BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE TROALLIC

Espaces fonctionnels et théorèmes de I. Namioka

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 127-137
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__127_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 127-137.

ESPACES FONCTIONNELS ET THÉORÈMES DE I. NAMIOKA

PAR

JEAN-PIERRE TROALLIC (*)

[Univ. Rouen]

RÉSUMÉ. — Dans le présent travail, nous établissons de nouvelles propriétés topologiques des espaces fonctionnels. Ces propriétés permettent de retrouver de manière simple divers théorèmes de I. NAMIOKA, R. ELLIS et W. A. VEECH.

ABSTRACT. — In the present work, we establish new topological properties of functional spaces. These properties allow us to achieve—in a simple way—several theorems of I. NAMIOKA, R. ELLIS and W. A. VEECH.

1. Introduction

Soit (X, S) un système dynamique minimal. Supposons que X soit un sous-espace faiblement compact d'un espace de Banach E et que, pour la norme de E, S soit un semi-groupe uniformément équicontinu et distal. Dans ces conditions, X est compact pour la topologie de la norme. Il est relativement simple de déduire de ce théorème de W. A. VEECH ([19], théorème 2.7) le cas particulier suivant du théorème de R. ELLIS [5] : *soit (X, S) un système dynamique compact. Si S est un groupe simplement compact d'homéomorphismes de X sur X, S est équicontinu.*

Cette remarque est à l'origine du présent travail. Nous établissons par réduction au cas métrisable ou séparable de nouvelles propriétés topologiques des espaces fonctionnels (§ 3). Ces propriétés permettent de retrouver simplement divers résultats obtenus antérieurement par I. NAMIOKA [16], R. ELLIS [5] et W. A. VEECH [19] (§ 4 et 5).

En particulier, le théorème 5 est une amélioration du résultat de W. A. VEECH; on peut en déduire la généralisation du théorème de R. ELLIS récemment établie par I. NAMIOKA [16].

Une partie des résultats présentés dans ce travail a déjà fait l'objet d'une note [18].

(*) Texte présenté par A. BRUNEL, reçu le 1er juillet 1978.

Jean-Pierre TROALLIC, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et Techniques de Rouen, 76130 Mont-Saint-Aignan.

2. Notations

Les notations utilisées sont celles de [1]-[4] :

(*a*) soient Y et Z des espaces topologiques. On note $\mathscr{C}(Y, Z)$ l'ensemble des applications continues de Y dans Z, et $\mathscr{C}_s(Y, Z)$ cet ensemble muni de la topologie de la convergence simple. Supposons que Z soit un espace uniforme. On note $\mathscr{C}_u(Y, Z)$ (resp. $\mathscr{C}_c(Y, Z)$) l'ensemble $\mathscr{C}(Y, Z)$ muni de la structure de la convergence uniforme (resp. de la structure uniforme de la convergence compacte).

Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de parties de Y. On note $\mathscr{C}_{\mathscr{A}}(Y, Z)$ l'ensemble $\mathscr{C}(Y, Z)$ muni de la structure uniforme de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathscr{A}$:

(*b*) soient Y et Z des espaces topologiques, A une partie de $\mathscr{C}(Y,Z)$. On note $\bar{A}^s$ l'adhérence de A dans $\mathscr{C}_s(Y, Z)$;

(*c*) soient E un ensemble, V et W des parties de $E\times E$, et x un élément de E. On pose :

$V^{-1} = \{ (x, y); (y, x) \in V \}$.

$V \circ W = \{ (x, y); \exists z \in E : (x, z) \in W, (z, y) \in V \}$.

$V[x] = \{ y; y \in E, (x, y) \in V \}$.

3. Espaces fonctionnels

Il est bien connu qu'une partie d'un espace localement convexe métrisable est séparable si, et seulement si, elle est faiblement séparable. Par contre, nous n'avons pas rencontré l'énoncé suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient Y un espace topologique, Z un espace métrique, et A une partie simplement séparable de $\mathscr{C}(Y, Z)$. Pour tout ensemble dénombrable $\mathscr{K}$ de parties compactes de Y, A est un sous-espace séparable de $\mathscr{C}_{\mathscr{K}}(Y, Z)$.*

Démonstration. — (*a*) *On suppose que Y est compact, et que $\mathscr{K} = \{ Y \}$* (par conséquent $\mathscr{C}_{\mathscr{K}}(Y, Z) = \mathscr{C}_u(Y, Z)$.

Soit D une partie dénombrable de A, simplement dense dans A. Soient

$$\tilde{Y} = \{ (f(y))_{f\in A}; y \in Y \} \qquad \text{et} \qquad \tilde{Z} = \bigcup_{f\in A} f(Y).$$

Pour tout $g \in A$, soit $\tilde{g} : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ l'application qui à $(f(y))_{f \in A}$ associe $g(y)$, et soit $\tilde{A} = \{ \tilde{g}; g \in A \}$. Les points suivants sont simples à vérifier :

– le sous-espace compact $\tilde{Y}$ de Z^A est homéomorphe à son image dans Z^D par l'application qui à $(f(y))_{f \in A}$ associe $(f(y))_{f \in D}$, donc est métrisable;

– $\tilde{Z}$ est un sous-espace métrique séparable de Z;

– les sous-espaces A de $\mathscr{C}_u(Y, Z)$ et $\tilde{A}$ de $\mathscr{C}_u(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ sont homémorphes.

L'espace $\mathscr{C}_u(\tilde{Y}, \tilde{Z})$ ayant une base dénombrable d'ouverts [3], $\tilde{A}$ est uniformément séparable, et A l'est donc aussi.

(*b*) *Cas général.* – Soit $r_K : \mathscr{C}(Y, Z) \to \mathscr{C}(K, Z)$ l'application qui à f associe la restriction $f_{|K}$ de f à K ($K \in \mathscr{K}$). La topologie (resp. la structure uniforme) de la $\mathscr{K}$-convergence sur $\mathscr{C}(Y, Z)$ est la moins fine des topologies (resp. des structures uniformes) sur $\mathscr{C}(Y, Z)$ rendant les applications $r_K : \mathscr{C}(Y, Z) \to \mathscr{C}_u(K, Z)$ continues (resp. uniformément continues) ($K \in \mathscr{K}$) [3].

Les applications $r_K : \mathscr{C}_s(Y, Z) \to \mathscr{C}_s(K, Z)$ étant continues, $r_K(A)$ est un sous-espace séparable de $\mathscr{C}_s(K, Z)$ ($K \in \mathscr{K}$). Compte tenu du premier point, $r_K(A)$ est un sous-espace à base dénombrable de $\mathscr{C}_u(K, Z)$ ($K \in \mathscr{K}$). L'ensemble $\mathscr{K}$ étant dénombrable, on en déduit que A est un sous-espace séparable de $\mathscr{C}_{\mathscr{K}}(Y, Z)$ [1].

COROLLAIRE. – *Soient Y un espace localement compact σ-compact, et Z un espace métrique. Les sous-espaces séparables de $\mathscr{C}_s(Y, Z)$ et les sous-espaces séparables de $\mathscr{C}_c(Y, Z)$ coïncident.*

Démonstration. – Toute partie séparable de $\mathscr{C}_c(Y, Z)$ est une partie séparable de $\mathscr{C}_s(Y, Z)$. Inversement, soit $\mathscr{K}$ un ensemble dénombrable de compacts de Y tel que tout compact de Y soit contenu dans un ensemble de $\mathscr{K}$ [1]. On a $\mathscr{C}_c(Y, Z) = \mathscr{C}_{\mathscr{K}}(Y, Z)$, donc d'après le théorème 1, toute partie séparable de $\mathscr{C}_s(Y, Z)$ est une partie séparable de $\mathscr{C}_c(Y, Z)$.

Remarque. – On pourra comparer la démonstration du théorème 1 avec celle du théorème 4 de [10].

Le théorème suivant est de I. KAPLANSKY [4].

THÉORÈME 2. – *Soient Y un espace topologique, et Z un espace métrique. On suppose qu'il existe un recouvrement dénombrable de Y par des parties compactes de Y. Soit H une partie de $\mathscr{C}(Y, Z)$. Tout élément de $\mathscr{C}(Y, Z)$ simplement adhérent à H est simplement adhérent à une partie dénombrable de de H.*

Démonstration. — On note d la métrique de Z. Soit $f \in \overline{H}^s$. Montrons que f est simplement adhérent à une partie dénombrable D de H. Soient m et n des entiers positifs. Pour tout $h \in H$, on pose

$$\Omega_h = \left\{ (y_1, \ldots, y_m) \in Y^m ;\ d(f(y_i), h(y_i)) < \frac{1}{n},\ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

$(\Omega_h)_{h \in H}$ est un recouvrement ouvert de Y^m. L'espace produit Y^m, étant réunion dénombrable de compacts, on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement dénombrable $(\Omega_h)_{h \in D_{m,n}}$ (avec $D_{m,n} \subset H$). Soit

$$D = \bigcup\nolimits_{m,n} D_{m,n};$$

D est une partie dénombrable de H, et $f \in \overline{D}^s$.

Pour établir le lemme 3, nous utilisons le théorème de Baire et un argument voisin de celui qu'utilise H. B. MAYNARD dans [13] pour démontrer le lemme suivant : *soit A une partie d'un espace de Banach E; si les sous-ensembles dénombrables de A sont dentables, A est dentable.*

LEMME 3. — *Soient Y un espace compact, et Z un espace métrique. Soit A un espace topologique satisfaisant les deux conditions suivantes :*

1° *Tout sous-espace fermé non vide de A est de seconde catégorie dans lui-même.*

2° *Tout point de A adhérent à une partie de A est adhérent à un sous-ensemble dénombrable de cette partie.*

Soit $\varphi : A \to \mathscr{C}_s(Y, Z)$ une application continue. Pour toute partie non vide B de A et tout entourage V de $\mathscr{C}_u(Y, Z)$, il existe $b \in B$ tel que $b \notin \overline{B - \varphi^{-1}(V[\varphi(b)])}$.

Démonstration. — (*a*) *Supposons B dénombrable.* — Soit W un entourage symétrique de $\mathscr{C}_u(Y, Z)$, simplement fermé et tel que $W \circ W \subset V$. $\varphi(\overline{B})$ est simplement séparable donc uniformément séparable (théorème 1). Soit D une partie dénombrable de $\overline{B}$ telle que $\varphi(D)$ soit uniformément dense dans $\varphi(\overline{B})$. On a

$$\varphi(\overline{B}) \subset \bigcup\nolimits_{d \in D} W[\varphi(d)],$$

donc

$$\overline{B} \subset \bigcup\nolimits_{d \in D} \varphi^{-1}(W[\varphi(d)]).$$

Soit ω un ouvert non vide de $\overline{B}$, et $d_0 \in D$ tels que $\omega \subset \varphi^{-1}(W[\varphi(d_0)])$ ($\overline{B}$ est de seconde catégorie dans lui-même). Soit $b \in \omega \cap B$; alors $b \notin \overline{B - \varphi^{-1}(V[\varphi(b)])}$.

(*b*) *Cas général.* — Supposons la propriété non satisfaite. Pour tout $b \in B$, soit $D_b \subset B - \varphi^{-1}(V[\varphi(b)])$, dénombrable, tel que $b \in \bar{D}_b$. Construisons par récurrence une suite $(D_n)_n$ de parties de B de la façon suivante : On pose $D_1 = \{ b \}$, où b est un élément de B; supposons définis $D_1, \ldots, D_n$, on pose

$$D_{n+1} = \bigcup_{b \in D_n} D_b.$$

$D = \bigcup_n D_n$ est dénombrable, et

$$d \in \overline{D - \varphi^{-1}(V[\varphi(d)])} \quad \text{pour tout } d \in D,$$

ce qui contredit le premier point.

Le théorème 4 est une variante du théorème 2.2 de [16] que nous établissons à l'aide du lemme 3.

THÉORÈME 4. — *Soient X un espace localement compact ou métrique complet, Y un espace topologique, et Z un espace uniforme. Soit $\varphi : X \to \mathscr{C}_s(Y, Z)$ une application continue. Pour tout entourage V de $\mathscr{C}_c(Y, Z)$, il existe un ouvert U de X, dense dans X, tel que pour tout $x \in U$, $\varphi^{-1}(V[\varphi(x)])$ soit un voisinage de x dans X.*

Démonstration. — (*a*) *Supposons que Y est un espace compact et que Z est un espace métrique.* — Soit W un entourage symétrique de $\mathscr{C}_u(Y, Z)$ tel que $W \circ W \subset V$, et soit $U = \bigcup_{a \in X} \operatorname{int} \varphi^{-1}(W[\varphi(a)])$. U est un ouvert de X et, pour tout $x \in U$, $\varphi^{-1}(V[\varphi(x)])$ est un voisinage de x dans X. Soit ω un ouvert non vide de X; montrons que $\omega \cap U \neq \emptyset$.

— Si X est métrique complet : Soit $b \in \omega$ tel que $b \notin \overline{\omega - \varphi^{-1}(W[\varphi(b)])}$ (lemme 3). Alors $b \in \omega \cap \operatorname{int} \varphi^{-1}(W[\varphi(b)])$, donc $\omega \cap U \neq \emptyset$.

— Si X est localement compact : ω peut être supposé relativement compact dans X. $\varphi(\bar{\omega})$ est un compact de $\mathscr{C}_s(Y, Z)$. Compte tenu du théorème 2 et du lemme 3, on peut choisir $b \in \omega$ tel que

$$\varphi(b) \notin \overline{\varphi(\omega) - W[\varphi(b)]}^s.$$

On en déduit que $b \notin \overline{\omega - \varphi^{-1}(W[\varphi(b)])}$, et donc que $\omega \cap U \neq \emptyset$.

(*b*) *Cas général.* Soit $\mathscr{M}$ un ensemble de quasimétrique sur Z définissant la structure uniforme de Z [2]. On note :

— Z_m l'espace métrique quotient associé à (Z, m), et $\pi_m : Z \to Z_m$ la surjection canonique ($m \in \mathscr{M}$) [2];

— $r_{K, m}$ l'application de $\mathscr{C}(Y, Z)$ dans $\mathscr{C}(K, Zm)$, définie par

$$r_{K,m}(f) = \pi_m \circ f_{\mid K} \qquad \text{et} \qquad \varphi_{K,m} = r_{K,m} \circ \varphi$$

($m \in \mathscr{M}$, K compact de Y).

Soit V un entourage de $\mathscr{C}_c(Y, Z)$. Soient $m_i \in \mathscr{M}$, K_i un compact de Y, V_i un entourage de $\mathscr{C}_u(K_i, Z_{m_i})$ $(i = 1, \ldots, p)$ tel que

$$\bigcap_{i=1}^{p} (r_i \times r_i)^{-1}(V_i) \subset V, \qquad \text{avec} \quad r_i = r_{K_i, m_i}.$$

Posons $\varphi_i = \varphi_{K_i, m_i}$; pour $i = 1, \ldots, p$, soit U_i un ouvert de X, dense dans X, tel que pour tout $x \in U_i$, $\varphi_i^{-1}(V_i[\varphi_i(x)])$ soit un voisinage de x dans X (on applique le premier point à l'application continue

$$\varphi_i : \ X \to \mathscr{C}_s(K_i, Z_{m_i})).$$

L'ouvert $U = \bigcap_{i=1}^{p} U_i$ de X est dense dans X et, pour tout $x \in U$, $\varphi^{-1}(V[\varphi(x)])$ est un voisinage de x dans X.

DÉFINITION 1. — On appelle *système dynamique* un couple (X, S) constitué par un espace topologique X et un semi-groupe S d'applications continues de X dans X.

— Si X est compact (resp. localement compact, métrique complet), le système dynamique (X, S) est dit *compact* (resp. localement compact, métrique complet).

— S'il n'existe pas dans X de partie fermée non vide stable par S autre que X, le système dynamique (X, S) est dit *minimal*.

Le théorème 5 généralise le théorème 2.7 de [19].

THÉORÈME 5. — *Soient (X, S) un système dynamique minimal localement compact ou métrique complet, Y un espace topologique, Z un espace uniforme, et $\varphi : X \to \mathscr{C}_s(Y, Z)$ une application continue. Soient $\mathscr{K}$ un ensemble de parties compactes de Y, et $\mathscr{V}$ la structure uniforme sur X la moins fine rendant l'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_{\mathscr{K}}(Y, Z)$ uniformément continue.*

Si S est un semi-groupe d'homéomorphismes de X sur X, et si S^{-1} est $\mathscr{V}$-uniformément équicontinu, $\varphi : X \to \mathscr{C}_{\mathscr{K}}(Y, Z)$ est une application continue.

Démonstration. — Soient V un entourage de $C_{\mathscr{K}}(Y, Z)$ et $a \in X$. Montrons que $\varphi^{-1}(V[\varphi(a)])$ est un voisinage de a dans X.

Soit W un entourage de $C_{\mathscr{K}}(Y, Z)$ tel que, pour tout $s \in S$,

$$(s^{-1} \times s^{-1})((\varphi \times \varphi)^{-1}(W)) \subset (\varphi \times \varphi)^{-1}(V)$$

($\mathscr{V}$-uniforme équicontinuité de $S^{-1} = \{ s^{-1}; s \in S \}$). D'après le théorème 4, on peut trouver un ouvert non vide U de X tel que, pour tout $x \in U$, $\varphi^{-1}(W[\varphi(x)])$ soit un voisinage de x dans X. Soit $t \in S$ tel que $t(a) \in U$ (minimalité du système dynamique (X, S)).

$t^{-1}\{ \varphi^{-1}(W[\varphi(t(a))]) \}$ est un voisinage de a dans X contenu dans $\varphi^{-1}(V[\varphi(a)])$. Par conséquent, $\varphi^{-1}(V[\varphi(a)])$ est un voisinage de a dans X.

4. Le théorème de I. Namioka sur les applications séparément continues

NOTATIONS ET DÉFINITION 2. — Soient X, Y, Z trois espaces topologiques, et f une application de $X \times Y$ dans Z. Pour tout $x \in X$ (resp. $y \in Y$), on note f_x (resp. f^y l'application de Y dans Z (resp. de X dans Z), définie par $f_x(y) = f(x, y)$ (resp. $f^y(x) = f(x, y)$). Si, pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, les f_x et les f^y sont des applications continues, on dit que f est *séparément continue*.

Le lemme suivant est élémentaire [3] :

LEMME 6. — *Soient X un espace topologique, Y un espace localement compact, Z un espace uniforme, et f une application de $X \times Y$ dans Z. On suppose que, pour tout $x \in X$, f_x est une application continue. Pour tout $a \in X$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *l'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_c(Y, Z)$, définie par $\varphi(x) = f_x$, est continue au point a;*

(*b*) *pour tout $y \in Y$, f est continue au point (a, y).*

Le théorème 4 (§ 3) permet de retrouver le théorème suivant de I. NAMIOKA :

THÉORÈME 7 (théorème de I. NAMIOKA [16]). — *Soient X un espace localement compact ou métrique complet, Y un espace localement compact σ-compact, Z un espace métrique, et $f : X \times Y \to Z$ une application séparément continue. Il existe alors un G_δ A de X, dense dans X, tel que f soit continue en tout point de $A \times Y$.*

Démonstration. — Soit $\varphi : x \to \mathscr{C}_s(Y, Z)$ l'application continue définie par $\varphi(x) = f_x$. L'espace uniforme $\mathscr{C}_c(Y, Z)$ possède une base dénombrable d'entourages $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ [3]. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit U_n un ouvert de X, dense dans X, tel que, pour tout $x \in U_n$, $\varphi^{-1}(V_n[\varphi(x)])$ soit un voisinage de x dans X (théorème 4). Soit $A = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$. A est un G_δ de X, dense dans X (car X est un espace de Baire) et, pour tout $x \in A$, l'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_c(Y, Z)$ est continue en x. Il en résulte que f est continue en tout point de $A \times Y$ (lemme 6).

Remarque. — En fait l'ensemble des $x \in X$ tels que f soit continue au point (x, y) pour tout $y \in Y$ est un G_δ de X, dense dans X.

5. Théorèmes de I. Namioka, R. Ellis, W. A. Veech

Dans cette section nous retrouvons simplement, à l'aide du théorème 5 (§ 3), divers résultats de I. NAMIOKA, R. ELLIS, W. A. VEECH.

Établissons tout d'abord le théorème de R. ELLIS rappelé dans l'introduction.

THÉORÈME 8 (théorème de R. ELLIS [5]). — *Soit* (Y, G) *un système dynamique compact. Si* G *est un groupe simplement compact d'homéomorphismes de* Y *sur* Y, G *est équicontinu.*

Démonstration. — Soit (X, S) le système dynamique minimal compact obtenu en faisant opérer G dans lui-même par translation à droite (X étant muni de la topologie de la convergence simple dans Y). Soient $\varphi : X \to \mathscr{C}(Y, Y)$ l'application d'inclusion, et $\mathscr{V}$ la structure uniforme sur X la moins fine rendant l'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_U(Y, Y)$ uniformément continue. L'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_s(Y, Y)$ est continue et on vérifie aisément que S est un groupe d'homéomorphismes de X sur X $\mathscr{V}$-uniformément équicontinu. Il résulte donc du théorème 5 que $\varphi : X \to \mathscr{C}_u(Y, Y)$ est une application continue, donc que G est uniformément compact. On en déduit que G est équicontinu (théorème d'Ascoli).

DÉFINITION 3 [7]. — Soit (X, S) un système dynamique compact. On appelle *semi-groupe d'Ellis* du système dynamique (X, S), noté $E(X, S)$, l'adhérence de S dans l'espace topologique produit X^X ($E(X, S)$ est un semi-groupe pour la composition des applications).

L'énoncé suivant, que nous retrouvons également à l'aide du théorème 5, généralise le théorème 8 (pour un système dynamique minimal).

THÉORÈME 9. — *Soit* (X, S) *un système dynamique minimal compact. On suppose que* S *est un groupe d'homéomorphismes de* X *sur* X *et que* $E(X, S) \subset \mathscr{C}(X, X)$. *Dans ces conditions,* S *est équicontinu.*

Démonstration. — Le semi-groupe d'Ellis $E(X, S)$ est un sous-espace compact de l'espace produit X^X.

Soit $\varphi : x \to \mathscr{C}_s(E(X, S), X)$ l'application continue définie par $\varphi(x)(t) = t(x)$, et soit $\mathscr{V}$ la structure uniforme sur X la moins fine rendant l'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_u(E(X, S), X)$ uniformément continue. On vérifie aisément que le groupe d'homéomorphismes S de X sur X est $\mathscr{V}$-uniformément équicontinu. Il résulte donc du théorème 5 que $\varphi : X \to \mathscr{C}_u(E(X, S), X)$ est une application continue. On en déduit que $E(X, S)$ (donc S) est équicontinu [3].

DÉFINITION 4. — Soient G un groupe, et Y un ensemble. On dit que G *opère* dans Y si l'on s'est donné une application de $G \times Y$ dans Y, qui à (g, y) associée gy, telle que :

(*a*) $(gh)y = g(hy)$ pour g, h dans G et y dans Y;

(*b*) $ey = y$ pour y dans Y (e étant l'élément neutre de G).

Supposons que G et Y soient des espaces topologiques. On dit que G *opère séparément continûment* (resp. continûment) dans Y si l'application de $G \times Y$ dans Y qui à (g, y) associe gy est séparément continue (resp. continue).

Le théorème 10 généralise le théorème de R. ELLIS [5]. (R. ELLIS suppose que G est un groupe muni d'une topologie localement compacte rendant les translations à gauche et à droite continues.)

THÉORÈME 10 (théorème de I. NAMIOKA [16]). — *Soient G un espace localement compact ou métrique complet, et Y un espace localement compact. On suppose que G est un groupe, que les translations à droite sont continues, et que G opère séparément continûment dans Y. Dans ces conditions, G opère continûment dans Y.*

Démonstration. — Soit Y_ω le compactifié d'Alekandrov de Y, ω étant le point à l'infini [1].

Soit (X, S) le système dynamique minimal localement compact ou métrique complet obtenu en faisant opérer G dans lui-même par translations à droite. Soit $\varphi : X \to \mathscr{C}(Y_\omega, Y_\omega)$ l'application définie par $\varphi(x)(y) = xy$ pour y dans Y et $\varphi(x)(\omega) = \omega$. Notons $\mathscr{V}$ la structure uniforme sur X la moins fine rendant l'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_u(Y_\omega, Y_\omega)$ uniformément continue. L'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_s(Y_\omega, Y_\omega)$ est continue, et on vérifie aisément que S est un groupe d'homéomorphismes de X sur X $\mathscr{V}$-uniformément équicontinu. Il résulte donc du théorème 5 que $\varphi : X \to \mathscr{C}_u(Y_\omega, Y_\omega)$ est une application continue donc, compte tenu du lemme 6, que G opère continûment dans Y.

COROLLAIRE (théorème de R. ELLIS [5]). — *Soit G un groupe muni d'une topologie localement compacte rendant les translations à gauche et à droite continues. Alors G est un groupe topologique.*

Démonstration. — G opère séparément continûment dans lui-même par translations à gauche donc, d'après le théorème 10, continûment. La continuité de l'inversion est ensuite relativement simple à établir [6].

DÉFINITION 5. — Soient (X, S) un système dynamique compact, et $\mathscr{V}$ une structure uniforme sur X. On dit que (X, S) est *$\mathscr{V}$-distal* si, pour tout couple (a, b) de $X \times X$ tel que $a \neq b$, il existe $V \in \mathscr{V}$ tel que pour tout $s \in S$, $(s(a), s(b)) \notin V$.

Si $\mathscr{V}$ est la structure uniforme naturelle du compact X, et si S est $\mathscr{V}$-distal, on dit que le système dynamique (X, S) est *distal* (rappelons qu'un système dynamique compact (X, S) est distal si, et seulement si, $E(X, S)$ est un groupe de bijections de X sur X ([7], [15]).

Le théorème 11 est établi dans [19] pour un espace de Banach en utilisant notamment le difficile théorème d'existence d'une probabilité régulière invariante pour un système dynamique compact distal ([7], [8], [15]). Nous retrouvons ce résultat pour un espace localement convexe par voie purement topologique.

THÉORÈME 11 (W. A. VEECH [19]). — *Soient* (X, S) *un système dynamique minimal compact, et* $(E, \mathscr{F})$ *un espace localement convexe séparé. On suppose que* X *est un sous-espace faible de* E. *Alors :*

1° *si* (X, S) *est* $\mathscr{F}$*-distal,* (X, S) *est faiblement distal;*

2° *si* (X, S) *est* $\mathscr{F}$*-uniformément équicontinu et* $\mathscr{F}$*-distal,* X *est* $\mathscr{F}$*-compact.*

(On note $\mathscr{F}$ la structure uniforme naturelle de $(E, \mathscr{F})$ ainsi que sa trace sur une partie de E.)

Démonstration. — Munissons le dual topologique E' de E de la topologie faible $\sigma(E', E)$. Soit $\varphi : X \to \mathscr{C}(E', \mathbf{R})$ l'injection canonique définie par $\varphi(x)(\gamma) = \gamma(x)$; l'application $\varphi : (X, \text{faible}) \to \mathscr{C}_s(E', \mathbf{R})$ est continue. Soit $\mathscr{K}$ un recouvrement de E' par des compacts de E' tel que $\mathscr{F}$ soit la strcture uniforme sur X la moins fine rendant l'application $\varphi : X \to \mathscr{C}_{\mathscr{K}}(E', \mathbf{R})$ uniformément continue [4].

1° Soit $(a, b) \in X \times X$ tel que $a \neq b$. Soit W un entourage symétrique de $(X, \mathscr{F})$ tel que, pour tout $s \in S$, $(s(a), s(b)) \notin W \circ W$. D'après le théorème 4, on peut trouver un point $x \in X$, tel que $W[x]$ soit un voisinage faible de x dans X. Soit ω un ouvert faible non vide de X tel que $\omega \subset W[x]$. Le système dynamique (X, S) étant faiblement minimal, on a $X = \bigcup_{s \in S} s^{-1}(\omega)$. Soit $V = \bigcup_{s \in S} s^{-1}(\omega) \times s^{-1}(\omega)$; V est un entourage faible de X et, pour tout $s \in S$, $(s(a), s(b)) \notin V$. Par conséquent, le système dynamique (X, S) est faiblement distal.

2° D'après le premier point, le système dynamique faible (X, S) est minimal distal. Par conséquent, S est un semi-groupe d'homéomorphismes faibles de X sur X; on vérifie aisément que les systèmes dynamiques faibles (X, S) et (X, S^{-1}) ont même semi-groupe d'Ellis. On déduit que (X, S^{-1}) est faiblement minimal. Il résulte alors du théorème 5 que

$$\varphi : (X, \text{faible}) \to \mathscr{C}_{\mathscr{K}}(E', \mathbf{R})$$

est une application continue et par conséquent que X est $\mathscr{F}$-compact.

Remarque. — Le premier point du théorème 11 permet de réduire la démonstration du théorème de point fixe de RYLL-NARDZEWSKI [17], [14], [12], [9] à celle que donne F. HAHN dans un cas particulier [11]. De même, la généralisation de ce théorème donnée par I. NAMIOKA dans [19] se réduit au cas traité dans [15].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*. Chap. 1-2. — Paris, Hermann, 1965 (*Act. scient. et ind.*, 1142, *Bourbaki*, 2).

[2] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*. Chap. 9. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1045; *Bourbaki*, 8).

[3] BOURBAKI (N.). — *Topologie générale*. Chap. 10. — Paris, Hermann, 1967 (*Act. scient. et ind.*, 1084; *Bourbaki*, 10).

[4] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 4. — Paris, Hermann, 1967 (*Act. scient. et ind.*, 1229; *Bourbaki*, 18).

[5] ELLIS (R.). — Locally compact transformation groups, *Duke math. J.*, t. 24, 1957, p. 119-125.

[6] ELLIS (R.). — A note on the continuity of the inverse. *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 8, 1957, p. 372-373.

[7] ELLIS (R.). — *Lectures on topological dynamics*. — New York, Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[8] FURSTENBERG (H.). — The structure of distal flows, *Amer. J. Math.*, t. 85, 1963, p. 477-515.

[9] GLASNER (S.). — *Proximal flows*. — Berlin and New York, Springer Verlag, 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, 517).

[10] GROTHENDIECK (A.). — Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux, *Amer. J. Math.*, t. 74, 1952, p. 168-186.

[11] HAHN (F.). — A fixed-point theorem, *Math. Systems Theory*, t. 1, 1968, p. 55-57.

[12] HANSEL (G.) et TROALLIC (J.-P.). — Démonstration du théorème de Ryll-Nardzewski par extension de la méthode de F. Hahn, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976 Série A, p. 857-859.

[13] MAYNARD (H. B.). — A geometrical characterization of Banach spaces with the Radon-Nikodym property, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 185, 1973, p. 493-500.

[14] NAMIOKA (I.) and ASPLUND (E.). — A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1967, p. 443-445.

[15] NAMIOKA (I.). — Right topological groups, distal flows, and a fixed point theorem, *Math. Systems Theory*, t. 6, 1972, p. 193-209.

[16] NAMIOKA (I.). — Separate continuity and joint continuity, *Pacific. J. of Math.*, t. 51, 1974, p. 515-531.

[17] RYLL-NARDZEWSKI (C.). — On fixed points of semi-groups of endomorphisms of linear spaces, "*Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on mathematical Statistics and Probability*", 1965-1966 [Berkeley], vol. 2, part 1, p. 55-61. — Berkeley, University of California Press, 1967.

[18] TROALLIC (J.-P.). — Fonctions à valeurs dans des espaces fonctionnels généraux : Théorèmes de R. Ellis et de I. Namioka, *C. R. Acad. Sc. Paris.*, t. 287, 1978, Série A, p. 63-66.

[19] VEECH (W. A.). — A fixed point theorem-free approach to weak almost periodicity, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 177, 1973, p. 353-362.