BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-MARC DESHOUILLERS
GEORGES GREKOS

Propriétés extrémales de bases additives

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 319-335
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__319_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 319-335.

PROPRIÉTÉS EXTRÉMALES DE BASES ADDITIVES

PAR

JEAN-MARC DESHOUILLERS et GEORGES GREKOS (*)
[Univ. Bordeaux-I]

RÉSUMÉ. — Une suite $\mathscr{A}$ strictement croissante d'entiers positifs ou nuls est une base asymptotique d'ordre h si tout entier suffisamment grand est somme de h éléments de $\mathscr{A}$. Soit s un entier positif; la suite $\mathscr{A}$ est une non-base asymptotique s-maximale d'ordre h si, pour tout ensemble W de s-1 entiers non négatifs, $\mathscr{A} \cup W$ n'est pas base asymptotique d'ordre h, et, pour tout ensemble S de s entiers non négatifs n'appartenant pas à $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \cup S$ est une base asymptotique d'ordre h. Nous construisons une classe de non-bases asymptotiques $\mathscr{A}$ s-maximales d'ordre h qui vérifient la condition $A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$, où $A(x)$ désigne le nombre de termes de la suite $\mathscr{A}$ qui sont positifs et au plus égaux à x. En outre, nous construisons une non-base asymptotique $\mathscr{A}'$ d'ordre h qui vérifie $A'(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$ et qui n'est pas contenue dans une non-base 1-maximale d'ordre h.

ABSTRACT. — A strictly increasing sequence $\mathscr{A}$ of non-negative integers is said to be an asymptotic basis of order h if every sufficiently large integer can be written as a sum of h elements of $\mathscr{A}$. Otherwise, $\mathscr{A}$ is an asymptotic nonbasis of order h. Let s be a positive integer; an asymptotic nonbasis $\mathscr{A}$ of order h is s-maximal if $\mathscr{A} \cup W$ remains an asymptotic nonbasis of order h for any set W of s-1 non-negative integers, but $\mathscr{A} \cup S$ becomes an asymptotic basis of order h for every set S of s non-negative integers not belonging to $\mathscr{A}$. A class of s-maximal asymptotic nonbases of order h is constructed, each sequence $\mathscr{A}$ in this class satisfying $A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$, where $A(x)$ denotes the number of positive elements of $\mathscr{A}$ not exceeding x. We also construct an asymptotic nonbasis $\mathscr{A}'$ of order h with $A'(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$, such that $\mathscr{A}'$ cannot be imbedded as a subset of any 1-maximal asymptotic nonbasis of order h.

(*) Texte reçu le 16 mai 1978.

Jean-Marc DESHOUILLERS et Georges GREKOS, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226, Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

Introduction

On appelle *suite* une suite strictement croissante d'entiers non négatifs. On désigne par h un entier supérieur ou égal à 2. Une suite $\mathscr{B}$ est une *base asymptotique d'ordre h* si tout entier naturel suffisamment grand est somme de h éléments de $\mathscr{B}$.

Soit s un entier positif; on dit que la suite A est une *non-base asymptotique s-maximale d'ordre h* si

(i) pour tout ensemble W de $s-1$ entiers non négatifs, la suite $\mathscr{A} \cup W$ n'est pas base asymptotique d'ordre h, et

(ii) pour tout ensemble S de s entiers non négatifs n'appartenant pas à la suite $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \cup S$ est une base asymptotique d'ordre h.

Étant donnés une suite $\mathscr{A}$ et un nombre réel $x \geqslant 1$, on désigne par $A(x)$ le nombre d'éléments de $\mathscr{A}$ qui sont positifs et inférieurs ou égaux à x. M. B. Nathanson [2] a posé la question de trouver des non-bases asymptotiques s-maximales ayant la plus petite densité possible, à savoir telles que

$$A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h}). \tag{1}$$

Le cas particulier $h = 2$ a été traité dans [2]. Nous nous proposons ici de construire de telles suites pour h quelconque.

Un problème voisin, posé par P. Erdös et M. B. Nathanson [1] (et résolu lorsque $h = 2$), est de trouver des non-bases asymptotiques d'ordre h qui vérifient (1) et qui ne sont pas contenues dans des non-bases asymptotiques 1-maximales d'ordre h. Nous donnons également un exemple d'une telle suite.

Les techniques utilisées ici peuvent être considérées comme des extensions de celles de [1] et [2] dans la mesure où le cas particulier $h = 2$ de notre travail est très proche des travaux de P. Erdös et M. B. Nathanson.

Notations

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{Q}$ désignent des suites.

x désigne un nombre réel supérieur ou égal à 1.

$A(x)$ est le nombre d'éléments de la suite $\mathscr{A}$ qui sont positifs et au plus égaux à x.

$C_1, C_2, \ldots$ sont des constantes réelles.

Des lettres majuscules A_j, B', $B^{(n)}$, I, ... (à l'exception de C et de Q) représentent des ensembles finis d'entiers non négatifs. On note $|A|$ le cardinal de l'ensemble A.

f désignera une application.

Q et toutes les lettres minuscules (sauf x et f) désignent des entiers supérieurs ou égaux à zéro.

E_1 et E_2 étant deux ensembles (finis ou infinis) d'entiers, on pose

$$E_1+E_2 = \{ e_1+e_2 ;\ e_1 \in E_1,\ e_2 \in E_2 \};$$

pour h entier supérieur ou égal à 2, on définit, par récurrence,

$$hE = (h-1)E+E.$$

Si E est un ensemble, et d un entier, on écrira $d+E$ au lieu de $\{ d \}+E$.

Soient deux nombres réels $x_1 \leqslant x_2$; on appelle *intervalle* $[x_1, x_2]$ l'ensemble des *entiers* a tels que $x_1 \leqslant a \leqslant x_2$. D'une manière analogue, $[x_1, x_2[$ est l'ensemble des *entiers* a qui vérifient $x_1 \leqslant a < x_2$.

LEMME 1. — *Soient h et u deux entiers supérieurs à* 1. *On pose*

$$B' = \{ eu^i ;\ 0 \leqslant e < u,\ 0 \leqslant i < h \};$$
$$B'' = \{ u^h - b ;\ b \in B' \};$$
$$B = B' \cup B''.$$

On a

(b. 1) $B \subset [0, u^h]$, $|B| < 2uh$;

(b. 2) $hB = [0, hu^h]$;

(b. 3) $(h\text{-}1)B$ *contient tous les multiples de u qui sont dans* $[0, (h-1)u^h]$.

Démonstration. — La première propriété découle du fait que

$$|B'| = |B''| = 1+(u-1)h < uh.$$

On montre, par récurrence sur n, $0 < n \leqslant h$, la propriété :

(P_n) *L'ensemble nB contient tous les multiples de u^{h-n} qui sont dans l'intervalle* $[0, nu^h]$.

On constate que (P_1) est trivialement vraie. Supposons que (P_n) est vraie, $1 \leqslant n \leqslant h-1$, et montrons que (P_{n+1}) est vraie. Soit z un multiple de u^{h-n-1} dans l'intervalle $[0, (n+1)u^h]$; z s'écrit :

$$z = z_{h-n-1}u^{h-n-1}+z_{h-n}u^{h-n}+\ldots+z_{h-1}u^{h-1}+z_h u^h,$$

avec $0 \leqslant z_i < u$, $\quad (h-n-1 \leqslant i \leqslant h-1)$, $\quad 0 \leqslant z_h \leqslant n+1$.

Si $z_h = 0$, on voit que z est dans $(n+1)\,B'$, et si $z_h = n+1$, alors $z = (n+1)\,u^h$ est trivialement dans $(n+1)\,B''$. Supposons donc $0 < z_h < n+1$. Écrivons z sous la forme

$$z = z' + z''$$

où

$$z' = u^h - (u - z_{h-n-1})\,u^{h-n-1},$$

$$z'' = (z_{h-n}+1)\,u^{h-n} + z_{h-n+1}\,u^{h-n+1} + \ldots + z_{h-1}\,u^{h-1} + (z_h - 1)\,u^h.$$

L'entier z'' est multiple de u^{h-n}, et vérifie :

$$0 \leqslant z'' \leqslant uu^{h-n} + (u-1)\,u^{h-n+1} + \ldots + (u-1)\,u^{h-1} + (n-1)\,u^h = nu^h.$$

D'après (P_h), z'' est somme de n éléments de B. Ainsi, il suffit de montrer que z' appartient à B. En effet, si $z_{h-n-1} \geqslant 1$, alors z' appartient à B'' qui est inclus dans B; si $z_{h-n-1} = 0$, on a $z' = u^h - u^{h-n}$, qui est encore un élément de B, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

LEMME 2. — *Soit h un entier plus grand que* 1. *On pose*

$$1 + \delta = (1+h)^{1/h}, \qquad \delta > 0. \tag{3}$$

Soit u_1 un multiple de h tel que

$$u_1 > 2\,h\,\delta^{-1}. \tag{4}$$

Pour $n \geqslant 2$, on définit u_n comme étant le multiple de h qui se trouve dans l'intervalle

$$[(1+\delta)\,u_{n-1} - h,\ (1+\delta)\,u_{n-1}[. \tag{5}$$

On désigne par $B^{(n)}$ l'ensemble B, construit dans le lemme 1, *avec u_n à la place de u. On pose* :

$$B_0 = [0,\ h^{-1}\,u_1^h], \qquad B_n = h^{-1}\,u_n^h + B^{(n)} \quad (n \geqslant 1).$$

La suite $\mathscr{B} = \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$ vérifie les propriétés suivantes :

(B. 1) *$\mathscr{B}$ est une base d'ordre h;*

(B. 2) *il existe une constante C_1 telle que, pour tout $x \geqslant 1$, on ait*

$$B(x) \leqslant C_1\,x^{1/h};$$

(B. 3) *t étant un entier naturel, on pose $\mathscr{B}_t = \bigcup_{n=0}^{t} B_n$; alors*

$$h\,\mathscr{B}_t = [0,\ (h+1)\,u_t^h];$$

(B. 4) *si l'on écrit $(h-1)\,\mathscr{B}_t = \{\,d_1 < d_2 < \ldots < d_l\,\}$,* *pour tout* r, $1 < r \leqslant l$, *on a*

$$d_r - d_{r-1} < \left(\frac{h}{h-1}\right)^{1/h} d_r^{1/h}.$$

Démonstration. — 1° Montrons d'abord que

(6) $$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots$$

et que

(7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = 1+\delta.$$

On va établir (6) par récurrence. On a

$$u_2 \geqslant (1+\delta)\,u_1 - h > u_1$$

et, pour $n \geqslant 2$,

$$u_n \geqslant (1+\delta)\,u_{n-1} - h > u_{n-1},$$

car $u_{n-1} \geqslant u_1 > h\,\delta^{-1}$.

D'autre part, la relation (7) est une conséquence immédiate de (6) et du choix de u_n :

(8) $$(1+\delta)\,u_{n-1} - h \leqslant u_n < (1+\delta)\,u_{n-1}.$$

2° Pour $n \geqslant 1$, on appelle

(9) $$G_n = [h^{-1} u_n^h,\ h^{-1}(h+1)\,u_n^h),$$

le plus petit intervalle qui contient B_n. On montrera que

(10) $$G_n \cap G_{n+2} = \emptyset \qquad (n \in \mathbf{N}^*).$$

Pour cela il suffit de montrer que

$$h^{-1}(h+1)\,u_n^h < h^{-1}\,u_{n+2}^h,$$

ce qui équivaut à $(1+\delta)\,u_n < u_{n+2}$

En effet,

$$u_{n+2} \geqslant (1+\delta)\,u_{n+1} - h \geqslant (1+\delta)((1+\delta)\,u_n - h) - h$$
$$= (1+\delta)\,u_n + \delta(1+\delta)\,u_n - h(1+2\delta) > (1+\delta)\,u_n,$$

d'après (6) et (4).

3° On va montrer la propriété (B. 3); (B. 1) en découle immédiatement. On a

(11) $$h B_0 = [0,\ u_1^h)$$

et, d'après le lemme 1, pour tout $n \geqslant 1$,

(12) $$h B_n = hh^{-1} u_n^h + [0, hu_n^h) = [u_n^h, (h+1) u_n^h).$$

Ainsi, il suffit de remarquer que les intervalles (12) se recouvrent. En effet, d'après le choix de u_n, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$u_n^h < (h+1) u_{n-1}^h,$$

ce qui démontre (B. 3).

4° Montrons la propriété (B. 2). Soit x un nombre réel assez grand $x \geqslant h^{-1} u_1^h$. Alors il existe un entier m tel que

(13) $$h^{-1} u_m^h \leqslant x < h^{-1} (h+1) u_m^h.$$

D'après (10) et la propriété (b. 1) du lemme 1, on obtient :

(14) $$B(x) \leqslant -1 + \textstyle\sum_{n=0}^{m+1} |B_n| \leqslant h^{-1} u_1^h + \sum_{n=1}^{m+1} 2 hu_n.$$

Posons $\alpha = (1+\delta/2))^{-1}$. D'après (4) et (8), pour $n \geqslant 1$, on a

$$\alpha^{-1} \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1+\delta,$$

et la relation (14) donne

$$\begin{aligned} B(x) &\leqslant h^{-1} u_1^h + 2 hu_m (1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}+1+\delta) \\ &\leqslant h^{-1} u_1^h + 2 hu_m \left(\frac{1}{1-\alpha} + 1 + \delta\right); \end{aligned}$$

compte tenu de la relation (13), ceci entraîne la propriété (B. 2).

5° Afin d'établir (B. 4), on remarque que

(15) $$(h-1)\mathscr{B}_t \subset [0, h^{-1}(h^2-1) u_t^h)$$

et que

(16) $$(h-1)\mathscr{B}_t \supset \textstyle\bigcup_{n=0}^{t} (h-1) B_n.$$

Par le lemme 1, $(h-1) B_n$ contient tous les entiers

$$z \equiv h^{-1}(h-1) u_n^h (\bmod u_n)$$

qui sont dans l'intervalle

$$H_n = h^{-1}(h-1) u_n^h + [0, (h-1) u_n^h) = [h^{-1}(h-1) u_n^h, h^{-1}(h^2-1) u_n^h).$$

Les intervalles H_n se recouvrent : en effet, il s'agit des intervalles (12) dont les extrémités ont été multipliées par $h^{-1}(h-1)$. En outre, on remarquera que les extrémités de H_n appartiennent à $(h-1) B_n$. Soit

$$(h-1)\mathscr{B}_t = \{0 = d_1 < d_2 < \ldots < d_l = h^{-1}(h^2-1) u_t^h\}.$$

Soit un entier r, $1 < r \leqslant l$. Alors d_r appartient à au moins un intervalle H_n. On va supposer que d_r n'est pas le plus petit élément de H_n (sinon, on considère H_{n-1} auquel d_r appartiendra également). On a

$$h^{-1}(h-1)u_n^h < d_r \leqslant h^{-1}(h^2-1)u_n^h. \tag{17}$$

D'après ce qui précède, on a

$$d_r - d_{r-1} \leqslant u_n < \left(\frac{h}{h-1}\right)^{1/h} d_r^{1/h},$$

ce qui achève la démonstration de la propriété (B. 4) et du lemme 2.

LEMME 3. — *Soit h un entier plus grand que* 1. *Il existe une suite croissante* $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *d'entiers* Q_k *congrus à* 1 *modulo* h :

$$Q_k = hq_k + 1,$$

tels que, pour tout $k \geqslant 2$, *on ait*

$$q_k^{1/h} \geqslant h \sum_{j=1}^{k-1} Q_j, \tag{18}$$

et une suite $\mathscr{D}$ *d'entiers qui vérifie :*

(D. 1) $\mathscr{D} \subset [0, q_1] \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} [Q_{k-1}+1, q_k]$,

(D. 2) $h\mathscr{D} = \mathbf{N} \setminus \{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$,

(D. 3) $D(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$.

Démonstration. — Les symboles $\{u_n\}$ et B_n désignent la suite et les ensembles introduits dans le Lemme 2.

1° On pose $Q_0 = -1$. La suite $\mathscr{D}$ sera définie sous la forme $\mathscr{D} = \bigcup_{k \geqslant 1} D_k$ avec $D_k \subset [Q_{k-1}+1, q_k]$, de sorte que la condition (D. 1) est vérifiée.

On pose

$$q_1 = Q_0 + 1 + h^{-1}(h+1)u_1^h, \tag{19}$$

et on vérifie (trivialement) que l'on a la minoration

$$q_1^{h-1} \geqslant h, \tag{20}$$

on pose également $D_1 = B_0 \cup B_1$.

2° Pour $k \geqslant 2$, on suppose qu'on a défini D_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$. On choisit un entier $t(k)$ assez grand pour que le nombre

$$q_k = Q_{k-1} + 1 + h^{-1}(h+1)u_{t(k)}^h \tag{21}$$

vérifie la relation (18). On définit

$$D_k = Z_k \cup \bigcup_{i=0}^{h-1} I_k^i,$$

où

$$Z_k = Q_{k-1}+1+\bigcup_{n=0}^{t(k)} B_n,$$

$$I_k^0 = [Q_{k-1}+1,\ Q_{k-1}+C_2\, q_{k-1}^{1/h}], \qquad \text{où} \quad C_2 = h^{1/h},$$

$$I_h^i = i(h-1)\, q_{k-1}+I_k^0 \qquad (i = 1,\ \dots,\ h-1).$$

Les relations (18) et (20) entraînent que $\max(I_k^{h-1}) \leqslant q_k$, donc D_k est contenu dans $[Q_{k-1}+1,\ q_k]$.

3° Démontrons la condition (D. 2) : du fait que la suite $\mathscr{D}$ ne contient pas d'élément plus grand que q_k, et au plus égal à $Q_k = hq_k+1$, il résulte que, pour $k \geqslant 1$, Q_k n'appartient pas à $h\,\mathscr{D}$; par conséquent, il suffit de montrer que

$$(22) \qquad [Q_{k-1}+1,\ hq_k] \subset h\,\mathscr{D}.$$

Nous laisserons au lecteur le soin d'effectuer cette vérification pour $k = 1$, et supposerons désormais $k \geqslant 2$; d'après la propriété (B. 3), lemme 2, et la définition de Z_k, on a

$$(23) \quad h\, Z_k = [h(Q_{k-1}+1),\ h(Q_{k-1}+1)+(h+1)\, u_{t(k)}^h] = [h(Q_{k-1}+1),\ hq_k].$$

D'après la propriété (B. 4) du lemme 2, les éléments de l'ensemble

$$(h-1)\, Z_{k-1} = \{(h-1)(Q_{k-2}+1) = y_1 < y_2 < \dots < y_l = (h-1)\, q_{k-1}\},$$

vérifient :

$$y_m - y_{m-1} \leqslant \left(\frac{h}{h-1}\right)^{1/h} y_m^{1/h} \leqslant C_2\, q_{k-1}^{1/h} \qquad (1 < m \leqslant l).$$

Puisque la différence $y_m - y_{m-1}$ est plus petite que la longueur de l'intervalle I_k^0, l'ensemble

$$J_0 = (h-1)\, Z_{k-1}+I_k^0,$$

est l'intervalle

$$J_0 = [Q_{k-1}+1+(h-1)(Q_{k-2}+1),\ (h-1)\, q_{k-1}+Q_{k-1}+C_2\, q_{k-1}^{1/h}].$$

La longueur de J_0 dépasse strictement $(h-1)\, q_{k-1}$. Par conséquent J_0 et $J_1 = J_0+(h-1)\, q_{k-1}$ se recouvrent, et ainsi de suite; en posant $J_i = J_0+i\,(h-1)\, q_{k-1}$, $1 \leqslant i \leqslant h-1$, on a donc

$$(24) \qquad \bigcup_{i=0}^{h-1} J_i = [Q_{k-1}+1+(h-1)(Q_{k-2}+1),$$
$$(h-1)\, q_{k-1}+Q_{k-1}+C_2\, q_{k-1}^{1/h}+(h-1)^2\, q_{k-1}].$$

Il est facile de constater que les intervalles dans les relations (23) et (24) se recouvrent. Donc, on obtient :

$$(25) \qquad [Q_{k-1}+1+(h-1)(Q_{k-2}+1),\ hq_k) \subset h\mathscr{D}.$$

Cette dernière relation entraîne immédiatement (22), en remarquant que 0 appartient à $\mathscr{D}$ et que

$$[Q_{k-1}+1,\ Q_{k-1}+(h-1)(Q_{k-2}+1)) \subset I_k^0.$$

4° On va établir la majoration (D. 3). D'abord, on va majorer $D(Q_k)$. D'après la définition de D_k, on a

$$|D_k| \leqslant |Z_k|+h\,|I_k^0| \leqslant C_1\,q_k^{1/h}+h\,C_2\,q_{k-1}^{1/h} \leqslant C_3\,q_k^{1/h},$$

d'où, en utilisant (18), on obtient :

$$D(Q_k) = \sum_{j=1}^{k} |D_j| \leqslant C_3 \sum_{j=1}^{k} q_j^{1/h} \leqslant 2\,C_3\,q_k^{1/h},$$

Soit un nombre réel $x \geqslant 1$. On lui associe un k tel que $Q_{k-1} \leqslant x < Q_k$. On a

$$\begin{aligned} D(x) &\leqslant D(Q_{k-1})+h\,|I_k^0|+B(x-Q_{k-1}) \\ &\leqslant 2\,C_3\,q_{k-1}^{1/h}+h\,C_2\,q_{k-1}^{1/h}+C_1\,x^{1/h} \leqslant C_4\,x^{1/h}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme.

THÉORÈME 1. — *Étant donnés deux entiers $k \geqslant 2$ et $s \geqslant 1$, il existe une non-base asymptotique $\mathscr{A}$, s-maximale d'ordre h telle que $A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$.*

Démonstration. — Les entiers Q_k et les ensembles D_k sont ceux qui ont été introduits dans le lemme 3.

1° On va définir la suite $\mathscr{A}$ sous la forme

$$\mathscr{A} = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k,$$

où, pour tout $k \geqslant 1$,

$$D_k \subset A_k \subset [Q_{k-1}+1,\ Q_k).$$

Pour $1 \leqslant k \leqslant s$, on définit $A_k = D_k$. Soit $f(s+1)$ un ensemble de $s-1$ entiers distincts non négatifs au plus égaux à Q_{s+1} et dont aucun n'appartient à $\bigcup_{j \leqslant s} A_j$ (cela est possible : on peut prendre par exemple $\{ Q_1-1, \ldots, Q_{s-1}-1 \}$); on pose :

$$A_{s+1} = D_{s+1} \cup E_{s+1}, \qquad \text{où} \quad E_{s+1} = L(s+1,\ s),$$

avec, pour k, l entiers positifs, $k > l$, $k \geqslant s+1$,

$$(26) \qquad L(k,\ l) = \{ Q_k - z \mid z \in [0,\ h^{-1} Q_l] \setminus (h-1)((\textstyle\bigcup_{j<k} A_j) \cup f(k)) \}.$$

Ayant défini A_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, et $f(j)$, $s+1 \leqslant j \leqslant k-1$, on définit d'abord $f(k)$ comme étant un ensemble de $s-1$ entiers distincts positifs au plus égaux à Q_k et donc aucun n'appartient à $\bigcup_{j<k} A_k$, la fonction f devant vérifier la condition suivante :

Pour chaque ensemble W de $s-1$ entiers positifs n'appartenant pas à la suite $\mathscr{A}$, l'image réciproque $f^{-1}(W)$ est de cardinal infini (le lecteur construira sans difficulté une telle fonction).

Voici comment on définit A_k : s'il existe un $j < k$ pour lequel $f(j) = f(k)$, soit

$$k' = \max\{j < k;\ f(j) = f(k)\};$$

on pose

$$A_k = D_k \cup E_k \cup \{a(k)\} \tag{27}$$

où

$$E_k = L(k, k')$$

et

$$a(k) = Q_k - Q_{k'} + 1. \tag{28}$$

S'il n'existe pas de $j < k$ tel que $f(j) = f(k)$, on pose

$$A_k = D_k \cup E_k \qquad \text{avec} \quad E_k = L(k, k-1). \tag{29}$$

2° On va montrer que, si $|W| = s-1$ avec $\mathscr{A} \cap W = \varnothing$, alors la suite $\mathscr{A} \cup W$ est non-base asymptotique d'ordre h. On montre, par récurrence sur k appartenant à $f^{-1}(W)$, que Q_k n'appartient pas à $h(\mathscr{A} \cup W)$ (on rappelle que $f^{-1}(W)$ est de cardinal infini). Soit d'abord $k = \min f^{-1}(W)$. Supposons

$$Q_k = a_1 + \ldots + a_h, \quad a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_h, \qquad a_i \in \mathscr{A} \cup W \quad (1 \leqslant i \leqslant h). \tag{30}$$

Puisque $Q_k = hq_k + 1$, on a $a_h > q_k$, donc $a_h \in E_k$ par (29). Mais a_h est de la forme

$$a_h = Q_k - \textstyle\sum_{i=1}^{h-1} a_i, \qquad a_i \in (\mathscr{A} \cup f(k)), \tag{31}$$

ce qui n'est pas possible pour un élément de E_k.

Soit $k > \min(f^{-1}(W))$. Posons

$$k' = \max\{j \in f^{-1}(W), j < k\}. \tag{32}$$

On suppose que Q'_k n'est pas somme de h éléments de $\mathscr{A} \cup W$, et on va démontrer que Q_k n'appartient pas à $h(\mathscr{A} \cup W)$. En effet, si Q_k admettait une écriture de la forme (30), alors a_h appartiendrait à $E_k \cup \{a(k)\}$. Mais a_h est de la forme (31), ce qui n'est possible ni pour les éléments de E_k, par définition, ni pour

$$a(k) = Q_k - (Q_{k'} - 1),$$

car, si $Q_{k'} - 1$ appartenait à $(h-1)(\mathscr{A} \cup W)$, alors $Q_{k'}$, lui, appartiendrait à $h(\mathscr{A} \cup W)$, ce qui est absurde par l'hypothèse de récurrence.

3° Soit W un ensemble de $s-1$ entiers positifs qui ne sont pas dans la suite $\mathscr{A}$; d'après le paragraphe précédent, on a

$$h(\mathscr{A} \cup W) \subset \mathbf{N} \setminus \{Q_k;\ f(k) = W\}.$$

Par conséquent, si w n'est pas dans $\mathscr{A}$, alors

$$h(\mathscr{A} \cup \{w\}) \subset \mathbf{N} \setminus \{Q_k;\ w \in f(k)\}. \tag{33}$$

Par la suite, on démontrera la propriété suivante :

(P. 1) *Les deux ensembles qui figurent au premier et au deuxième membre de la relation* (33) *ne diffèrent que d'un nombre fini d'éléments.*

Cette propriété entraîne immédiatement que $\mathscr{A}$ est une non-base s-maximale. Soit en effet

$$S = \{w_1, \ldots, w_s\},$$

un ensemble de s nombres naturels qui n'appartiennent pas à $\mathscr{A}$. D'après (33) et (P. 1), l'ensemble $h(\mathscr{A} \cup S)$ est égal, à un nombre fini d'éléments près, à

$$\bigcup_{r=1}^{s} (\mathbf{N} \setminus \{Q_k;\ w_r \in f(k)\}) = \mathbf{N},$$

c'est-à-dire $\mathscr{A} \cup S$ est une base asymptotique d'ordre h.

4° Démontrons d'abord la propriété (P. 2) ci-dessous, dont on se servira par la suite, afin d'établir (P. 1).

(P. 2) *Soit* $W \subset \mathbf{N}$ *avec* $|W| = s-1$ *et* $\mathscr{A} \cap W = \emptyset$. *Si* w *n'est élément ni de* $\mathscr{A}$ *ni de* W, *alors, pour tout* k *dans* $f^{-1}(W)$, k *suffisamment grand,* Q_k *appartient à* $h(\mathscr{A} \cup \{w\})$.

Si k appartient à $f^{-1}(W)$, on désigne par k' le plus grand $j < k$ pour lequel $f(j) = W$ (*cf.* relation (32)). Parmi les éléments de $f^{-1}(W)$, on choisit $k(1), \ldots, k(h-2)$ avec $\min f^{-1}(W) < k(1) < \ldots < k(h-2)$ et tels que

$$\begin{gathered} w \leqslant h^{-1} Q_{k'(1)}, \\ a(k(1)) \leqslant h^{-1} Q_{k'(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a(k(h-3)) \leqslant h^{-1} Q_{k'(h-2)}. \end{gathered}$$

On va montrer que l'entier

$$w' = w + a(k(1)) + \ldots + a(k(h-2)), \tag{34}$$

n'appartient pas à $(h-1)(\mathscr{A} \cup W)$. Supposons le contraire

$$w' = a_0 + a_1 + \ldots + a_{h-2}, \qquad a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_{h-2},$$
$$a_i \in (\mathscr{A} \cup W), \qquad 0 \leqslant i \leqslant h-2.$$

Le choix des $k(i)$, $1 \leqslant i \leqslant h-2$, entraîne que le nombre w' est plus grand que $(h-1)\, q_{k(h-2)}$ et plus petit que le minimum de $E_{k(h-2)}$. Par conséquent, $a_{h-2} = a(k(h-2))$. En raisonnant de la même manière on obtient :

$$a_{h-3} = a(k(h-3)), \qquad \ldots, \qquad a_1 = a(k(1))$$

et donc $a_0 = w$, ce qui est absurde car w n'appartient ni à $\mathscr{A}$ ni à W.

Puisque w' n'appartient pas à $(h-1)(\mathscr{A} \cup W)$, on conclut que, pour tout k dans $f^{-1}(W)$, k suffisamment grand (tel que $w' \leqslant h^{-1} Q_{k'}$), le nombre $Q_k - w'$ appartient à E_k et donc

$$Q_k = (Q_k - w') + w + a(k(1)) + \ldots + a(k(h-2)),$$

est somme de h éléments de $\mathscr{A} \cup \{ w \}$.

5° Démontrons la propriété (P. 1) : on pose

$$\mathscr{K} = \{ k;\ w \notin f(k) \}.$$

On veut montrer que, pour presque tout k dans $\mathscr{K}$,

$$Q_k \in h(\mathscr{A} \cup \{ w \}). \tag{35}$$

Soit S_1 un ensemble de $s-1$ entiers positifs avec $w \notin S_1$ et $\mathscr{A} \cap S_1 = \emptyset$. Parmi les éléments de $f^{-1}(S_1)$, on choisit les entiers

$$\min f^{-1}(S_1) < k(1, 1) < \ldots < k(1, h-2),$$

tels que

$$w \leqslant h^{-1} Q_{k'(1,1)},$$
$$a(k(1, 1)) \leqslant h^{-1} Q_{k'(1,2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a(k(1, h-3)) \leqslant h^{-1} Q_{k'(1,h-2)}.$$

Alors l'entier

$$w' = w + a(k(1, 1)) + \ldots + a(k(1, h-2)), \tag{36}$$

n'appartient pas à $(h-1)(\mathscr{A} \cup S_1)$. Considérons les entiers, autres que w, qui sont au plus égaux à w' et qui n'appartiennent pas à $\mathscr{A}$:

$$\{b(1) < b(2) < \ldots < b(m(1)) = w'\} = (\mathbf{N} \setminus \mathscr{A}) \cap ((0, w'] \setminus \{w\}).$$

On peut écrire $\mathscr{K}$ sous la forme

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}(0) \cup (\bigcup_{i=1}^{m(1)} \mathscr{K}(i)), \tag{37}$$

où

$$\mathscr{K}(0) = \{k \in \mathscr{K} ; \min f(k) > w'\},$$
$$\mathscr{K}(i) = \{k \in \mathscr{K} ; b(i) \in f(h)\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m(1).$$

On va d'abord montrer que, pour presque tout k dans $\mathscr{K}(0)$, Q_k appartient à $h(\mathscr{A} \cup \{w\})$. Soit k_0 tel que

$$w' \leqslant h^{-1} Q_{k_0-1}.$$

Les éléments de $\mathscr{K}(0)$ sont de deux sortes :

(i) Ceux pour lesquels $\min f^{-1}(f(k)) \geqslant k_0$. Pour chaque tel k, on a

$$w' \notin (h-1)(\mathscr{A} \cup f(k)),$$

car, d'une part, $w' \notin (h-1)\mathscr{A}$ et, d'autre part, k est dans $\mathscr{K}(0)$ où, par définition, $w' < \min f(k)$. Il s'en suit que $Q_k - w'$ appartient à E_k, et donc Q_k est somme de h éléments de $\mathscr{A} \cup \{w\}$.

(ii) Le reste des éléments k de $\mathscr{K}(0)$ appartiennent à un nombre fini $p \leqslant k_0$ d'images réciproques $f^{-1}(W_n)$, $1 \leqslant n \leqslant p$, avec $w \notin W_n$, pour tout $1 \leqslant n \leqslant p$, et, d'après la propriété (P. 2), presque tous les Q_k correspondants appartiennent à $h(\mathscr{A} \cup \{w\})$.

D'après ce qui précède, il suffit de fixer un i_1, $1 \leqslant i_1 \leqslant m(1)$, et de démontrer que, pour presque tout k dans $\mathscr{K}(i_1)$, Q_k appartient à $h(\mathscr{A} \cup \{w\})$.

Soit S_2 un ensemble de $s-1$ entiers positifs tels que

$$S_2 \cap \mathscr{A} = \varnothing, \qquad w \notin S_2, \qquad b(i_1) \in S_2.$$

D'une manière analogue à ce que l'on a fait pour S_1, on choisit des entiers

$$k(2, 1), \ldots, k(2, h-2) \in f^{-1}(S_2),$$

et on obtient :

$$w'' = w + a(k(2, 1)) + \ldots + a(k(2, h-2)) \notin (h-1)(\mathscr{A} \cup S_2).$$

Soit
$$\{b(1) < b(2) < \ldots < b(m(2))\} = (\mathbf{N}\setminus\mathscr{A}) \cap ([0, w'']\setminus\{w\}).$$

On peut écrire :

$$\mathscr{K}(i_1) = \mathscr{K}(i_1, 0) \cup (\bigcup_{i=1, i \neq i_1}^{m(2)} \mathscr{K}(i_1, i)),$$

où

$$\mathscr{K}(i_1, 0) = \{k \in \mathscr{K}(i_1);\ \min(f(k)\setminus\{b(i_1)\}) > w''\}.$$
$$\mathscr{K}(i_1, i) = \{k \in \mathscr{K}(i_1);\ b(i) \in f(k)\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m(2), \quad i \neq i_1.$$

Ainsi le problème se ramène à fixer un i_2 et à démontrer que, pour presque tout k dans $\mathscr{K}(i_1, i_2)$, Q_k est somme de h éléments de $\mathscr{A} \cup \{w\}$.

En raisonnant ainsi de proche en proche, il suffit de montrer que, pour presque tout k appartenant à un certain ensemble

$$\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_{s-2}) = \{k \in \mathscr{K};\ \{b(i_1), \ldots, b(i_{s-2})\} \subset f(k)\},$$

Q_k est dans $h(\mathscr{A} \cup \{w\})$. Or, soit :

$$S_{s-1} = \{b(i_1), \ldots, b(i_{s-2}), b\},$$

avec $b \neq w$, $b \notin \mathscr{A}$. On décompose

$$\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_{s-2}) = \mathscr{K}(i_1, \ldots, i_{s-2}, 0)$$
$$\cup (\bigcup_{i=1; i \neq i_1, \ldots, i_{s-2}}^{m(s-1)} \mathscr{K}(i_1, \ldots, i_{s-2}, i)).$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait sur $\mathscr{K}(0)$ est valide pour $\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_{s-2}, 0)$, tandis que, d'après la propriété (P. 2), pour presque tout k appartenant à

$$\mathscr{K}(i_1, \ldots, i_{s-2}, i) = f^{-1}(\{b(i_1), \ldots, b(i_{s-2}), b(i)\}),$$

Q_k est somme de h termes de $\mathscr{A} \cup \{w\}$, ce qui démontre la propriété (P. 1).

6° La majoration $A(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$ s'obtient facilement à partir de la relation (18), de la majoration

$$D(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$$

et du fait que, pour $k \geqslant s+1$,

$$|E_k| \leqslant h^{-1} Q_{k-1},$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Il existe une non-base asymptotique $\mathscr{A}'$ d'ordre h avec $A'(x) = \mathcal{O}(x^{1/h})$ et telle que $\mathscr{A}'$ ne soit pas contenue dans une non-base asymptotique 1-maximale d'ordre h.*

Démonstration. — Les entiers Q_k et les ensembles D_k sont ceux qui ont été introduits dans le lemme 3.

1° On va définir la suite $\mathscr{A}'$ sous la forme $\mathscr{A}' = \bigcup_{k \geqslant 1} A'_k$ avec

$$D_k \subset A'_k \subset [Q_{k-1}+1, Q_k).$$

Soit

$$\mathscr{Q} = \{ q_k + 1 \}_{k=1}^{\infty}.$$

On pose $A'_1 = D_1$. Ayant défini A'_j, $1 \leqslant j \leqslant k-1$, on pose

$$A'_k = D_k \cup F_k \cup \{ a^*(k) \},$$

où

$$F_k = \{ Q_k - z ;\ z \in [0, h^{-1} Q_{k-1}) \setminus (h-1)((\textstyle\bigcup_{j<k} A'_j) \cup \mathscr{Q}) \}$$

et

$$a^*(k) = Q_k - Q_{k-1} + 1.$$

2° Montrons, par récurrence sur k, que l'entier $hq_k = Q_k - 1$ n'appartient pas à $(h-1)(\mathscr{A}' \cup \mathscr{Q})$. Ceci étant vrai pour $k = 1$, supposons que $Q_{k-1} - 1$ n'appartient pas à $(h-1)(\mathscr{A}' \cup \mathscr{Q})$. On montrera par l'absurde que $Q_k - 1$ n'est pas dans $(h-1)(\mathscr{A}' \cup \mathscr{Q})$. Soit :

$$Q_k - 1 = hq_k = a_1 + \ldots + a_{h-1}, \quad a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_{h-1},$$
$$a_i \in \mathscr{A}' \cup \mathscr{Q} \quad (1 \leqslant i \leqslant h-1).$$

On a $a_{h-1} > q_k + 1$, donc a_{h-1} appartient à $F_k \cup \{ a^*(k) \}$.

Si $a_{h-1} \in F_k$, on a une contradiction car a_{h-1} est de la forme

$$a_{h-1} = Q_k - (1 + \textstyle\sum_{i=1}^{h-2} a_i), \qquad a_i \in \mathscr{A}' \cup \mathscr{Q} \quad (1 \leqslant i \leqslant h-2).$$

Si $a_{h-1} = a^*(k) = Q_k - Q_{k-1} + 1$, on obtient de nouveau une contradiction :

$$Q_{k-1} - 1 = 1 + \textstyle\sum_{i=1}^{h-2} a_i \in (h-1)(\mathscr{A} \cup \mathscr{Q}).$$

3° Montrons que la suite $\mathscr{A}'$ est non-base asymptotique d'ordre h. Plus précisément on va montrer que

$$h\mathscr{A}' = \mathbf{N} \setminus \{ Q_k \}_{k=1}^{\infty}. \tag{38}$$

Puisque la suite $\mathscr{A}'$ contient la suite $\mathscr{D}$, et que cette dernière vérifie la propriété (D. 2), il suffit de montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, Q_k n'appartient pas à $h\mathscr{A}'$. Ceci étant vrai pour $k = 1$, on suppose que Q_{k-1} n'appartient pas à $h\mathscr{A}'$, et on va démontrer que Q_k n'est pas dans $h\mathscr{A}'$. On raisonne par l'absurde. Soit :

$$Q_k = a_1 + \ldots + a_h, \quad a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_h, \qquad a_i \in \mathscr{A}' \quad (1 \leqslant i \leqslant h).$$

Puisque $Q_k = hq_k+1$, on aura $a_h > q_k$, donc a_h sera un élément de $F_k \cup \{ a^*(k) \}$. Mais a_h est de la forme

$$a_h = Q_k - \sum_{i=1}^{h-1} a_i, \qquad a_i \in \mathscr{A}' \quad (1 \leqslant i \leqslant h-1),$$

ce qui n'est possible ni pour les éléments de F_k, par définition, ni pour $a^*(k) = Q_k-(Q_{k-1}-1)$: si $Q_{k-1}-1$ appartenait à $(h-1)\mathscr{A}'$, alors Q_{k-1}, lui, appartiendrait à $h\mathscr{A}'$, ce qui est absurde par hypothèse.

4° Dans le but de déterminer, dans la 5e étape de la démonstration, toutes les non-bases d'ordre h qui contiennent la suite $\mathscr{A}'$, montrons à présent la propriété suivante :

Si d n'appartient ni à $\mathscr{A}'$ ni à $\mathscr{Q}$, alors la suite $\mathscr{A}' \cup \{ d \}$ est une base asymptotique d'ordre h.

On choisit successivement les entiers $k(1), \ldots, k(h-2)$ tels que

$$\begin{gathered} d \leqslant h^{-1} Q_{k(1)-1}, \\ a^*(k(1)) \leqslant h^{-1} Q_{k(2)-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a^*(k(h-3)) \leqslant h^{-1} Q_{k(h-2)-1}. \end{gathered}$$

On va montrer que l'entier

$$d' = d + a^*(k(1)) + \ldots + a^*(k(h-2)),$$

n'appartient pas à $(h-1)(\mathscr{A}' \cup \mathscr{Q})$. Supposons le contraire :

$$\begin{gathered} d' = a_0 + a_1 + \ldots + a_{h-2}, \quad a_0 \leqslant \ldots \leqslant a_{h-2}, \\ a_i \in \mathscr{A}' \cup \mathscr{Q} \quad (0 \leqslant i \leqslant h-2). \end{gathered}$$

On remarque que

$$d' > a^*(k(h-2)) > (h-1)(q_{k(h-2)}+1) \tag{39}$$

et que

$$\begin{aligned} d' &\leqslant Q_{k(h-2)} - Q_{k(h-2)-1} + 1 + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{h-2} Q_{k(i)-1} \\ &< Q_{k(h-2)} - \frac{1}{h} Q_{k(h-2)-1} \leqslant \min F_{k(h-2)}. \end{aligned} \tag{40}$$

Les relations (39) et (40) entraînent que $a_{h-2} = a^*(k(h-2))$. En raisonnant de la même manière on obtient :

$$a_{h-3} = a^*(k(h-3)), \qquad \ldots, \qquad a_1 = a^*(k(1))$$

et donc $a_0 = d$, ce qui est absurde, car d n'appartient pas à $\mathscr{A}' \cup \mathscr{Q}$.