BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN COQUET
TETURO KAMAE
MICHEL MENDÈS FRANCE

Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 369-384
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__369_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 369-384.

SUR LA MESURE SPECTRALE DE CERTAINES SUITES ARITHMÉTIQUES

PAR

JEAN COQUET
[Valenciennes]

TETURO KAMAE
[Osaka]

et MICHEL MENDÈS FRANCE
[Talence]

RÉSUMÉ. — Soit S la famille des suites complexes $\alpha = (\alpha(n))$ telles que, pour tout entier m, la limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \overline{\alpha(n)}\, \alpha(n+m) = \gamma(m)$$

existe. D'après le théorème de Bochner-Herglotz, il existe une mesure Λ, définie sur le tore, telle que

$$\gamma(m) = \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \exp 2\, i\, \pi\, mx\, d\Lambda(x).$$

Dans cet article, on étudie les rapports entre la nature de la mesure Λ et les propriétés arithmétiques de la suite α.

ABSTRACT. — Let S be the family of complex sequences $\alpha = (\alpha(n))$ such that for every integer m, the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \overline{\alpha(n)}\, \alpha(n+m) = \gamma(m)$$

exists. According to the Bochner-Herglotz representation theorem, there exists a bounded positive measure Λ such that

$$\gamma(m) = \int_{\mathbf{R}/\mathbf{Z}} \exp 2\, i\, \pi\, mx\, d\Lambda(x).$$

The object of this article is to study the relationship between the behavior of the sequence α and the properties of the measure Λ . Specific examples are discussed in detail which involve number theoritical methods.

1. Introduction

Dans [19], WIENER introduit l'espace S des suites infinies complexes $\alpha = (\alpha(n))$, $n \geqslant 0$, telles que la limite

$$\gamma_\alpha(m) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} \bar{\alpha}(n)\,\alpha(n+m),$$

existe pour tout $m \geqslant 0$ entier. La suite γ_α, appelée corrélation de α, se prolonge aux entiers négatifs par $\gamma_\alpha(-m) = \bar{\gamma}_\alpha(m)$. On sait qu'alors γ_α est une suite définie positive qui, d'après le théorème de Bochner-Herglotz admet la représentation intégrale

$$\gamma_\alpha(m) = \int_T e(mx)\, d\Lambda_\alpha(x), \qquad m \in \mathbf{Z},$$

où $e(x) = \exp 2\,i\,\pi\,x$, où T désigne le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ et où Λ_α est une fonction croissante bornée.

Nous employerons la même notation pour désigner l'application Λ_α et la mesure induite par l'application. Ainsi, pour tout sous-ensemble borélien $E \subset T$,

$$\Lambda_\alpha(E) = \int_E d\Lambda_\alpha(x),$$

En particulier, si $t \in T$,

$$\Lambda_\alpha(\{t\}) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} d\Lambda_\alpha(x).$$

La mesure Λ_α, appelée *mesure spectrale* de la suite α, est déterminée de façon unique par la donnée de $\alpha \in S$.

D'une façon générale, si Λ est une mesure bornée sur T, on notera sa transformée de Fourier (au point $m \in \mathbf{Z}$) par

$$\hat{\Lambda}(m) = \int_T e(mx)\, d\Lambda(x).$$

Ainsi $\gamma_\alpha = \hat{\Lambda}_\alpha$.

Comme toute mesure, Λ_α est somme de trois termes : une mesure atomique Λ_α^a, une mesure absolument continue Λ_α^{ac},

$$\Lambda_\alpha^{ac}(E) = \int_E f(x)\, dx, \qquad f \in L_1(T),$$

et une mesure singulière Λ_α^s. La nature de la mesure spectrale Λ_α fournit des indications sur le comportement de la suite α. Ainsi, α est presque périodique (au sens de BERTRANDIAS [2]) si, et seulement si, la composante diffuse $\Lambda_\alpha^{ac}+\Lambda_\alpha^s$ est nulle. Par ailleurs, α est pseudo-aléatoire ([1], [2]) si, et seulement si, la composante atomique Λ_α^a est nulle.

L'objet de cet article est l'étude des propriétés spectrales de certaines suites arithmétiques. Nous commencerons par établir quelques résultats généraux, puis nous les appliquerons aux suites **q**-multiplicatives pour montrer qu'elles sont ou bien presque périodiques, ou bien pseudo-aléatoires à mesure spectrale singulière. Comme corollaire, nous obtiendrons, entre autres, une nouvelle caractérisation des nombres de Pisot-Vijayaraghavan.

2. Construction de la mesure spectrale

Les résultats que nous établissons dans ce paragraphe et dans le suivant sont plus ou moins connus. Nous pensons néanmoins utile de les exposer ici, car il n'est pas toujours facile d'en trouver des traces précises dans la littérature mathématique.

Soit $\alpha \in S$. Pour chaque $n \in \mathbf{N}$ et chaque $r \in]0, 1[$, on définit les deux mesures Λ_α^n et Λ_α^r comme suit. Pour tout borélien $E \subset T$,

$$\Lambda_\alpha^n(E) = \int_E \frac{1}{n} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \alpha(j)\, e(-jx) \right|^2 dx,$$

$$\Lambda_\alpha^r(E) = \int_E 2(1-r) \left| F_\alpha(re(-x)) \right|^2 dx,$$

où F_α est la fonction génératrice associée à α :

$$F_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)\, z^n, \qquad |z| < 1.$$

THÉORÈME 1. — *Soit $\alpha \in S$. La mesure Λ_α^n (resp. Λ_α^r) tend faiblement vers Λ_α quand n tend vers l'infini (resp. r tend vers 1, $r < 1$).*

Démonstration. — L'ensemble des caractères du tore étant une base de $C(T)$ (famille des applications continues $T \to \mathbf{C}$), il suffit d'établir que $\hat{\Lambda}_\alpha^n$ (resp. $\hat{\Lambda}_\alpha^r$) tend simplement vers $\gamma_\alpha = \hat{\Lambda}_\alpha$. Or

$$\hat{\Lambda}_\alpha^n(m) = \int_T e(mx) \frac{1}{n} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \alpha(j)\, e(-jx) \right|^2 dx$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=\sup\{0,\,-m\}}^{\inf\{n-1,\,n-1-m\}} \overline{\alpha}(k)\, \alpha(k+m),$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\Lambda}_\alpha^n(m) = \gamma_\alpha(m).$$

Par ailleurs,

$$\hat{\Lambda}_\alpha^r(m) = 2(1-r)\int_T e(mx)\,|\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\alpha(j)\,r^j\,e(-jx)|^2\,dx$$
$$= 2(1-r)\textstyle\sum_{j=0}^{\infty}\alpha(j+m)\,\bar{\alpha}(j)\,r^{2j+m}.$$

Un théorème abélien classique permet alors de conclure

$$\lim_{r\uparrow 1} \hat{\Lambda}_\alpha^r(m) = \gamma_\alpha(m). \quad \blacksquare$$

3. La notion d'affinité

Soit $\mathcal{M}(T)$ la famille des mesures positives bornées sur T. Soient $P \in \mathcal{M}(T)$ et $Q \in \mathcal{M}(T)$. Désignons par $\nu \in \mathcal{M}(T)$ une mesure par rapport à laquelle P et Q sont absolument continues; par exemple $\nu = P+Q$ (notation : $P \ll \nu$, $Q \ll \nu$). L'affinité $\rho(P, Q)$ est alors définie par [14] :

$$\rho(P, Q) = \int_T \left(\frac{dP}{d\nu}\right)^{1/2}\left(\frac{dQ}{d\nu}\right)^{1/2} d\nu.$$

Il est clair que $\rho(P, Q)$ ne dépend pas du choix de ν.

THÉORÈME 2. — *Soient (P_n) et (Q_n) deux suites de mesures positives bornées sur T qui tendent faiblement vers P et Q respectivement ($P, Q \in \mathcal{M}(T)$). Alors :*

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(P_n, Q_n) \leqslant \rho(P, Q).$$

Démonstration. — Soit $\nu \in \mathcal{M}(T)$ tel que $P \ll \nu$, $Q \ll \nu$, $P_n \ll \nu$, $Q_n \ll \nu$ pour $n \in \mathbf{N}$. Soit $\varepsilon > 0$; on définit les ensembles

$$\Omega = \left\{ x \in T;\ \frac{dP}{d\nu}(x) = 0 \right\},$$

$$U_j = \left\{ x \in T\setminus\Omega;\ (1+\varepsilon)^j \leqslant \frac{(dQ/d\nu)(x)}{(dP/d\nu)(x)} < (1+\varepsilon)^{j+1} \right\}, \qquad j \in \mathbf{Z}.$$

La série $\sum_j P(U_j)$ étant convergente, le reste $r(n) = \sum_{|j|\geqslant n} P(U_j)$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

Soit N un entier qu'on choisira ultérieurement. On considère les ensembles

$$V_0 = \Omega \cup \textstyle\bigcup_{|j|\geqslant N} U_j,$$

$$V_1 = \left\{ x \in T\setminus\Omega;\ \frac{dQ}{d\nu}(x) = 0 \right\}$$

et

$$V_j = U_{j-1-N}, \qquad j = 2, 3, \ldots, 2N.$$

La famille $\{V_0, V_1, \ldots, V_{2N}\}$ est une partition de T, et $P(V_0) = r(N)$.

On choisit N de sorte que $P^{1/2}(V_0)\, Q^{1/2}(V_0) < \varepsilon$. On observera que $P^{1/2}(V_1)\, Q^{1/2}(V_1) = 0$.

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}
(1) \qquad \rho(P, Q) &\geqslant \textstyle\sum_{j=2}^{2N} \displaystyle\int_{V_j} \left(\frac{dP}{d\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{dQ}{d\nu}\right)^{1/2} d\nu \\
&\geqslant \textstyle\sum_{j=2}^{2N} (1+\varepsilon)^{(j-1-N)/2}\, P(V_j) \\
&\geqslant (1+\varepsilon)^{-1/2} \textstyle\sum_{j=2}^{2N} P^{1/2}(V_j)\, Q^{1/2}(V_j) \\
&\geqslant (1+\varepsilon)^{-1/2} \textstyle\sum_{j=0}^{2N} P^{1/2}(V_j)\, Q^{1/2}(V_j) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Soit maintenant la famille d'applications continues non négatives $f_j : T \to \mathbf{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2N)$ vérifiant :

(i) $\sum_{j=0}^{2N} f_j = 1$,

(ii) $\displaystyle\int_T f_j\, dP \leqslant (1+\varepsilon)^{1/2}\, P(V_j)$,

$\displaystyle\int_T f_j\, dQ \leqslant (1+\varepsilon)^{1/2} Q(V_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, 2N.$

D'après (1),

$$\begin{aligned}
\rho(P, Q) &= (1+\varepsilon)^{-1} \textstyle\sum_{j=0}^{2N} \left(\displaystyle\int_T f_j\, dP\right)^{1/2} \left(\displaystyle\int_T f_j\, dQ\right)^{1/2} - \varepsilon \\
&= (1+\varepsilon)^{-1} \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{j=0}^{2N} \left(\displaystyle\int_T f_j\, dP_n\right)^{1/2} \left(\displaystyle\int_T f_j\, dQ_n\right)^{1/2} - \varepsilon \\
&\geqslant (1+\varepsilon)^{-1} \limsup_{n\to\infty} \textstyle\sum_{j=0}^{2N} \displaystyle\int_T f_j \left(\frac{dP_n}{d\nu}\right)^{1/2} \left(\frac{dQ_n}{d\nu}\right)^{1/2} d\nu - \varepsilon \\
&= (1+\varepsilon)^{-1} \limsup_{n\to\infty} \rho(P_n, Q_n) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Le choix de $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, le théorème est établi. ∎

COROLLAIRE 1. — *Soient* $\alpha \in S$ *et* $\beta \in S$. *Alors,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \textstyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha(j)\, \bar{\beta}(j) \right| \leqslant \rho(\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta).$$

Démonstration. — D'après le théorème 2,

$$\begin{aligned}\rho(\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta) &\geqslant \limsup_{n\to\infty} \rho(\Lambda^n_\alpha, \Lambda^n_\beta)\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int_T \left|\sum_{j=0}^{n-1} \alpha(j)\, e(-jx)\right| . \left|\sum_{k=0}^{n-1} \bar\beta(k)\, e(kx)\right| dx\\ &\geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\int_T \sum_{j,k=0}^{n-1} \alpha(j)\, \bar\beta(k)\, e((k-j)x)\, dx\right|\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} \alpha(j)\,\bar\beta(j)\right|. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

On choisit en particulier $\beta(j) = e(jx)$. La mesure spectrale Λ_β est alors la mesure de Dirac δ_x concentrée en x comme on s'en convaincra aisément. On retrouve ainsi un résultat de BERTRANDIAS ([3], p. 25).

COROLLAIRE 2. — *Soit $\alpha \in S$. Alors, pour tout $x \in T$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1} \alpha(j)\, e(-jx)\right| \leqslant [\Lambda_\alpha(\{x\})]^{1/2}.$$

Soit $\sigma = (\sigma(n))$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. A σ on associe sa fonction caractéristique χ_σ :

$$\chi_\sigma(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in \sigma,\\ 0 & \text{si } n \notin \sigma\end{cases}$$

et sa densité inférieure

$$d_*(\sigma) = \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\sigma(n)}.$$

Soit $B(\sigma)$ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}$ tels que $x\sigma = (x\sigma(n))$ soit équirépartie modulo 1. On pose $B^c(\sigma) = \mathbf{R}\setminus B(\sigma)$. D'après un résultat de SALEM [16] et WALLIN [17], si $d_*(\sigma) > 0$, alors la dimension de Hausdorff de $B^c(\sigma)$ est nulle. Il est intéressant de comparer ce résultat avec le corollaire suivant (*voir* aussi [10]).

COROLLAIRE 3. — *Soit σ une suite d'entiers positifs strictement croissante. Si $d_*(\sigma) > 0$ et si $\chi_\sigma \in S$, alors $B^c(\sigma)$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. — D'après le critère d'équirépartition de Weyl, il suffit de démontrer que, pour tout $h \in \mathbf{Z}^*$, l'ensemble

$$A(h, \sigma) = \left\{ x \in \mathbf{R};\ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} e(-hx\sigma(j))\right| > 0\right\}$$

est au plus dénombrable. Or,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n} e(-hx\sigma(j))\right|$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{\sigma(n)}\chi_\sigma(j)\,e(-hxj)\right|$$

$$=\limsup_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{n}\,\frac{1}{\sigma(n)}\left|\sum_{j=1}^{\sigma(n)}\chi_\sigma(j)\,e(-hxj)\right|$$

$$\leqslant (d_*(\sigma))^{-1}\,[\Lambda_{\chi_\sigma}(\{hx\})]^{1/2}.$$

Comme l'ensemble des sauts d'une fonction croissante bornée est au plus dénombrable, on en déduit card $A(h, \sigma) \leqslant \aleph_0$. ■

4. Les suites q-multiplicatives

Soit $\mathbf{q} = \{ q_1, q_2, \ldots \}$ une suite infinie d'entiers supérieurs ou égaux à 2. On pose $p_0 = 1$ et $p_\nu = q_1 q_2 \ldots q_\nu$ pour $\nu \geqslant 1$ entier. Une suite complexe ζ est dite $\mathbf{q}$-multiplicative si, pour tous entiers a, b, ν, $a \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$, $0 \leqslant b < p_\nu$,

$$\zeta(ap_\nu+b)=\zeta(ap_\nu)\zeta(b) \qquad \text{et} \qquad \zeta(0)=1.$$

Cette famille de suites, introduite par Coquet [5], généralise la classe des suites de Gel'fond [9] pour lesquelles $\mathbf{q} = \{ q_1, q_1, \ldots \}$ est une suite constante. Dans ce cas, on parlera de suites q_1-multiplicatives.

On sait que tout entier $n \geqslant 0$ admet la représentation $\mathbf{q}$-adique suivante :

$$n=\sum_{k=0}^{\infty} e_k(n)\,p_k,$$

où $e_k(n) \in \{ 0, 1, \ldots, q_{k+1}-1 \}$.

La somme est finie, car $e_k(n)$ est nul sitôt que $p_k > n$. On considérera la k-ième « décimale » $\mathbf{q}$-adique e_k comme une application

$$e_k:\ \mathbf{N}\to G_k=\{0, 1, \ldots, q_{k+1}-1\},$$
$$n\mapsto e_k(n).$$

Soit maintenant $\varphi = \{ \varphi_0, \varphi_1, \ldots \}$ une famille infinie d'applications

$$\varphi_k:\ G_k\to\mathbf{C}$$

telles que $\varphi_k(0) = 1$ pour $k \in \mathbf{N}$. On vérifie alors que $\prod_{j=0}^{\infty} \varphi_j \circ e_j$ est une suite $\mathbf{q}$-multiplicative. Réciproquement, toute suite $\mathbf{q}$-multiplicative ζ

admet une représentation du type précédent : il suffit de choisir

$$\varphi_k(r) = \zeta(rp_k), \qquad k \in \mathbf{N}, \quad r \in G_k.$$

Les résultats que nous établissons ici prolongent les travaux de BÉSINEAU, COQUET, KAKUTANI, MAHLER, MENDÈS FRANCE ([4], [6], [8], [12], [13] et [15]).

Soit τ l'opérateur de translation défini sur l'espace des suites infinies : $\tau\,\mathbf{q} = \{q_2, q_3, \ldots\}$, et plus généralement,

$$\tau^m \mathbf{q} = \{q_{1+m}, q_{2+m}, \ldots\}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

On remarquera que si ζ est une suite $\mathbf{q}$-multiplicative, alors la suite ζ_m,

$$\zeta_m(n) = \zeta(np_m),$$

est $(\tau^m\,\mathbf{q})$-multiplicative.

THÉORÈME 3. — *Toute suite* $\mathbf{q}$-*multiplicative* ζ *de module* 1 *appartient à l'espace S de Wiener. La corrélation* γ_m *de* ζ_m *vérifie les relations de récurrence suivantes :*

$$\gamma_m(q_{m+1}\,n+a) = A_m(a)\,\gamma_{m+1}(n) + B_m(a)\,\gamma_{m+1}(n+1)$$

pour $m = 0, 1, \ldots, n = 0, 1, \ldots, a \in G_m$. *Les coefficients* $A_m(a)$ *et* $B_m(a)$ *sont donnés par*

$$A_m(a) = \frac{1}{q_{m+1}} \sum_{b=0}^{q_{m+1}-a-1} \zeta_m(a+b)\,\bar{\zeta}_m(b),$$

$$B_m(a) = \frac{1}{q_{m+1}} \sum_{b=q_{m+1}-a}^{q_{m+1}-1} \zeta_m(a+b-q_{m+1})\,\bar{\zeta}_m(b).$$

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce résultat qui généralise des résultats de BÉSINEAU [4], COQUET [6] et MENDÈS FRANCE [15]. Signalons seulement que leur méthode s'étend au cas précédent.

L'énoncé suivant apporte des précisions sur la mesure spectrale Λ_ζ de la suite ζ.

THÉORÈME 4. — *Soit* ζ *une suite* $\mathbf{q}$-*multiplicative de module* 1. *La mesure spectrale* Λ_ζ *vérifie*

$$[\Lambda_\zeta(\{x\})]^{1/2} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \zeta(j)\,e(-jx) \right|$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q_{j+1}} \left| \sum_{k=0}^{q_{j+1}-1} \varphi_j(k)\,e(-kxp_j) \right|,$$

où $\varphi_j(k) = \zeta(k p_j)$, $j \in \mathbf{N}$, $k \in G_j$.

Démonstration. — Soit ζ une suite $\mathbf{q}$-multiplicative de module 1 :

$$\zeta = \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_j \circ e_j.$$

Soit $\tau^m \mathbf{q} = \{ q_{m+1}, q_{m+2}, q_{m+3}, \ldots \}$. Les « décimales » $(\tau^m \mathbf{q})$-adiques seront notées $\{ e_0^m, e_1^m, e_2^m, \ldots \}$. A la suite ζ sont attachées les suites « translatées »

$$\zeta_m = \prod_{j=0}^{\infty} \varphi_{j+m} \circ e_j^m, \qquad m \in \mathbf{N}.$$

Ainsi, en particulier, $\zeta_0 = \zeta$.

Conformément aux notations employées précédemment, la mesure spectrale de ζ_m devrait s'écrire Λ_{ζ_m}. Pour simplifier l'écriture, on préfèrera la notation Λ_m.

Soit F_m la fonction génératrice de ζ_m :

$$\begin{aligned} F_0(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n) z^n, \qquad |z| < 1 \\ &= \left(\sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_0(k) z^k\right) F_1(z^{q_1}), \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

Considérons $x \in T$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\Lambda_0(\{x \pm \varepsilon\}) = \Lambda_1(\{q_1 x \pm q_1 \varepsilon\}) = 0.$$

D'après le théorème 1,

$$\Lambda_0(I(\varepsilon)) = \lim_{r \uparrow 1} 2(1-r) \int_{I(\varepsilon)} |F_0(re(-u))|^2 \, du,$$

où $I(\varepsilon) = [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Tenant compte de la relation fonctionnelle vérifiée par F_0, on obtient :

$$\begin{aligned} \Lambda_0(I(\varepsilon)) &= \lim_{r \uparrow 1} 2(1-r) \int_{I(\varepsilon)} \left|\sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_0(k) r^k e(-ku)\right|^2 \\ &\qquad \times |F_1(r^{q_1} e(-q_1 u))|^2 \, du \\ &= \lim_{r \uparrow 1} 2(1-r) \left|\sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_0(k) r^k e(-kv)\right|^2 \\ &\qquad \times \int_{I(\varepsilon)} |F_1(r^{q_1} e(-q_1 u))|^2 \, du, \end{aligned}$$

où $v \in I(\varepsilon)$. Il existe alors $w \in I(\varepsilon)$ pour lequel

$$\begin{aligned} \Lambda_0(I(\varepsilon)) &= \left|\sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_0(k) e(-kw)\right|^2 \lim_{r \uparrow 1} 2(1-r) \\ &\qquad \times \int_{I(\varepsilon)} |F_1(r^{q_1} e(-q_1 u))|^2 \, du. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale du second membre, on effectue le changement de variable $u = q_1^{-1}\, t$:

$$\Lambda_0(I(\varepsilon)) = \left|\sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_0(k)\, e(-kw)\right|^2 \lim_{r\uparrow 1} \frac{1-r}{1-r^{q_1}}\, 2(1-r^{q_1}) \times \int_{q_1 I(\varepsilon)} \left|F_1(r^{q_1} e(-t))\right|^2 \frac{dt}{q_1}$$

$$= \left|\frac{1}{q_1}\sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_0(k)\, e(-kw)\right|^2 \Lambda_1(q_1 I(\varepsilon)).$$

Faisons alors tendre ε vers zéro : il vient

$$\Lambda_0(\{x\}) = \left|\frac{1}{q_1}\sum_{k=0}^{q_1-1} \varphi_0(k)\, e(-kx)\right|^2 \Lambda_1(\{q_1 x\}).$$

Par suite,

$$[\Lambda_0(\{x\})]^{1/2} = \left(\prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{q_{j+1}} \left|\sum_{k=0}^{q_{j+1}-1} \varphi_j(k)\, e(-kxp_j)\right|\right) [\Lambda_n(\{xp_n\})]^{1/2}$$

$$\leqslant \prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{q_{j+1}} \left|\sum_{k=0}^{q_{j+1}-1} \varphi_j(k)\, e(-kxp_j)\right|,$$

car $\Lambda_n(\{x p_n\}) \leqslant \Lambda_n(T) = 1$.

Donc

$$\Lambda_0(\{x\})^{1/2} \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q_{j+1}} \left|\sum_{k=0}^{q_{j+1}-1} \varphi_j(k)\, e(-kxp_j)\right|.$$

L'inégalité en sens inverse découle de l'identité

$$\prod_{j=0}^{n-1} \frac{1}{q_{j+1}} \sum_{k=0}^{q_{j+1}-1} \varphi_j(k)\, e(-kxp_j) = \frac{1}{p_n} \sum_{j=0}^{p_n-1} \zeta(j)\, e(-jx)$$

et du corollaire 2 :

$$\prod_{j=0}^{\infty} \frac{1}{q_{j+1}} \left|\sum_{k=0}^{q_{j+1}-1} \varphi_j(k)\, e(-kxp_j)\right|$$

$$\leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\sum_{j=0}^{n-1} \zeta(j)\, e(-jx)\right| \leqslant [\Lambda_0(\{x\})]^{1/2}.$$

Le théorème est alors établi. ■

5. Les suites q-multiplicatives presque périodiques

THÉORÈME 5. — *Soit ζ une suite* **q**-*multiplicative de module* 1. *Si la mesure spectrale Λ_ζ n'est pas diffuse, elle est alors atomique.*

Démonstration. — Soit ζ une suite **q**-multiplicative de module 1. Soit

$$J_0=\sum_{x\in T}\Lambda_0(\{x\})$$

le *saut total* de la mesure Λ_0. Pour établir le théorème, il suffit de montrer que $J_0=1$. Or

$$J_0=\sum_{0\leqslant x<q_1^{-1}}\sum_{l=0}^{q_1-1}\Lambda_0(\{x+lq_1^{-1}\})$$
$$=\sum_{0\leqslant x<q_1^{-1}}\sum_{l=0}^{q_1-1}\frac{1}{q_1^2}\,\Big|\sum_{k=0}^{q_1-1}\varphi_0(k)\,e(-k(x+lq_1^{-1}))\Big|^2\,\Lambda_1(\{q_1x\}).$$

Un calcul simple montre que

$$\sum_{l=0}^{q_1-1}\frac{1}{q_1^2}\,\Big|\sum_{k=0}^{q_1-1}\varphi_0(k)\,e(-k(x+lq_1^{-1}))\Big|^2=1,$$

d'où

$$J_0=\sum_{0\leqslant x<q_1^{-1}}\Lambda_1(\{q_1x\})=\sum_{0\leqslant x<1}\Lambda_1(\{x\}).$$

Ainsi, J_m désignant le saut total de la mesure spectrale Λ_m, on a

$$J_0=J_1=\ldots=J_m,\qquad \forall\, m\in\mathbf{N}.$$

Par hypothèse, il existe $x\in T$ tel que $\Lambda_0(\{x\})>0$. D'après le théorème 4, le produit infini

$$\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1}{q_{j+1}}\,\Big|\sum_{k=0}^{q_{j+1}-1}\varphi_j(k)\,e(-kxp_j)\Big|$$

est non nul, donc convergent. Par suite

$$\lim_{m\to\infty}\Lambda_m(\{xp_m\})^{1/2}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\prod_{j=m}^{\infty}\frac{1}{q_{j+1}}\,\Big|\sum_{k=0}^{q_{j+1}-1}\varphi_j(k)\,e(-kxp_j)\Big|=1.$$

Or, pour tout $m\in\mathbf{N}$, $J_0=J_m\geqslant\Lambda_m(\{xp_m\})$, donc $J_0=1$. ∎

6. Les suites q-multiplicatives pseudo-aléatoires

THÉORÈME 6. — *Soit* **q** *une suite bornée, et soit ζ une suite* **q**-*multiplicative de module* 1. *Si sa mesure spectrale est diffuse, elle est singulière.*

Démonstration. — Soit ζ une suite $\mathbf{q}$-multiplicative de module 1, et soit ζ_m la suite translatée $\zeta_m(n) = \zeta(np_m)$. D'après le théorème 3, les corrélations $\gamma_m = \hat{\Lambda}_m$ vérifient les relations

$$\gamma_m(q_{m+1}n+a) = A_m(a)\gamma_{m+1}(n)+B_m(a)\gamma_{m+1}(n+1).$$

Par hypothèse, Λ_0 est une mesure diffuse $\Lambda_0 = \Lambda_0^{ac}+\Lambda_0^s$. Pour montrer que Λ_0^{ac} est nul, il suffit de montrer que la suite $\lambda_0 = \hat{\Lambda}_0^{ac}$ est nulle. Nous prouvons plus généralement que $\lambda_m = \hat{\Lambda}_m^{ac} = 0$, $m \in \mathbf{N}$.

En effet, on vérifie aisément que les suites λ_m satisfont aux mêmes relations de récurrence que les corrélations γ_m (comparer avec [12], p. 324 et 325) :

$$\lambda_m(q_{m+1}n+a) = A_m(a)\lambda_{m+1}(n)+B_m(a)\lambda_{m+1}(n+1).$$

De plus

(2) $$\lim_{n\to\infty}\lambda_m(n) = 0, \qquad m \in \mathbf{N},$$

et, comme γ_m, λ_m est défini positif.

Dans les relations de récurrences, on choisit $a = 0$:

$$\lambda_m(q_{m+1}n) = \lambda_{m+1}(n),$$

d'où

(3) $$\lambda_0(p_m n) = \lambda_m(n).$$

En particulier,

$$\lambda_0(0) = \lambda_1(0) = \ldots = \lambda_m(0), \qquad m \in \mathbf{N}.$$

Effectuons maintenant le choix $n = 0$, $a = q_{m+1}-1$ dans les relations de récurrences

$$\lambda_m(q_{m+1}-1) = \frac{1}{q_{m+1}}\zeta_m(q_{m+1}-1)\lambda_0(0)+B_m(q_{m+1}-1)\lambda_{m+1}(1).$$

Quand m croît indéfiniment, $\lambda_m(q_{m+1}-1)$ et $\lambda_{m+1}(1)$ tendent vers zéro d'après (2) et (3). Donc $\lambda_0(0) = 0$. Comme λ_0 est défini positif, $\lambda_0 = 0$. ■

7. Une caractérisation des nombres de Pisot-Vijayaraghavan

Soit $\mathbf{q}$ une suite bornée. Les théorèmes 5 et 6 montrent qu'une suite $\mathbf{q}$-multiplicative ζ de module 1 est soit presque-périodique, soit pseudo-aléatoire à mesure spectrale singulière. Soit $\eta = (2i\pi)^{-1}\log\zeta$ l'argument de ζ (η est donc une application $\mathbf{N} \to T$). Soit $\| \cdot \|$ la « norme » sur T définie par $\| x \| = \min_{n \in \mathbf{Z}} | x-n |$. La technique de COQUET [6] permet d'apporter la précision suivante aux théorèmes 5 et 6.

THÉORÈME 7. — *Soit* ζ *une suite* $\mathbf{q}$*-multiplicative de module* 1, *où* $\mathbf{q}$ *est bornée, et soit* $\eta = (2\, i\pi)^{-1} \log \zeta$ *son argument. Si la série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a=2}^{q_{n+1}} \| \eta(a p_n) - a\, \eta(p_n) \|^2,$$

converge, alors ζ *est presque-périodique. Si la série diverge, alors* ζ *est pseudo-aléatoire, à mesure spectrale singulière.*

En particulier, soit $\theta > 1$ un nombre réel, et soit

$$\zeta = \zeta_\theta = \prod_{j=0}^{\infty} e(\theta^j e_j).$$

Comme conséquence du théorème 7, on obtient la caractérisation suivante des nombres de Pisot-Vijayaraghavan (PV).

COROLLAIRE 4. — *Soit* $\theta > 1$, *et soit* $\mathbf{q}$ *une suite bornée. Si* θ *est un nombre PV, alors* ζ_θ *est presque-périodique. Si* θ *n'est pas un nombre PV, alors* ζ_θ *est pseudo-aléatoire à mesure spectrale singulière.*

On peut apporter une précision supplémentaire à cet énoncé, à savoir que si θ est un nombre PV alors ζ_θ est la restriction à $\mathbf{N}$ d'une fonction presque-périodique de Bohr. Pour établir cela, il suffit de remarquer que

$$\zeta_\theta^{(N)} = e\left(\sum_{k=0}^{N} \theta^k e_k\right)$$

tend vers ζ_θ pour la norme de la convergence uniforme sur $\mathbf{N}$. On pourra comparer ce résultat avec [7].

8. Une suite de Kakutani

Nous complétons ces résultats par l'étude de la suite ξ introduite par KAKUTANI [11]. Elle est définie comme suit. Soit $p \geqslant 3$ un nombre premier. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. L'entier

$$\omega_p(n) = n p^{-v_p(n)} \pmod p$$

sera considéré comme élément du groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^*$. On remarque que l'application $\omega_p : \mathbf{N} \to (\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^*$ est multiplicative :

$$\omega_p(mn) = \omega_p(m) . \omega_p(n).$$

En particulier,

$$\omega_p(n!) = \prod_{k=1}^{n} \omega_p(k).$$

Soit e une racine primitive (mod p), et soit L la fonction logarithme définie sur $(\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^*$, c'est-à-dire l'isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^*$ sur le groupe additif $\mathbf{Z}/(p-1)\,\mathbf{Z}$, tel que $L\,e = 1$. On généralise ci-dessous un résultat de KAKUTANI.

THÉORÈME 8. — *La suite ξ, définie par $\xi(n) = \exp(2\,i\pi/(p-1))\,L\,\omega_p(n!)$ est p^2-multiplicative.*

Démonstration. — Soit μ la suite à valeurs dans le groupe $\mathbf{Z}/(p-1)\,\mathbf{Z}$, définie par $\mu(n) = L\,\omega_p(n!)$.

D'après la propriété multiplicative de la suite ω_p,

$$\begin{aligned}\mu(pn) &= \textstyle\sum_{k=1}^{pn} L\,\omega_p(k)\\ &= \textstyle\sum_{a=1}^{p}\sum_{l=0}^{n-1} L\,\omega_p(pl+a)\\ &= \textstyle\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{l=0}^{n-1} La+\sum_{l=0}^{n-1} L\,\omega_p(l+1).\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}&\omega_p(pl) = \omega_p(l), && l = 1, 2, \ldots,\\ &\omega_p(pl+a) = a, && l = 1, 2, \ldots; \qquad a = 1, 2, \ldots, p-1.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mu(pn) = n\textstyle\sum_{a=1}^{p-1} a+\mu(n) = \mu(n)+\dfrac{1}{2}p(p-1)\,n.$$

Calculons maintenant $\mu(p^2\,n)$:

$$\begin{aligned}\mu(p^2\,n) &= \mu(pn)+\frac{1}{2}p(p-1)\,pn\\ &= \mu(n)+\frac{1}{2}p(p-1)(p+1)\,n\\ &= \mu(n) \qquad (\mathrm{mod}\ (p-1)).\end{aligned}$$

Soit maintenant $b \in \{0, 1, \ldots, p^2-1\}$. On a

$$\begin{aligned}\mu(p^2\,n+b) &= \mu(p^2\,n)+\textstyle\sum_{k=p^2n+1}^{p^2n+b} L\,\omega_p(k)\\ &= \mu(n)+\textstyle\sum_{k=1}^{b} L\,\omega_p(p^2\,n+k)\\ &= \mu(n)+\textstyle\sum_{k;\,(k,\,p)=1} Lk+\sum_{1\leqslant k\leqslant b/p} L\,\omega_p(p^2\,n+pk)\\ &= \mu(n)+\textstyle\sum_{k;\,(k,\,p)=1} Lk+\sum_{1\leqslant k\leqslant b/p} Lk.\end{aligned}$$

Les deux derniers termes du second membre sont indépendants de n : on a donc la relation

$$\mu(p^2\,n+b) = \mu(n)+\mu(b),$$

dans le groupe $\mathbf{Z}/(p-1)\,\mathbf{Z}$. Par suite

$$\xi(p^2\,n+b) = \xi(n)\,\xi(b),$$

d'où l'on déduit aisément que si e_j est la j-ième décimale p^2-adique, $\xi = \prod_{j=0}^{\infty} \xi \circ e_j$. ■

Corollaire 5. — *La suite* ξ *de Kakutani est pseudo-aléatoire à mesure spectrale singulière.*

Démonstration. — La série définie au théorème 7 se réduit ici à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{a=2}^{p^2} \left\| \frac{1}{p-1} \mu(a) \right\|^2 .$$

Pour montrer que la série diverge, il suffit d'établir l'existence de $a \in \{ 2, 3, \ldots, p^2 \}$ tel que $\mu(a) \not\equiv 0 \pmod{p-1}$. Supposons par l'absurde que, pour tout $a \in \{ 2, 3, \ldots, p^2 \}$, $\mu(a) \equiv 0 \pmod{p-1}$. Alors $L\,\omega_p(a!) \equiv 0$, donc

$$L\,\omega_p(a) = L\,\omega_p(a!) - L\,\omega_p((a-1)!) \equiv 0 \qquad (\text{mod } p-1).$$

En d'autres termes,

$$\omega_p(a) \equiv 1 \ (\text{mod } p), \qquad a \in \{2, 3, \ldots, p^2\}.$$

En choisissant $a \in \{ 2, 3, \ldots, p \}$, on obtient $a \equiv 1 \pmod{p}$ pour $a \in \{ 1, 2, \ldots, p-1 \}$. L'absurdité établit l'assertion. ■

Soit $j \in (\mathbf{Z}/(p-1)\,\mathbf{Z})^*$. La démonstration précédente montre que la suite ξ^j est elle aussi pseudo-aléatoire (à mesure spectrale singulière). D'après le corollaire 2, elle est de moyenne nulle, et d'après le critère de Weyl, la suite $n \mapsto L\,\omega_p(n!)$ est équirépartie $(\text{mod } p-1)$. Comme L est un isomorphisme de groupe fini, on obtient l'énoncé suivant,

Corollaire 6. — *La suite* $n \to \omega_p(n!)$ *est équirépartie dans* $(\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z})^*$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bass (J.). — Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 1-69.

[2] Bertrandias (J.-P.). — Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre *p*, *Bull. Soc. math. France*, *Mémoire* 5, 1966, p. 3-106.

[3] Bertrandias (J.-P.). — Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1, *Compositio Math.*, Groningen, t. 16, 1964, p. 23-28.

[4] Bésineau (J.). — Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction « somme des chiffres », *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 20, 1972, p. 401-416.

[5] Coquet (J.). — *Sur les fonctions* $\mathscr{S}$*-multiplicatives et* $\mathscr{S}$*-additives*, Thèse 3e cycle, Orsay, 1975.

[6] Coquet (J.). — Sur les fonctions q-multiplicatives pseudo-aléatoires, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976, Série A, p. 175-178.

[7] Coquet (J.). — Remarques sur les nombres de Pisot-Vijayaraghavan, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 32, 1977, p. 79-87.

[8] COQUET (J.) et MENDÈS FRANCE (M.). — Suites à spectre vide et suites pseudo-aléatoires, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 32, 1977, p. 99-106.
[9] GEL'FOND (A. O.). — Sur les nombres qui ont des propriétés additives ou multiplicatives données, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 13, 1968, p. 259-265.
[10] KAHANE (J.-P.). — Sur les coefficients de Fourier-Bohr, *Studia Math.*, Warszawa, t. 21, 1961, p. 103-106.
[11] KAKUTANI (S.). — Ergodic theory of shift transformations, "*Proceedings of the 5th Berkeley symposium on mathematical statistics probability* [1965. Berkeley]", vol. 2, part. 2, p. 405-414. — Berkeley, University of California Press, 1967.
[12] KAKUTANI (S.). — Strictly ergodic symbolic dynamical systems, "*Proceedings of the 6th Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* [1970. Berkeley]," vol. 2, p. 319-326. — Berkeley, University of California Press, 1972.
[13] MAHLER (K.). — On the translation properties of a simple class of arithmetical functions, *J. Math. and Phys.*, t. 6, 1927, p. 158-163.
[14] MATUSITA (K.). — Interval estimation based on the notion of affinity, *Bull. Inst. internat. Statist.*, t. 38, 1961, p. 241-244.
[15] MENDÈS FRANCE (M.). — Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1966).
[16] SALEM (R.). — Uniform distribution and capacity of sets, *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, Suppl., 1952, p. 193-195.
[17] WALLIN (H.). — On Bohr's spectrum of a function, *Arkiv für Matem.*, t. 4, 1961, p. 159-162.
[18] WIENER (N.). — The spectrum of an array and its application to the study of the translation properties of a simple class of arithmetical functions, *J. Math. and Phys.*, t. 6, 1927, p. 145-157.
[19] WIENER (N.). — *The Fourier integral and certain of its applications*, Cambridge, Cambridge University Press, 1933; New York, Dover Publications, 1958.

(Texte définitif reçu le 6 juin 1977.)

Michel MENDÈS FRANCE
Mathématiques et Informatique,
Université de Bordeaux-I,
351, cours de la Libération,
33405 Talence Cedex;

Jean COQUET
Département de Mathématiques,
Centre universitaire de Valenciennes,
Le Mont-Houy,
59326 Aulnoy-les-Valenciennes.

Teturo KAMAE
Department of Mathematics,
Osaka City University,
Sugimoto-Cho,
Osaka, Japan.