tout ce qui suit, que tous les espaces métriques considérés sont munis d'une distance bornée par 1, et que ceux d'entre eux qui sont polonais sont complets. Si L et M sont compacts métrisables, on notera π_1 et π_2 les projections de $L \times M$ sur L et M respectivement, $\mathscr{C}$ l'ensemble des boréliens de $L \times M$ dont les coupes parallèles à M sont compactes, et $\mathscr{C}_\sigma$ l'ensemble des réunions dénombrables d'éléments de $\mathscr{C}$. Si Z est une partie de $L \times M$, on notera $Z^\sim$ la partie de $L \times M$ dont les coupes sont les adhérences des coupes correspondantes de Z, c'est-à-dire

$$Z^\sim = \bigcup_{x \in L} \overline{(\{x\} \times M) \cap Z}.$$

LEMME. 1 — *Si Z est analytique, $Z^\sim$ est aussi analytique.*

La démonstration qui suit est agencée pour être utilisée au lemme 3.

Démonstration. — Choisissons pour tout entier k un recouvrement ouvert fini $(U_{i,n})$ de M par des ouverts de diamètre inférieur à 2^{-k}. Puisque, pour toute partie T de M, on a

$$\overline{T} = \bigcap_k \left(\bigcup_{i \in I_k} \overline{U}_{i,k}\right), \qquad \text{où} \quad I_k = \{i;\ T \cap \overline{U}_{i,k} \neq \emptyset\},$$

on a aussi

$$Z^\sim = \bigcap_k \left(\bigcup_i \pi_1 [Z \cap (L \times \overline{U}_{i,k})] \times \overline{U}_{i,k}\right),$$

et cette formule montre que $Z^\sim$ est analytique si Z l'est.

On va donner maintenant une démonstration du théorème de séparation de Novikov, analogue à celle du premier théorème de séparation des ensembles analytiques, et qui n'utilise pas le deuxième théorème de séparation de Lusin.

LEMME 2. — *Si* (A_n) *est une suite de parties analytiques de l'espace polonais* E, *d'intersection vide, il existe une suite* (B_n) *de boréliens de* E, *d'intersection vide, telle que* $B_n \supset A_n$ *pour tout* n.

Démonstration. — Choisissons, pour tout n, un polonais P_n et une surjection continue φ_n de P_n sur A_n. Supposons que, pour toute suite (B_n) de boréliens de E telle que $B_n \supset A_n$ pour tout n, on ait $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$. Nous allons construire par récurrence une suite (U_k) d'ouverts élémentaires de $\prod_n P_n$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} U_k = \prod_{n<k} \omega_{n,k} \times \prod_{n\geq k} P_n, \\ \operatorname{diam}(\omega_{n,k}) \leqslant 2^{-k} \quad \text{si} \quad n < k, \\ \overline{U}_{k+1} \subset U_k, \\ \text{Étant donné } k, \text{ si une suite } (B_n) \text{ de boréliens de } E \text{ est telle que, pour} \\ \quad \text{tout } n,\ B_n \supset \varphi_n \circ p_n(U_k), \text{ où } p_n \text{ est la projection de } \prod_n P_n \text{ sur } P_n, \\ \quad \text{on a } \bigcap_n B_n \neq \emptyset. \end{array}\right.$$

On peut prendre $U_0 = \prod_n P_k$. Si U_n est déterminé, il existe, pour tout $n < k+1$, un recouvrement $(\alpha_{n,i})_{i\in\mathbf{N}}$ de $\omega_{n,k}$ par des ouverts de P_n vérifiant $\overline{\alpha}_{n,i} \subset \omega_{n,k}$, et $\operatorname{diam}(\alpha_{n,i}) \leqslant 2^{-k-1}$. Nous allons montrer, par l'absurde, qu'il existe $(i_0, i_1, \ldots, i_k) \in \mathbf{N}^{k+1}$ tel que

$$U_{k+1} = \prod_{n\leqslant k} \alpha_{n,\, i_n} \times \prod_{n\geqslant k+1} P_n$$

vérifie les conditions ci-dessus. Si un tel U_{k+1} n'existe pas, il existe, pour chaque $\delta = (i_0, \ldots, i_k)$, une suite $(B_{n,\delta})_n$ de boréliens de E avec

$$\left\{\begin{array}{ll} B_{n,\,\delta} \supset \varphi_n(\alpha_{n,\,\delta(n)}) & \text{si} \quad n \leqslant k, \\ B_{n,\,\delta} \supset A_n & \text{si} \quad n \geqslant k+1, \\ \qquad\qquad \bigcap_n B_{n,\,\delta} = \emptyset. & \end{array}\right.$$

Si l'on pose alors

$$\left\{\begin{array}{ll} C_{n,\,i} = \bigcap_{\delta(n)=i} B_{n,\,\delta}, & \text{si} \quad n \leqslant k, \\ C'_n = \bigcap_\delta B_{n,\,\delta} & \text{si} \quad n > k, \end{array}\right.$$

on a

$$\left\{\begin{array}{ll} C_{n,\,i} \supset \varphi_n(\alpha_{n,\,i}) & \text{si} \quad n \leqslant k, \\ C'_n \supset \varphi_n(P_n) & \text{si} \quad n > k. \end{array}\right.$$

Si l'on pose enfin

$$C'_n = \bigcup_{i\in N} C_{n,\,i} \qquad \text{si} \quad n \leqslant k,$$

on a, pour tout n, $C'_n \supset p_n(U_k)$, et $\bigcap_n C'_n = \emptyset$. Comme les (C'_n) sont boréliens, ceci contredit l'hypothèse de récurrence; on peut donc déterminer U_{k+1}.

Puisque les (P_n) sont complets, il existe, pour tout n, un ξ_n dans P_n tel que

$$\bigcap_k U_k = \{(\xi_n)_n\}.$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à la suite (B_n), définie par

$$B_0 = \overline{\varphi_0 \circ p_0(U_k)}; \qquad B_m = \overline{\varphi_m \circ p_m(U_k)}; \qquad B_n = E \quad \text{si } n \notin \{0, m\}$$

donne

$$\overline{\varphi_0 \circ p_0(U_k)} \cap \overline{\varphi_m \circ p_m(U_k)} \neq \emptyset,$$

ce qui entraîne, par continuité de φ_0 et φ_m : $\varphi_0(\xi_0) = \varphi_m(\xi_m)$. On en déduit que $\varphi_0(\xi_0) \in \bigcap_n A_n$, contrairement à l'hypothèse du lemme. Et ceci achève la démonstration.

LEMME 3. — *Soient X et Y deux analytiques de $L \times M$. Si $X^{\sim}$ est disjoint de Y, il existe un borélien C à coupes compactes contenant X et disjoint de Y.*

Démonstration. — Choisissons des ouverts $U_{i,k}$ comme dans le lemme 1. La formule du lemme 1 montre que les analytiques de $L \times M$

$$A_k = Y \cap (\bigcup_i \pi_1[X \cap (L \times \overline{U}_{i,k})] \times \overline{U}_{i,k})$$

ont une intersection vide; il existe donc des boréliens C_k dans $L \times M$ tels que $\bigcap_k C_k = \emptyset$ et

$$A_k \subset C_k \quad \text{pour tout } k.$$

De plus, puisque, pour tout i et tout k, on a

$$\pi_1[X \cap (L \times \overline{U}_{i,k})] \times \overline{U}_{i,k} \subset C_k \cup (\complement Y),$$

les analytiques $\pi_1[X \cap (L \times \overline{U}_{i,k})]$ et $\pi_1[Y \cap (\complement C_k) \cap (L \times \overline{U}_{i,k})]$ sont disjoints dans L. Il existe donc des boréliens $B_{i,k}$ de L tels que

$$X \cap (L \times \overline{U}_{i,k}) \subset B_{i,k} \times \overline{U}_{i,k} \subset C_k \cup (\complement Y).$$

Si on pose maintenant

$$H_k = \bigcup_i B_{i,k} \times \overline{U}_{i,k},$$

on a

$$H_k \in \mathscr{C} \qquad \text{et} \qquad X \subset H_k \subset C_k \cup (\complement Y).$$

Il en résulte que $C = \bigcap_k H_k$ appartient à $\mathscr{C}$, que C contient X et $X^{\sim}$, et est disjoint de Y, puisque $\bigcap_k C_k$ est vide.

On peut remarquer que si on définit H'_k par $H'_k = \bigcap_{j \leqslant k} H_j$, chacun des H'_k est une union finie de rectangles boréliens à coupes compactes, donc que $\pi_1(H'_k)$ est borélien dans L. Puisque les coupes des H'_k sont des compacts et forment des suites décroissantes, on a

$$\pi_1(C) = \pi_1(\bigcap_k H'_k) = \bigcap_k \pi_1(H'_k),$$

ce qui montre que $\pi_1(C)$ est borélien.

On en déduit le théorème suivant de Novikov : « *Si X appartient à $\mathscr{C}$, $\pi_1(X)$ est borélien* ». En effet, si X appartient à $\mathscr{C}$, $\complement X$ est analytique disjoint de $X^{\sim}$. Et X est alors égal au borélien C dont on vient de montrer que la projection est borélienne.

Soient X et Y deux analytiques de $L \times M$, disjoints. Soient P un espace polonais, et φ une surjection continue de P sur X. Pour toute partie Z de P, nous noterons $D(Z)$ l'ensemble des points ξ de Z tels que, pour tout voisinage V de ξ :

$$\overline{\varphi(V \cap Z) \cap (\{x\} \times M)} \quad \text{rencontre } Y, \qquad \text{où} \quad x = \pi_1 \circ \varphi(\xi).$$

LEMME 4. — *Si Z est analytique, $D(Z)$ est analytique. Si de plus, B est un borélien de P, contenant $D(Z)$, il existe un élément H_1 de $\mathscr{C}_\sigma$ contenant $\varphi(Z \setminus B)$ et disjoint de Y.*

Démonstration. — Soit $(\omega_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une base d'ouverts de P. Posons

$$\Gamma_i = \omega_i \setminus \varphi^{-1}[\pi_1(\varphi((Z \cap \omega_i)^{\sim}) \cap Y) \times M].$$

On voit que Γ_i est coanalytique. De plus, il résulte de la définition de $D(Z)$ que

$$D(Z) = Z \setminus \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \Gamma_i,$$

d'où l'on déduit que $D(Z)$ est analytique. Supposons maintenant que B soit un borélien de P contenant $D(Z)$. Alors les analytiques $(Z \setminus (B \cup \Gamma_i))_{i \in \mathbf{N}}$ ont une intersection vide. Il existe donc une suite (B_i) de boréliens de P, d'intersection vide, telle que

$$B_i \supset Z \setminus (B \cup \Gamma_i).$$

Si l'on pose maintenant $B'_i = P \setminus (B \cup B_i)$ nous avons

$$\bigcup_{i \in \mathbf{N}} B'_i = (P \setminus B) \setminus \bigcap_{i \in \mathbf{N}} B_i = P \setminus B$$

donc

$$\bigcup_i (B'_i \cap Z) = (P \setminus B) \cap Z = Z \setminus B$$

et

$$B_i' \cap Z \subset Z \setminus (B \cup B_i) \subset Z \setminus (Z \setminus \Gamma_i) \subset \Gamma_i \subset \omega_i.$$

Il en résulte que $(\varphi(B_i' \cap Z))^{\sim}$ est disjoint de Y.

Puisque $\varphi(B_i' \cap Z)$ est analytique, il résulte du lemme 3 qu'il existe un C_i de $\mathscr{C}$ tel que

$$\varphi(B_i' \cap Z) \subset C_i \subset \complement\, Y,$$

et si l'on pose $H_1 = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} C_i$, on a bien $H_1 \in \mathscr{C}_\sigma$, et

$$\varphi(Z \setminus B) = \bigcup_i \varphi(Z \cap B_i') \subset H_1 \subset \complement\, Y,$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Nous désignons par Ω le premier ordinal non dénombrable. Nous construisons, pour tout ordinal $\alpha < \Omega$, une partie analytique $Z^{(\alpha)}$ de P en posant

$$\begin{cases} Z^{(0)} = P; \qquad Z^{(\alpha+1)} = D(Z^{(\alpha)}), \\ Z^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha < \lambda} Z^{(\alpha)} \qquad \text{si } \lambda \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

LEMME 5. — *Si B est un borélien de P qui contient $Z^{(\alpha)}$, il existe H_1 dans $\mathscr{C}_\sigma$ contenant $\varphi(P \setminus B)$, et disjoint de Y.*

Démonstration. — L'énoncé est vrai pour $\alpha = 0$, en prenant $H_1 = \emptyset$. Si l'énoncé est vrai pour l'ordinal dénombrable α, et si B est un borélien contenant $Z^{(\alpha+1)}$, le lemme 4, appliqué à $Z^{(\alpha)}$, nous donne un $H_1' \in \mathscr{C}_\sigma$ contenant $\varphi(Z^{(\alpha)} \setminus B)$ et disjoint de Y. Alors $B \cup \varphi^{-1}(H_1')$ est un borélien de P contenant $Z^{(\alpha)}$. L'hypothèse de récurrence nous donne alors l'existence de $H_2' \in \mathscr{C}_\sigma$ contenant $\varphi[P \setminus (B \cup \varphi^{-1}(H_1'))]$ et disjoint de Y. Alors

$$H_1 = H_1' \cup H_2'$$

est un élément de $\mathscr{C}_\sigma$ contenant $\varphi(P \setminus B)$ et disjoint de Y.

Si λ est un ordinal limite, borne supérieure d'une suite croissante (α_n) d'ordinaux pour lesquels l'énoncé du lemme est vrai, et si B est un borélien contenant $Z^{(\lambda)}$, les analytiques $(Z^{(\alpha_n)} \setminus B)$ ont une intersection vide. Il existe donc des boréliens (B_n) de P, d'intersection vide, tels que, pour tout n :

$$B_n \supset Z^{(\alpha_n)} \setminus B.$$

L'hypothèse que l'énoncé est vrai pour chaque α_n, appliquée à $B \cup B_n$ et $Z^{(\alpha_n)}$ donne l'existence d'une suite (H_n') d'éléments de $\mathscr{C}_\sigma$, telle que, pour tout n :

$$\varphi[P \setminus (B \cup B_n)] \subset H_n' \subset \complement\, Y.$$

Si l'on pose alors $H_1 = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} H'_n$, on obtient $H_1 \in \mathscr{C}_\sigma$, et

$$\varphi(P \setminus B) = \bigcup_n \varphi[P \setminus (B \cup B_n)] \subset H_1 \subset \complement Y.$$

Ceci achève de démontrer que l'énoncé est vrai pour tout ordinal dénombrable α.

COROLLAIRE 6. — *Si l'un des analytiques $Z^{(\alpha)}$ est vide, il existe un H dans $\mathscr{C}_\sigma$ tel que $X \subset H$ et $H \cap Y = \emptyset$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme 5 à $B = Z^{(\alpha)} = \emptyset$, pour obtenir un H de $\mathscr{C}_\sigma$, disjoint de Y et contenant $\varphi(P \setminus B) = X$.

On va maintenant montrer que si, pour tout x de L, la coupe en x de l'analytique X est contenue dans un K_σ disjoint de la coupe en x de l'analytique Y, il existe un H dans $\mathscr{C}_\sigma$ qui contient X sans rencontrer Y. On va pour cela utiliser ce qui précède en montrant que l'un des $Z^{(\alpha)}$ est vide. Ce dernier résultat s'obtiendra par l'absurde, en prouvant que si tous les $Z^{(\alpha)}$ pour $\alpha < \Omega$ sont non vides, il existe un compact K contenu dans une coupe de $X \cup Y$, et tel qu'aucun K_σ ne puisse contenir $K \cap X$ sans rencontrer $K \cap Y$. Cette méthode n'utilise nulle part le deuxième théorème de séparation. Néanmoins, elle est directement inspirée de celle qu'a utilisée *N.* Lusin dans l'étude des boréliens à coupes dénombrables, et assez proche du théorème de bornitude de l'indice sur les boréliens, ce qui lui confère des traits communs avec le deuxième théorème de séparation.

On note D l'ensemble des suites dyadiques finies. Si s appartient à D, on note $|s|$ la longueur de la suite s; on note $s, 0$ (resp. $s, 1$) la suite de longueur $|s|+1$ obtenue en ajoutant à s un terme de rang $|s|+1$ égal à 0 (resp. 1). Si s appartient à D, et si τ appartient à l'ensemble $C = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$ des suites dyadiques infinies, on note $s \prec \tau$ si s est une section commençante de τ. On note enfin μ la bijection de D sur l'ensemble $\mathbf{N}^*$, définie par

$$\mu(s) = 2^k + \sum_{i=1}^k a_i 2^{k-i} \qquad \text{où} \quad k = |s| \quad \text{et} \quad s = (a_1 . a_2, \ldots, a_k).$$

On vérifie que μ possède la propriété

$$\begin{cases} \mu(s, 0) = 2\mu(s), \\ \mu(s, 1) = 2\mu(s)+1. \end{cases}$$

On suppose que Q est un espace polonais, et ψ une surjection continue de Q sur Y.

LEMME 7. — *Supposons qu'il existe pour tout s de D un compact $M_s \subset M$, un fermé ω_s de P, et un fermé w_s de Q tels que :*

(*a*) $M_{s,0} \cup M_{s,1} \subset M_s$;

(*b*) $M_{s,0} \cap M_{s,1} = \emptyset$;

(*c*) $\operatorname{diam}(M_s) \leqslant 2^{-|s|}$;

(*d*) $\omega_{s,0} \cup \omega_{s,1} \subset \omega_s \subset \varphi^{-1}(L \times M_s)$;

(*e*) $\operatorname{diam}(\omega_{s,0}) \leqslant (1/2) \operatorname{diam}(\omega_s)$;

(*f*) $w_{s,0} \subset w_s \subset \psi^{-1}(L \times M_s)$;

(*g*) $\operatorname{diam}(w_{s,0}) \leqslant (1/2) \operatorname{diam}(w_s)$;

(*h*) $\forall\, k \in \mathbf{N},\ \bigcap_{|s| \leqslant k} \pi_1 [\psi(w_s) \cap (\varphi(\omega_s))^{\sim}] \neq \emptyset$.

Alors il existe un point a dans L tel que la coupe en a de X ne soit contenue dans aucun K_σ disjoint de Y.

Démonstration. — Soient C le compact parfait $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, et C_0 le sous-espace dénombrable dense de C formé des suites dont tous les termes sont nuls, sauf un nombre fini. Le sous-espace C_0 est maigre en lui-même, donc n'est pas polonais, c'est-à-dire pas un G_δ dans C. On en déduit que $C \setminus C_0$ n'est pas un K_σ.

La condition (*h*) entraîne que, pour tout $s \in D$, ω_s et w_s sont non vides. Par conséquent, en vertu des conditions (*d*), (*e*), (*f*) et (*g*), ainsi que de la complétude de P et Q, on a

$$\begin{cases} \forall \tau \in C_0, & \exists\, q_\tau \in Q, \quad \{q_\tau\} = \bigcap_{s \prec \tau} w_s, \\ \forall \tau \in C \setminus C_0, & \exists\, p_\tau \in P, \quad \{p_\tau\} = \bigcap_{s \prec \tau} \omega_s. \end{cases}$$

Si $\tau' \in C_0$, $\tau'' \in C \setminus C_0$, $s' \prec \tau'$, $s'' \prec \tau''$, il résulte de (*h*) que

$$\pi_1 \circ \varphi(\omega_{s''}) = \pi_1 [(\varphi(\omega_{s''}))^{\sim}]$$

rencontre $\pi_1 \circ \psi(w_{s'})$, et puisque φ et ψ sont continues, que $(\omega_{s''})_{s'' \prec \tau''}$ forme une base de voisinages de $p_{\tau''}$ et que $(w_{s'})_{s' \prec \tau'}$ forme une base de voisinages de $q_{\tau'}$, on a

$$\pi_1 \circ \varphi(p_{\tau''}) = \pi_1 \circ \psi(q_{\tau'}),$$

et ce point $a \in L$ ne dépend ni de τ', ni de τ''.

Les conditions (*a*), (*b*) et (*c*) montrent qu'il existe une injection continue h de C dans $L \times M$, définie par

$$\forall \tau \in C, \quad \{h(\tau)\} = \{a\} \times \bigcap_{s \prec \tau} M_s.$$

La compacité de C entraîne que k est un homéomorphisme de C sur $K = h(C)$. On déduit de ce qui précède que

$$\begin{cases} \forall \tau \in C_0, \quad h(\tau) = \psi(q_\tau) \in Y & \text{(d'après } (f)), \\ \forall \tau \in C \setminus C_0, \quad h(\tau) = \varphi(p_\tau) \in X & \text{(d'après } (d)). \end{cases}$$

Si B était un K_σ contenant la coupe en a de X, et disjoint de celle de Y, on aurait

$$C \setminus C_0 \subset h^{-1}(X) \subset h^{-1}(B) \subset C \setminus h^{-1}(Y) \subset C \setminus C_0,$$

puisque

$$h(C_0) \subset Y \cap K \qquad \text{et} \qquad h(C \setminus C_0) \subset X \cap K \subset B.$$

Donc $h^{-1}(B)$ serait égal à $C \setminus C_0$. Comme B est un K_σ, $h^{-1}(B)$ serait homéomorphe à $B \cap K$, donc serait un K_σ, ce qui est impossible car $C \setminus C_0$ n'est pas un K_σ.

Il en résulte que la coupe en a de X n'est contenue dans aucun K_σ disjoint de Y, ce qu'on voulait démontrer.

LEMME 8. — *Si, pour tout $\alpha < \Omega$, $Z^{(\alpha)}$ est non vide, il existe $a \in L$ tel que tout K_σ contenant la coupe en a de X rencontre Y.*

Démonstration. — Supposons que tous les $Z^{(\alpha)}$ soient non vides. On va construire par récurrence sur l'entier $\mu(s)$ des compacts $(M_s)_{s \in D}$ de M, des fermés $(\omega_s)_{s \in D}$ de P et des fermés $(w_s)_{s \in D}$ de Q vérifiant les conditions (a) à (g) du lemme 7, et la condition suivante, plus forte que la condition (h) :

$$(h')\forall \alpha < \Omega, \ \forall m \in \mathbf{N}, \ \bigcap\nolimits_{\mu(s) \leqslant 2m-1} \pi_1 \left[\psi(w_s) \cap (\varphi(\omega_s \cap Z^{(\alpha)})^{\sim} \right] \neq \varnothing.$$

On pose, pour $m = 1$, $M_\varnothing = M$, $\omega_\varnothing = P$, $w_\varnothing = Q$. Les conditions (a) à (g) sont vérifiées. Quant à la condition (h'), elle signifie alors que, pour tout $\alpha < \Omega$, il existe une coupe de $\varphi(Z^{(\alpha)})$ dont l'adhérence rencontre Y ce qui est vérifié puisque $Z^{(\alpha+1)}$ n'est pas vide.

Supposons construits M_s, ω_s et w_s pour $\mu(s) \leqslant 2m-1$, et soit $t \in D$ tel que $\mu(t) = m$. Les ensembles analytiques

$$A_\alpha = \bigcap\nolimits_{\mu(s) \leqslant 2m-1} \pi_1 \left[\psi(w_s) \cap (\varphi(w_s \cup Z^{(\alpha)}))^{\sim} \right]$$

sont non vides, et forment une suite transfinie décroissante pour $\alpha < \Omega$. Soit $(\theta_i)_{i \in \mathbf{N}}$ (resp. $(\rho_l)_{l \in \mathbf{N}}$) une base de la topologie de ω_t (resp. w_t) formée d'ouverts de diamètre inférieur à $(1/2)$ diam (ω_t) (resp. $(1/2)$ diam (w_t)) dont les images par $\pi_2 \circ \varphi$ (resp. $\pi_2 \circ \psi$) sont de diamètres strictement inférieurs à $2^{-|t|-1}$.

Nous désignerons par Δ l'ensemble des couples (i, l) tels que

$$\overline{\pi_2 \circ \varphi(\theta_i)} \cap \overline{\pi_2 \circ \psi(\rho_l)} = \varnothing.$$

Comme X et Y sont disjoints, il est clair que Δ n'est pas vide. Pour chaque $\delta = (i, l) \in \Delta$, nous choisissons N_δ et N'_δ compacts dans M_t, P_δ et P'_δ fermés dans ω_t, Q_δ et Q'_δ fermés dans w_t tels que :

$$N'_\delta = \overline{\pi_2 \circ \varphi(\theta_i)};$$

N_δ est un voisinage fermé de $\pi_2 \circ \psi(\rho_l)$ dans M_t disjoint de N'_δ, et de diamètre au plus $2^{-|t|-1}$.

$$P'_\delta = \overline{\theta}_i; \qquad P_\delta = \omega_t \cap \varphi^{-1}(L \times N_\delta),$$
$$Q'_\delta = \psi^{-1}(L \times N'_\delta); \qquad Q_\delta = \overline{\rho}_l.$$

Nous allons démontrer par l'absurde qu'il existe un $\delta \in \Delta$ tel qu'on puisse choisir $M_{t,1} = N'_\delta$; $M_{t,0} = N_\delta$; $\omega_{t,1} = P'_\delta$; $w_{t,0} = P_\delta$; $w_{t,1} = Q'_\delta$; $w_{t,0} = Q_\delta$ en sorte que les conditions (a) à (g), ainsi que la condition (h'), soient vérifiées pour l'entier $m+1$; les conditions (a) à (g) sont vérifiées pour tout δ de Δ. Compte tenu du fait que $\mu(t, 0) = 2m$ et $\mu(t, 1) = 2m+1$ s'il n'existait aucun $\delta \in \Delta$ pour lequel (h') soit vérifiée, il existerait, pour tout $\delta \in \Delta$, un ordinal $\alpha_\delta < \Omega$ tel que $\forall \alpha \geqslant \alpha_\delta$:

(1) $$A_\alpha \cap \pi_1[\psi(Q'_5) \cap (\varphi(P'_\delta \cap Z^{(\alpha)}))^\sim] \cap \pi_1[\psi(Q_\delta) \cap (\varphi(P_\delta \cap Z^{(\alpha)}))^\sim] = \varnothing.$$

Puisque Δ est dénombrable, les $(\alpha_\delta)_{\delta \in \Delta}$ seraient majorés par un $\gamma < \Omega$, et on aurait, pour tout $\delta \in \Delta$ et tout $\alpha \geqslant \gamma$, l'égalité (1).

Mais, puisque $A_{\gamma+1}$ n'est pas vide, il existe $x \in A_{\gamma+1}$. On a alors, puisque $A_{\gamma+1} \subset A_\gamma$:

(2) $$x \in A_\gamma.$$

Il existe un point y_0 dans M tel que

$$(x, y_0) \in \psi(w_t) \cap (\varphi(Z^{(\gamma+1)} \cap \omega_t))^\sim.$$

Ceci entraîne que

$$x \in \pi_1[(\varphi(Z^{(\gamma+1)} \cap \omega_t))^\sim] = \pi_1 \circ \varphi(Z^{(\gamma+1)} \cap \omega_t).$$

Il existe donc $y_1 \in M$ et $\xi \in Z^{(\gamma+1)} \cap \omega_t$ tels que

$$(x, y_1) = \varphi(\xi).$$

Puisque $(x, y_0) \in \psi(Q) = Y$ et $(x, y_1) \in \varphi(P) = X$, on a $y_0 \neq y_1$ car $X \cap Y = \varnothing$. On a aussi $\pi_2 \circ \varphi(\omega_t) \subset M_t$; donc y_0 et y_1 sont dans M_t. Il existe donc $\delta = (i, l) \in \Delta$ tel que $\xi \in \theta_i$ et $\rho_l \cap \psi^{-1}(x, y_0) \neq \varnothing$.

Le point (x, y_0) appartient à $\psi(Q_\delta)$, et, puisque N_δ est un voisinage de y_0 dans $M_t \supset \varphi(\omega_t)$, le point (x, y_0) est adhérent à

$$(\{x\} \times M) \cap \varphi(P_\delta \cap Z^{(\gamma+1)}).$$

Il en résulte, puisque $Z^{(\gamma+1)} \subset Z^{(\gamma)}$, que

$$x \in \pi_1 \left[\psi(Q_\delta) \cap (\varphi(P_\delta \cap Z^{(\gamma)}))^{\sim}\right]. \tag{3}$$

Puisque θ_i est un voisinage de ξ, et que $\xi \in Z^{(\gamma+1)}$,

$$(\{x\} \times M) \cap \varphi(\theta_i \cap Z^{(\gamma)})$$

rencontre Y en un point (x, y_2), donc on a

$$x = \pi_1(x, y_2) \in \pi_1 \left[\psi(Q'_\delta) \cap (\varphi(P'_\delta \cap Z^{(\gamma)}))^{\sim}\right]. \tag{4}$$

On conclut de (2), (3) et (4) que (1) n'est pas vérifié pour δ et γ, contrairement à la construction de γ. Ceci prouve l'existence d'un $\delta \in \Delta$ convenable pour la construction de M_s, ω_s et w_s pour $s = t, 0$ et $s = t, 1$, et achève la construction par récurrence puisque M_s, ω_s et w_s sont maintenant déterminés pour $\mu(s) \leqslant 2m+1$.

On déduit alors du lemme 7 l'existence d'un point a de L tel que la coupe en a de X ne soit contenue dans aucun K_σ disjoint de Y, et achève la démonstration du lemme.

THÉORÈME. — *Soient X et Y deux analytiques de $L \times M$. Si, pour tout x de L, la coupe en x de X est contenue dans un K_σ disjoint de Y, il existe un élément H de $\mathscr{C}_\sigma$ contenant X et disjoint de Y.*

Démonstration. — La condition de l'énoncé entraîne que X et Y sont disjoints, et, en vertu du lemme 8, que l'un des analytiques $Z^{(\alpha)}$, pour $\alpha < \Omega$, est vide; donc il existe, d'après le corollaire 6, un élément H de $\mathscr{C}_\sigma$ contenant X et disjoint de Y.

COROLLAIRE 10. — *Soit H un borélien de $L \times M$. Pour que H appartienne à $\mathscr{C}_\sigma$, il faut et il suffit que les coupes de H soient des K_σ.*

Démonstration. — La condition est clairement nécessaire. Inversement, si les coupes de H sont des K_σ, le théorème 9 appliqué aux analytiques $X = H$ et $Y = \complement H$ donne que $H = X = \complement Y$ appartient à $\mathscr{C}_\sigma$.

COROLLAIRE 11. — *Si H est un borélien de $L \times M$ à coupes K_σ, sa projection sur L est borélienne.*

Ce résultat, dû à ARSENIN, se déduit immédiatement de ce qui précède, et du théorème de Novikov démontré dans la remarque qui suit le lemme 3.

Démonstration. — Si H est un borélien à coupes K_σ, il existe, d'après le corollaire 10, une suite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de boréliens de $L \times M$ à coupes compactes dont H est la réunion. Les projections $\pi_1(H_n)$ de ces boréliens sont boréliennes dans L en vertu du théorème de Novikov. Alors,

$$\pi_1(H) = \bigcup_n \pi_1(H_n)$$

est borélien dans L, ce qu'on voulait démontrer.

COROLLAIRE 12. — *Si H est un borélien de $L \times M$ à coupes K_σ, H possède une section borélienne.*

Ce résultat est dû à CEGOLKOV.

Démonstration. — Soit C un élément de $\mathscr{C}$. Choisissons des ouverts $U_{i,k}$ comme dans le lemme 1, et ordonnons-les totalement pour chaque entier k.

On définit par récurrence une suite $(G_k)_{k \in \mathbf{N}}$ décroissante de boréliens de $L \times M$, dont les coupes sont compactes et de diamètre inférieur à 2^{-k}, en posant

$$\begin{cases} G_0 = C, \\ B_{i,k} = \pi_1\left[G_{k-1} \cap (L \times \bar{U}_{i,k})\right], \\ G_k = G_{k-1} \cap \left[\bigcup_i (B_{i,k} \setminus \bigcup_{j<i} B_{j,k}) \times \bar{U}_{i,k}\right]. \end{cases}$$

En effet, les $B_{i,k}$, donc aussi les G_k, sont boréliens d'après le théorème de Novikov démontré après le lemme 3. De plus, on a

$$\pi_1(G_k) = \pi_1(G_{k-1}) = \ldots = \pi_1(G_0) = \pi_1(C).$$

Il en résulte que, si on note $G = \bigcap_{k \in \mathbf{N}} G_k$, on a $\pi_1(G) = \pi_1(C)$, donc que G est une section borélienne de C, puisque les diamètres des coupes des G_k tendent vers 0 quand k tend vers l'infini. Il en résulte que les éléments de $\mathscr{C}$ possèdent des sections boréliennes.

Soit maintenant H un borélien de $L \times M$ à coupes K_σ. Il résulte, d'après le corollaire 10, une suite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de boréliens à coupes compactes dont H est la réunion. Les projections des H_n sont boréliennes, et d'après ce qui précède, les H_n possèdent des sections boréliennes G_n. Alors

$$G = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} G_n \cap (\pi_1(H_n) \setminus \bigcup_{p<n} \pi_1(H_p))$$

est une section borélienne de H. Ceci termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DELLACHERIE (C.). — Ensembles analytiques : théorèmes de séparation et applications *Séminaire de Probabilités IX*, *université de Strasbourg*, (*Lecture Notes in Mathematics*, 465).

(Texte reçu le 18 décembre 1975).

Jean SAINT-RAYMOND,
Mathématiques, Tour 46,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.