BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD CAUCHON

Anneaux semi-premiers, noethériens, à identités polynômiales

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 99-111
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__99_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 99-111.

ANNEAUX SEMI-PREMIERS, NOETHÉRIENS, À IDENTITÉS POLYNÔMIALES.

par

GÉRARD CAUCHON
[Université de Paris-Sud, Orsay]

RÉSUMÉ. — Nous démontrons dans cet article que tout anneau semi-premier, à identité polynômiale, est noethérien à gauche et à droite à partir du moment où ses idéaux bilatères satisfont à la condition de chaîne ascendante finie. Ce résultat nous permet d'établir complètement une conjecture de Herstein, formulée en 1965, et déjà partiellement démontrée par Herstein et Small.

Introduction

Tous les anneaux que nous considérons sont unitaires. Rappelons qu'*un anneau A, de centre C, vérifie une identité polynômiale* s'il existe un polynôme non nul $P(X_1, \ldots, X_n)$ à n indéterminées ne commutant pas entre elles, à coefficients dans C et tel que

$$(\forall a_1 \in A) \ldots (\forall a_n \in A)(P(a_1, \ldots, a_n) = 0).$$

Nous dirons qu'*un anneau A est à identité polynômiale* si tout quotient non nul de A vérifie une identité polynômiale.

Rappelons également qu'un anneau A est premier (resp. semi-premier) si, étant donnés deux éléments a et b de A, l'hypothèse $a A b = 0$ (resp. $a A a = 0$) entraîne $a = 0$ ou $b = 0$ (resp. $a = 0$). Un idéal bilatère $\mathscr{P}$ de A est dit premier (resp. semi-premier) si l'anneau quotient $A/\mathscr{P}$ est premier (resp. semi-premier). L'ensemble des idéaux bilatères premiers de A s'appelle le spectre premier de A et se note Spep (A).

Ce travail est divisé en trois parties.

Dans la première partie, nous démontrons le théorème annoncé dans le résumé. Il fournit une réponse affirmative à un problème plus faible, posé par SMALL en ces termes : « Soit A un anneau premier, à identité polynômiale. On suppose que A est noethérien à gauche. A est-il alors noethérien à droite ?

Dans la seconde partie, nous nous intéressons au problème suivant, posé par HERSTEIN en 1965 [6] : « Soit A un anneau noethérien à gauche, de radical de Jacobson J. L'idéal $J^{\omega} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ est-il nilpotent ? » JATEGAONKAR a démontré dans [8] que la réponse à cette question est généralement négative. Par contre, nous montrons ici qu'elle est affirmative lorsque l'anneau A est à identité polynômiale. Ce résultat avait été approché par HERSTEIN et SMALL dans [7], où ils avaient établi, sous les mêmes hypothèses que nous que, si on pose

$$J_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n, \qquad J_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_1^n, \qquad \ldots, \qquad J_s = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J_{s-1}^n, \qquad \ldots,$$

il existe un entier m tel que $J_m = 0$.

Dans la troisième partie, nous donnons un exemple d'anneau premier, noethérien, à identité polynômiale, et qui fournit un contre-exemple à tous les problèmes suivants :

Problème 1. — Un anneau premier, noethérien, à identité polynômiale, est-il une algèbre finie sur son centre ? (Un autre contre-exemple à ce problème a déjà été fourni par SMALL.)

Problème 2 (il s'agit d'une généralisation du problème 1, en liaison avec les travaux de BLAIR [1]). — Un anneau premier, noethérien, à identité polynômiale, est-il entier sur son centre ?

Problème 3 (posé oralement par RENAULT). — Soit A un anneau premier à identité polynômiale. On sait, d'après FORMANEK [4], qu'il existe des éléments centraux $s \neq 0$ de A tels que $A[1/s]$ soit une algèbre finie sur son centre.

Dispose-t-on d'une certaine liberté dans le choix d'un tel s ? En particulier, étant donné un idéal premier $\mathscr{P}$ de A, peut-on choisir $s \in A \setminus \mathscr{P}$?

Problème 4. — Soit A un anneau premier, noethérien, à identité polynômiale, et soit D un sous-anneau commutatif maximal de A ; A est-il un D-module de type fini ?

Problème 5. — Soit A un anneau premier, noethérien à identité polynômiale. Les idéaux premiers de A sont-ils engendrés par des idéaux premiers du centre de A ? Étant donnés deux idéaux premiers $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ de A, avec $\mathscr{P}_1 \subsetneq \mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_2$ contient-il un élément central de A, non contenu dans $\mathscr{P}_1$?

1. Sur la conjecture de Small

Nous établissons, dans un premier temps, le résultat annoncé dans le résumé pour un anneau premier.

PROPOSITION 1.1. — *Soit A un anneau premier vérifiant une identité polynômiale. Si A est noethérien bilatère (c'est-à-dire si les idéaux bilatères de A satisfont à la condition de chaîne ascendante finie), il est aussi noethérien à gauche et à droite.*

Démonstration. — Il suffit, par exemple, de montrer que A est noethérien à gauche.

Soit C le centre de A, et soit $S = C \setminus \{ 0 \}$; S est un système multiplicatif d'éléments réguliers et centraux de A. On sait, compte tenu de [10] (theorem 2, corollary 1), et du théorème de Kaplansky [9], que l'anneau de fractions $Q = S^{-1} A$ est isomorphe à un anneau de matrices $M_n(D)$ (où D est un corps gauche), que le centre de Q est le corps commutatif $F = S^{-1} C$ (de sorte que F s'identifie naturellement au centre de D), et que Q est une F-algèbre de dimension finie.

Première partie. — Nous supposons que le corps D est commutatif. — Pour i et $j \in \{ 1, \ldots, n \}$, nous noterons e_{ij} la matrice de $M_n(D)$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui qui est situé sur la ligne i et la colonne j, et qui est égal à 1.

Puisque $M_n(D) = S^{-1} A$, il existe $s \in S$ tel que toutes les matrices se_{ij} appartiennent à A. Il est alors facile de vérifier que, pour tout $x = \sum_{i,j} d_{ij} e_{ij}$ appartenant à A, tous les éléments $s^2 d_{ij}$ appartiennent à C.

Si A n'était pas noethérien à gauche, il existerait une chaîne ascendante infinie d'idéaux à gauche de A, soit $J_1 \subsetneq J_2 \subsetneq \ldots \subsetneq J_k \subsetneq \ldots$

Considérons alors, pour tout entier $k > 1$, un élément

$$x_k = \textstyle\sum_{i,j} d_{ij}^k e_{ij} \quad \text{de} \quad J_k \setminus J_{k-1}.$$

A la suite (x_k) d'éléments de A ainsi construite, nous associons la suite

$$\omega_k = \textstyle\bigoplus_{ij} s^2 d_{ij}^k I_n \in M = A \oplus \ldots \oplus A \, (n^2 \text{ fois}).$$

(I_n désigne l'unité de $M_n(D)$).

A étant supposé noethérien bilatère, M est un A-bimodule noethérien. Soit, pour tout entier $l > 0$, N_l le sous-bimodule de M engendré par $\omega_1, \ldots, \omega_l$. Comme les composantes de chacun des ω_k sont des éléments centraux de A, N_l n'est autre que le A-module à gauche $A \omega_1 + \ldots + A \omega_l$.

Soit alors $m > 1$ un entier tel que $N_m = N_{m-1}$. Il existe des éléments $y_1, \ldots, y_{m-1}$ de A tels que $\omega_m = \sum_{k=1}^{m-1} y_k \omega_k$.

Ceci entraîne, après simplification par s^2, les formules suivantes dans $M_n(D)$:

$$(\forall i \in \{1, \ldots, n\}) \quad (\forall j \in \{1, \ldots, n\}) \quad (d_{ij}^m I_n = \textstyle\sum_{k=1}^{m-1} d_{ij}^k y_k).$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{m-1} y_k x_k &= \textstyle\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i,j} d_{ij}^k y_k e_{ij}\\ &= \textstyle\sum_{ij} (\sum_{k=1}^{m-1} d_{ij}^k y_k) e_{ij}\\ &= \textstyle\sum_{ij} d_{ij}^m e_{ij} = x_m.\end{aligned}$$

Donc $x_m \in J_{m-1}$. Ceci contredit le choix des x_k et, nécessairement, l'anneau A est noethérien à gauche.

Deuxième partie. — Nous ne supposons plus que le corps D est commutatif. — Nous allons nous ramener au cas particulier de la première partie en reprenant une technique utilisée avec succès par FORMANEK dans [4].

On sait (*voir* par exemple [2]), qu'il existe un sous-corps commutatif maximal K de D qui est une extension séparable, donc monogène, de F. Nous pouvons alors écrire $K = F(b)$, l'élément b de K pouvant être choisi entier sur C, ce que nous supposons désormais.

Si on pose $[K : F] = m$, les éléments $1, b, \ldots, b^{m-1}$ forment une base de K sur F, et l'algèbre $L = M_n(D) \otimes_F K$, considérée comme un $M_n(D)$-module à gauche, est libre de base $\{1 \otimes 1, 1 \otimes b, \ldots, 1 \otimes b^{m-1}\}$.

Posons $\tilde{A} = \{a_0 \otimes 1 + a_1 \otimes b + \ldots + a_{m-1} \otimes b^{m-1};\ a_i \in A\}$.

Puisque b a été choisi entier sur C, il est clair que $\tilde{A}$ est un sous-anneau de L. Comme $L \simeq M_{nm}(K)$ (*voir* [2]), $\tilde{A}$ est un anneau à identité polynômiale.

Il est, par ailleurs, facile de voir que le centre de $\tilde{A}$ est

$$\tilde{C} = \{c_0 \otimes 1 + c_1 \otimes b + \ldots + c_{m-1} \otimes b^{m-1};\ c_i \in C\} = 1 \otimes C[b].$$

$\tilde{C}$ est contenu dans le centre de L. Donc $\tilde{S} = \tilde{C} \setminus \{0\}$ est un système multiplicatif d'éléments réguliers de $\tilde{A}$, et on a clairement $\tilde{S}^{-1}\tilde{A} = L \simeq M_{nm}(K)$.

Il en résulte que l'anneau $\tilde{A}$ est premier.

Par ailleurs, $\tilde{A}$, considéré comme un A-bimodule, est isomorphe à la somme directe $A \oplus \ldots \oplus A$ (m fois) par

$$\sigma : \ A \oplus \ldots \oplus A \to \tilde{A},$$
$$a_0 \oplus \ldots \oplus a_{m-1} \to a_0 \otimes 1 + \ldots + a_{m-1} \otimes b^{m-1}.$$

Comme A est noethérien bilatère, $\tilde{A}$ est un A-bimodule noethérien. Comme tout idéal bilatère de $\tilde{A}$ est un sous-A-bimodule de $\tilde{A}$, nous voyons que l'anneau $\tilde{A}$ est noethérien bilatère.

L'anneau $\tilde{A}$ satisfait donc aux hypothèses de la première partie et, par suite, il est noethérien à gauche.

Posons, pour tout idéal à gauche J de A,

$$\tilde{J} = \{ a_0 \otimes 1 + \ldots + a_{m-1} \otimes b^{m-1} ;\ a_i \in J \}.$$

$\tilde{J}$ est un idéal à gauche de $\tilde{A}$, et l'application $J \mapsto \tilde{J}$ est strictement croissante.

Par suite, A est également noethérien à gauche, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Considérons un anneau A, premier, vérifiant une identité polynômiale, dont le centre C est noethérien.

Posons $S = C \setminus \{ 0 \}$, et supposons $S^{-1} A \simeq M_n(D)$, où D est un corps commutatif.

Reprenons alors la première partie de la démonstration précédente en considérant une chaîne ascendante infinie $J_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq J_k \subsetneqq \ldots$ de C-sous-modules de A. Poursuivons alors le raisonnement fait en considérant les ω_k comme des éléments de $N = C \oplus \ldots \oplus C$ (n^2 fois) qui est un C-module noethérien. On voit alors qu'il existe un entier $m > 0$ et des éléments y_i de C tels que $\omega_m = \sum_{k=1}^{m-1} y_k \omega_k$, ce qui nous conduit à une contradiction. Il en résulte que A est alors un C-module noethérien.

Dans le cas général où D n'est pas commutatif, si nous reprenons la deuxième partie de la démonstration de la proposition 1, nous voyons que $\tilde{C}$ est alors noethérien; ce qui entraîne que $\tilde{A}$ est un $\tilde{C}$-module noethérien. Il en résulte, par le même raisonnement que précédemment, que A est un C-module noethérien.

Nous retrouvons donc le résultat suivant, qui est un cas particulier important des théorèmes obtenus par FORMANEK dans [4] :

PROPOSITION 1.2. — *Soit A un anneau premier vérifiant une identité polynômiale. Si le centre C de A est noethérien, A est une C-algèbre finie et, par suite, A est noethérien des deux côtés.*

Rappelons un résultat classique sur les anneaux noethériens bilatères :

LEMME 1.3. — *Soit A un anneau noethérien bilatère. Il existe un nombre fini d'idéaux premiers de A, soient $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$, tels que $\mathcal{P}_1 . \mathcal{P}_2 . \ldots . \mathcal{P}_n = 0$.*

Démonstration. — Supposons ce résultat faux. Il existe un anneau A noethérien bilatère ne satisfaisant pas au lemme 1.3. Et, quitte à diviser A par un idéal bilatère $\mathcal{B}$ maximal tel que $A/\mathcal{B}$ ne satisfasse pas au lemme 1.3, on peut supposer que tout quotient propre de A satisfait au lemme 1.3.

A ne satisfaisant pas au lemme 1.3, 0 n'est pas premier. Il existe donc deux idéaux bilatères non nuls $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de A tels que $\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 = 0$.

Le lemme 1.3 appliqué aux anneaux $A/\mathscr{B}_i$ montre qu'il existe un nombre fini d'idéaux premiers de A, soient $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_k, \mathscr{P}_{k+1}, \ldots, \mathscr{P}_n$ avec $\mathscr{P}_1 \ldots \mathscr{P}_k \subset \mathscr{B}_1$ et $\mathscr{P}_{k+1} \ldots \mathscr{P}_n \subset \mathscr{B}_2$, donc $\mathscr{P}_1 \ldots \mathscr{P}_k \ldots \mathscr{P}_n = 0$. Nous aboutissons à une contradiction, ce qui achève la démonstration.

Nous pouvons maintenant démontrer le principal résultat de ce paragraphe :

THÉORÈME 1.4. — *Soit A un anneau semi-premier, à identité polynômiale. Si A est noethérien bilatère, il est aussi noethérien à gauche et à droite.*

Démonstration. — Compte tenu du lemme 1.3, il existe un nombre fini d'idéaux premiers de A, soient $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_n$, tels que $\mathscr{P}_1 \ldots \mathscr{P}_n = 0$. Par suite, tout idéal premier de A contient l'un des $\mathscr{P}_i$, et $\mathscr{P}_1 \cap \ldots \cap \mathscr{P}_n = 0$. Donc $A \subseteq \Sigma = (A/\mathscr{P}_1) \oplus \ldots \oplus (A/\mathscr{P}_n)$.

D'après la proposition 1.1, chacun des $A/\mathscr{P}_i$ est un A-module à gauche noethérien. Il en est donc de même pour Σ et, par suite, pour A. Donc A est noethérien à gauche. De la même façon, A est noethérien à droite, ce qui achève la démonstration.

On sait, cependant, qu'il existe des anneaux à identité polynômiale, qui sont noethériens bilatères sans être noethériens à gauche (ou à droite) (*voir*, par exemple, [6]). Nous allons voir que le théorème 1.3 se généralise de la façon suivante : Soit A un anneau à identité polynômiale, noethérien bilatère, de radical premier N (le radical premier d'un anneau A est, par définition, l'intersection de tous ses idéaux premiers). Une condition nécessaire et suffisante pour que A soit noethérien à gauche est que N/N^2 soit un A-module à gauche noethérien.

LEMME 1.5. — *Soit A un anneau, et soit $\mathscr{B}$ un idéal bilatère nilpotent de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est noethérien à gauche;*

(ii) *$A/\mathscr{B}^2$ est noethérien à gauche.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Supposons donc que $A/\mathscr{B}^2$ est noethérien à gauche.

Alors $A/\mathscr{B}^2$ est un A-module à gauche noethérien et le sous-module $\mathscr{B}/\mathscr{B}^2$ est de type fini. Soit $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n$ un système générateur de ce module ($b_i \in \mathscr{B}$).

Soit k un entier supérieur à 1, et soit E l'ensemble de tous les produits $b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_k}$ $(1 \leqslant i_\alpha \leqslant n)$. Posons $E = \{ a_1, \ldots, a_m \}$. Chaque a_j appartient à $\mathscr{B}^k$, et il est facile de vérifier que les $\bar{a}_j$ forment un système générateur du A-module à gauche $\mathscr{B}^k/\mathscr{B}^{k+1}$. D'autre part, l'annulateur $\mathfrak{A}$ de $\mathscr{B}^k/\mathscr{B}^{k+1}$

contient $\mathscr{B}^2$, et $A/\mathfrak{A}$ est noethérien à gauche, de sorte que $\mathscr{B}^k/\mathscr{B}^{k+1}$ est un A-module à gauche noethérien.

Comme $\mathscr{B}$ est nilpotent, A est noethérien à gauche, ce qui achève la démonstration.

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME 1.6. — *Soit A un anneau à identité polynômiale, noethérien bilatère, de radical premier N.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *A est noethérien à gauche (resp. à droite);*

(ii) *N/N^2 est un A-module à gauche (resp. à droite) noethérien.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que (ii) $\Rightarrow$ (i).

Par le lemme 1.3, N est nilpotent. Par le théorème 1.4, A/N est noethérien à gauche. Donc, d'après (ii), A/N^2 est noethérien à gauche. Il en résulte, compte tenu du lemme 1.5, que A est noethérien à gauche.

2. Sur la conjecture de Herstein

Le théorème suivant précise les résultats de HERSTEIN et SMALL sur l'intersection des puissances du radical de Jacobson d'un anneau à identité polynômiale, noethérien bilatère [7] :

THÉORÈME 2.1. — *Soit A un anneau à identité polynômiale, noethérien bilatère, de radical de Jacobson J.*

Alors

(*a*) *$\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ est un idéal nilpotent de A;*

(*b*) *Si A est semi-premier, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n = 0$.*

Démonstration. — (*b*) C'est une conséquence immédiate du théorème 1.4 et de [3], théorème 5.

(*a*) D'après le (*b*), $J^\omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ est contenu dans l'intersection N de tous les idéaux premiers de A. Comme A est noethérien bilatère, N est nilpotent, et J^ω est nilpotent.

Nous en déduisons, en particulier, le corollaire suivant qui résout affirmativement, dans le cas des anneaux à identités polynômiales, le problème de Herstein évoqué dans l'introduction.

COROLLAIRE 2.2. — *Soit A un anneau à identité polynômiale, de radical de Jacobson J.*

Si A est noethérien à gauche, l'idéal $J^\omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n$ est nilpotent.

Remarque 1. — On sait que le corollaire 2.2 (et, par suite, le théorème 2.1) est faux si l'anneau A n'est pas supposé à identité polynômiale (*voir* [8]).

Remarque 2. — HERSTEIN a donné dans [6] un exemple d'anneau A, à identité polynômiale, noethérien à gauche et pas à droite, de radical de Jacobson J, avec $J^{\omega} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} J^n \neq 0$. Ceci montre qu'on ne peut pas améliorer les conclusions du théorème 2.1, ni du corollaire 2.2.

3. Étude d'un exemple

Soit $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels. Soit $E = \mathbf{R}[X, Y]$ l'anneau des polynômes à deux indéterminées et à coefficients réels, et soit F le localisé de E par rapport à l'idéal premier $P = EX$.

F est donc l'anneau des fractions rationnelles réelles

$$f(X, Y) = P(X, Y)/Q(X, Y)$$

telles que $Q(0, Y) \neq 0$; de sorte que, pour tout $f(X, Y) \in F$, la fraction rationnelle $f(0, Y) \in \mathbf{R}(Y)$ existe.

Soit A l'ensemble des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} f + Xs & \dfrac{\partial f}{\partial Y} + Xt \\ Xu & f + Xv \end{pmatrix} \qquad (f, s, t, u, v \in F).$$

Il est facile de voir que A est un sous-anneau de l'anneau $M_2(F)$ des matrices 2×2 à coefficients dans F, de sorte que *A est un anneau à identité polynômiale.*

De plus, compte tenu de la présence dans A des matrices

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

l'anneau A est premier.

D'autre part, l'ensemble D des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial Y} \\ 0 & f \end{pmatrix} \quad (f \in F)$$

est un sous-anneau commutatif de A, isomorphe à F.

Il est facile de voir, en posant $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A$, que

$$A = D\omega_1 + D\omega_2 + D\omega_3 + D\omega_4 + DI = \omega_1 D + \omega_2 D + \omega_3 D + \omega_4 D + ID,$$

de sorte que A, considéré comme un D-module à gauche (resp. à droite), est noethérien. Il en résulte que *A est noethérien à gauche* (resp. à droite)

Nous pouvons donc conclure :

PROPOSITION 3.1. — *L'anneau A, construit ci-dessus, est un anneau premier, à identité polynômiale, et noethérien des deux côtés.*

Bien qu'on sache que les anneaux non commutatifs à identités polynômiales forment une très vaste classe d'anneaux, les propriétés de ces anneaux restent encore très mystérieuses car il n'existe quasiment pas d'exemple non trivial d'anneau à identité polynômiale, suffisamment simple pour qu'on puisse calculer facilement et tester les conjectures.

Nous allons voir que l'anneau A construit précédemment se prête bien aux calculs, et qu'il n'est pas trivial puisqu'il fournit un contre-exemple à un certain nombre de problèmes qui n'étaient pas encore élucidés.

(*a*) *Calcul du centre de A.* — Soit

$$M = \begin{pmatrix} f + Xs & \dfrac{\partial f}{\partial Y} + Xt \\ Xu & f + Xv \end{pmatrix} \in A.$$

On voit facilement, compte tenu de la présence des matrices $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ dans A, que M est un élément central de A si, et seulement si, M est scalaire, soit si, et seulement si,

$$\begin{cases} (1) & u = 0, \\ (2) & s = v, \\ (3) & \dfrac{\partial f}{\partial Y} = -Xt. \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow (\partial f/\partial Y)(0, Y) = 0 \Rightarrow f(0, Y) \in \mathbf{R}$ et $M = gI$ avec $g = f + Xs \in F$ et $g(0, Y) = f(0, Y) \in \mathbf{R}$.

Inversement, considérons une matrice scalaire $M = gI$, avec $g \in F$ et $g(0, Y) \in \mathbf{R}$.

Alors $(\partial g/\partial Y)(0, Y) = 0$, donc $(\partial g/\partial Y)(X, Y) = Xt$, avec $t \in F$ et

$$M = \begin{pmatrix} g & \dfrac{\partial g}{\partial Y} - Xt \\ 0 & g \end{pmatrix} \in A.$$

Donc M appartient au centre de A, et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2. — *Le centre C de A est l'ensemble des matrices scalaires $M = f I$, où f décrit le sous-anneau Z des éléments de F tels que $f(0, Y) \in \mathbf{R}$.*

Nous en déduisons ce nouveau résultat.

PROPOSITION 3.3. — *L'anneau A n'est pas entier sur son centre.*

Démonstration. — Il suffit, par exemple, d'établir que $\omega = \begin{pmatrix} Y & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ ne vérifie aucune relation de la forme

$$\omega^n = f_{n-1}\,\omega^{n-1} + f_{n-2}\,\omega^{n-2} + \ldots + f_0 I \qquad (f_i \in Z,\ n > 0).$$

Or une telle relation exige, dans F :

$$Y^n = \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f_i(X, Y)\, Y^i \quad (\text{si on pose } Y^0 = 1),$$

soit $Y^n = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(0, Y)\, Y^i$, ce qui est impossible puisque chaque $f_i(0, Y)$ appartient à $\mathbf{R}$.

COROLLAIRE 3.4. — *L'anneau A n'est pas de type fini sur son centre C.*

Démonstration. — Supposons que A soit de type fini sur C. Alors C est noethérien d'après [5], donc A est un C-module noethérien et, pour tout $a \in A$, il existe un entier $n > 0$ tel que $a^n \in C\,a^{n-1} + C\,a^{n-2} + \ldots + C\,a + C$. Donc A serait entier sur C, ce qui contredit la proposition 3.3.

(*b*) *Calcul du spectre premier de A.* — Soit $u = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} \in C$.

LEMME 3.5. — $A[1/u] = M_2(R(X, Y))$.

Démonstration. — Soit $\omega = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(R(X, Y))$. On peut écrire $a = a_1/X^\alpha$, $b = b_1/X^\beta$, $c = c_1/X^\gamma$, $d = d_1/X^\delta$, avec $a_1, b_1, c_1, d_1 \in F$, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{N}$.

Alors

$$M = \begin{pmatrix} X^{\beta+\gamma+\delta+1} a_1 & X^{\alpha+\gamma+\delta+1} b_1 \\ X^{\alpha+\beta+\delta+1} c_1 & X^{\alpha+\beta+\gamma+1} d_1 \end{pmatrix} \in A$$

et

$$\omega = (1/u^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1})\, M \in A[1/u],$$

d'où le résultat.

Comme $M_2(\mathbf{R}(X, Y))$ est un anneau artinien simple, il en résulte que tout idéal bilatère non nul de A contient une puissance de u. En particulier, tout idéal premier de A contient l'idéal bilatère $I = A\,u$.

Considérons maintenant l'application $\varphi : A \to M_2(\mathbf{R}(Y))$ qui, à la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de A, associe

$$\varphi(M) = \begin{pmatrix} a(0, Y) & b(0, Y) \\ c(0, Y) & d(0, Y) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{R}(Y)).$$

φ est un homomorphisme d'anneaux, et $\varphi(A)$ est l'ensemble de toutes les matrices $\begin{pmatrix} f & f' \\ 0 & f \end{pmatrix}$ $(f \in \mathbf{R}(Y))$. Donc $\varphi(A) \simeq \mathbf{R}(Y)$.

Donc, si nous posons $J = \operatorname{Ker} \varphi = XM_2(F)$, nous avons $A/J \simeq \mathbf{R}(Y)$ ce qui prouve que J est un idéal premier de A (et aussi que J est maximal en tant qu'idéal à gauche et qu'idéal à droite de A).

D'autre part, $J^2 = X^2 M_2(F) = uJ \subset uA = I$.

Donc J^2 est contenu dans tout idéal premier non nul de A. Donc J est le seul idéal premier non nul de A.

Soit M un idéal à gauche maximal de A, et soit $\mathcal{P}$ le plus grand idéal bilatère contenu dans M; $\mathcal{P}$ est primitif à gauche, et l'anneau $A/\mathcal{P}$ est simple. Donc $\mathcal{P} = J$ et $M = J$. On arrive à la même conclusion si M est un idéal à droite maximal. Nous pouvons donc conclure :

PROPOSITION 3.6. — *L'anneau A est local au sens suivant :*

Il possède un plus grand idéal bilatère $J = XM_2(F)$ qui est aussi son plus grand idéal à gauche et son plus grand idéal à droite.

De plus, $\operatorname{Spep}(A) = \{0, J\}$.

Comme J est maximal en tant qu'idéal bilatère, tout élément $s \in C \setminus J$ est inversible et satisfait à $A[1/s] = A$. Il en résulte, compte tenu de la proposition 3.3 et du corollaire 3.4, la proposition suivante.

PROPOSITION 3.7. — 1° *Il n'existe aucun élément s de $C \setminus J$ tel que $A[1/s]$ soit une algèbre finie sur son centre.*

2° *Il n'existe aucun élément s de $C \setminus J$ tel que $A[1/s]$ soit entier sur son centre.*

(*c*) *Sous-anneaux commutatifs maximaux de A.*

$$B = \left\{ M = \begin{pmatrix} f & 0 \\ Xu & f \end{pmatrix} ; f \in Z,\ u \in F \right\}$$

est un sous-anneau commutatif maximal de A. Cet anneau n'est pas noethérien car, si on pose $a_n = \begin{pmatrix} XY^n & 0 \\ 0 & XY^n \end{pmatrix}$, il n'existe aucun entier $N > 0$

tel que a_N soit combinaison linéaire à coefficients dans B des a_i $(0 \leqslant i \leqslant N-1)$.

Par suite, d'après [5], A n'est pas un B-module à gauche, ni à droite, de type fini.

Remarque. — Si nous avons vu qu'un anneau A premier, noethérien, à identité polynômiale, n'est pas forcément un module de type fini sur son centre, nous ne savons pas s'il existe toujours un sous-anneau commutatif D de A sur lequel A est de type fini (à gauche ou à droite). Par contre, nous voyons d'après notre étude que, si cette propriété est vraie, elle n'a certainement pas lieu avec n'importe quel sous-anneau commutatif maximal D de A.

(*d*) *Relation entre les idéaux premiers de A et ceux de son centre C.* — On établit comme dans le (*b*) que le spectre premier de C est réduit aux deux idéaux 0 et $\Omega = XF$, et que C est un anneau local.

On a $\Omega = J \cap C$.

Cependant $A\,\Omega \subsetneq J$.

En effet, l'élément $X\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à J.

S'il appartenait à $A\,\Omega$, on pourrait écrire, après simplification par X :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} g_i \begin{pmatrix} f_i + X s_i & \dfrac{\partial f_i}{\partial Y} + X t_i \\ X u_i & f_i + X v_i \end{pmatrix}$$

$(g_i, f_i, s_i, t_i, u_i, v_i \in F)$.

On aboutit alors à une contradiction en faisant $X = 0$.

Remarque. — Considérons l'anneau A', construit comme A, mais obtenu en remplaçant F par $G = \mathbf{R}[X, Y]$. On vérifie, comme précédemment, que A' est premier, à identité polynômiale, noethérien, et que son centre C' est l'ensemble des matrices $M = g\,I$, où g décrit le sous-anneau Z' des éléments de G tels que $g(0, Y) \in \mathbf{R}$ $(Z' = \mathbf{R} + X\,\mathbf{R}[X, Y])$.

Comme précédemment, $\mathscr{P}_1 = XM_2(G)$ est un idéal premier de A' et $\mathscr{P}_1 \cap C' = X\,\mathbf{R}[X, Y]$ est un idéal maximal de C' (nous identifions C' et Z').

D'autre part, $A'/\mathscr{P}_1 \simeq \mathbf{R}[Y]$, de sorte qu'il existe dans A' un idéal premier $\mathscr{P}_2 \supsetneq \mathscr{P}_1$ (par exemple, on peut prendre pour $\mathscr{P}_2$ l'ensemble des matrices

$$\left(\begin{pmatrix} f+Xs & \dfrac{\partial f}{\partial Y}+Xt \\ Xu & f+Xv \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad s, t, u, v \in G \quad \text{et} \quad f \in Y\mathbf{R}[Y]\right).$$

Cependant, on a $\mathscr{P}_2 \cap C' = \mathscr{P}_1 \cap C'$ puisque $\mathscr{P}_1 \cap C'$ est un idéal maximal de C'.

Ainsi nous avons trouvé un exemple d'anneau premier, à identité polynômiale, noethérien, A', de centre C', tel qu'il existe deux idéaux premiers de A' $\mathscr{P}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathscr{P}_2$ avec $\mathscr{P}_1 \cap C' = \mathscr{P}_2 \cap C'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Blair (W. D). — Right noetherian rings integral over their centers, *J. of Algebra*, t. 27, 1973, p. 187-198.

[2] Blanchard (A.). — *Les corps non commutatifs.* — Paris, Presses Universitaires de France, 1972 (*Collection SUP*, « *Le mathématicien* », 9).

[3] Cauchon (G.). — Sur l'intersection des puissances du radical d'un T-anneau noethérien, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 279, 1974, Série A, p. 91-93.

[4] Formanek (E.). — Noetherian P. I. rings, *Communications in Algebra*, 1 (1), 1974, p. 79-86.

[5] Formanek (E.). — Faithful noetherian modules, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 41, 1973, p. 381-383.

[6] Herstein (I. N.). — A counter example in noetherian rings, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 54, 1965, p. 1036-1037.

[7] Herstein (I. N.) and Small (L. W.). — The intersection of powers of the radical in noetherian P. I. rings, *Israel J. Math.*, t. 16, 1973, p. 176-180.

[8] Jategaonkar (A. V.). — Left principal ideal domains, *J. of Algebra*, t. 8, 1968, p. 148-155.

[9] Kaplansky (I.). — Rings with polynomial identity, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 54, 1948, p. 575-580.

[10] Rowen (L.). — Some results on the center of a ring with polynomial identity, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 79, 1973, p. 219-223.

(Texte reçu le 12 juin 1975.)

Gérard Cauchon,
Mathématiques, Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
Campus universitaire,
91405 Orsay.