

BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES VEY

Algèbres commutatives de champs de vecteurs isochores

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 423-432

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__423_0

© Bulletin de la S. M. F., 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES COMMUTATIVES DE CHAMPS DE VECTEURS ISOCHORES

PAR

JACQUES VEY (*)

[Centre univ. Savoie et Inst. Fourier]

RÉSUMÉ. — Nous montrons qu'une sous-algèbre de Cartan de champs de vecteurs isochores peut être analytiquement réduite à sa forme normale.

ABSTRACT. — We prove that a Cartan subalgebra of isochore vector-fields can be analytically reduced to its normal form.

THÉORÈME. — Soit X_1, X_2, \dots, X_{n-1} une famille de $n-1$ champs de vecteurs sur \mathbb{C}^n , analytiques au voisinage de l'origine, commutant deux à deux, isochores pour une certaine forme volume ω (i. e. les dérivées de Lie $\theta_{X_i} \omega$ sont nulles; les groupes à un paramètre correspondant préservent ω). Supposons les champs X_i tous nuls à l'origine, et leurs jets d'ordre 1 (qui sont des transformations linéaires de \mathbb{C}^n) diagonalisables, et linéairement indépendants. Il existe alors des coordonnées analytiques x_1, \dots, x_n au voisinage de l'origine, qui soient isochores (i. e. $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$), et qui permettent d'écrire :

$$X_i = \sum_{j=1}^{n-1} F_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} \right) \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

avec des fonctions analytiques d'une variable F_{ij} convenables.

Une première conséquence de cet énoncé est l'existence d'une intégrale première commune aux X_i , nommément le produit $x_1 \dots x_n$. En considérant tous les champs

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(x_1, \dots, x_n) \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}} \right),$$

(*) Texte reçu le 20 janvier 1979.

Jacques VEY, Mathématiques pures, Institut Fourier, B.P. n° 116, 38402 Saint-Martin-d'Hères.

Classification matières AMS (MOS) 1980 : 58 F 05.

Vedettes matières : Algèbres commutatives. Champs de vecteurs isochores.

on obtient une sous-algèbre abélienne maximale \mathcal{L} de l'algèbre des champs isochores pour $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$; tronquée modulo $m^2 \mathbf{C}^n$ (i. e. les champs nuls à l'ordre 1), cette algèbre donne toutes les combinaisons linéaires complexes des $x_j (\partial/\partial x_j) - x_{j+1} (\partial/\partial x_{j+1})$, c'est-à-dire la sous-algèbre de Cartan standard dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$. Des calculs assez simples font voir que le normalisateur de \mathcal{L} dans l'algèbre des champs isochores se réduit à \mathcal{L} , tandis que son normalisateur dans l'algèbre de tous les champs contient en outre les champs $f(x_1 \dots x_n) \sum_1^n x_i (\partial/\partial x_i)$, f fonction analytique arbitraire d'une variable.

Ce théorème est lié aux questions de forme normale pour les champs isochores. Rappelons la situation : soit X un champ sur \mathbf{C}^n , analytique au voisinage de l'origine, isochore pour une certaine forme volume ω , et nul à l'origine. Le jet d'ordre 1 de X , qui est une transformation linéaire de \mathbf{C}^n , a une trace nulle, à cause de la condition isochore; et si l'on suppose ses valeurs propres indépendantes sur \mathbf{Z} modulo cette relation de trace nulle, alors on peut trouver des coordonnées x_1, \dots, x_n *formelles* dans lesquelles, d'une part $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, et d'autre part

$$X = \sum_1^{n-1} F_j(x_1 \dots x_n) \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - x_{j+1} \frac{\partial}{\partial x_{j+1}} \right)$$

avec des fonctions formelles d'une variable F_j convenables; ce qu'on écrit aussi (*cf.* [2]) :

$$X = \sum_1^n G_j(x_1 \dots x_n) x_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

les fonctions G_j étant alors astreintes à $G_1 + G_2 + \dots + G_n = 0$.

La question se pose d'obtenir cette normalisation dans des coordonnées analytiques, et ne semble pas avoir reçu de réponse en dimension ≥ 3 (pour la dimension 2, *cf.* [6]). On voit maintenant le rapport avec le présent théorème, dans lequel cette normalisation analytique est obtenue simultanément pour les $n-1$ champs X_i , comme si pour chacun d'eux le fait d'avoir un commutant fourni contribuait à adoucir son comportement. On retrouve la morale du cas symplectique : alors que la normalisation analytique d'un champ symplectique au voisinage d'un de ses zéros est plus qu'hypothétique (*cf.* [8]), la normalisation simultanée d'une famille abélienne maximale ne requiert que quelques hypothèses de généricité très banales (*cf.* [9]).

1. — Quelques notations avant d'engager la preuve du théorème. Si x_1, \dots, x_n est un système de coordonnées analytiques ou formelles sur \mathbb{C}^n , nulles en 0, on posera $P^x = x_1 \dots x_n$, et, pour $1 \leq i \leq n-1$,

$$E_i^x = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_{i+1} \frac{\partial}{\partial x_{i+1}},$$

$$\varepsilon_i^x = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \dots + \frac{dx_i}{x_i}.$$

Noter les relations $\langle E_i^x, \varepsilon_j^x \rangle = \delta_i^j$ (symbole de Kronecker); et aussi la formule :

$$(1) \quad df = \sum_{j=1}^{n-1} (E_j^x \cdot f) \varepsilon_j^x + x_n \frac{df}{\partial x_n} \frac{dP^x}{P^x},$$

valable pour toute fonction f analytique ou formelle.

Considérons les jets d'ordre 1 des champs X_i de l'hypothèse du théorème : ce sont des transformations linéaires de trace nulle, diagonalisables, et commutant deux à deux. On peut donc les diagonaliser simultanément; puis former une combinaison linéaire des X_i à coefficients complexes, soit X , telle que les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ du jet d'ordre 1, $j^1 X$, soient exemptes de toute relation linéaire à coefficients entiers autre que la trace nulle : $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0$.

A ce champ X s'applique le théorème de normalisation signalé dans l'introduction : on peut trouver des coordonnées formelles t_1, \dots, t_n centrées à l'origine, isochores ($\omega = dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$), et permettant une écriture

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} F_i(P^t) E_i^t,$$

on a d'ailleurs $\lambda_1 = F_1(0)$, $\lambda_2 = F_2(0) - F_1(0)$, \dots , $\lambda_n = -F_{n-1}(0)$.

Cela étant, je dis que tout champ isochore Y , commutant avec X (donc en particulier X_1, \dots, X_{n-1}), se normalise dans les coordonnées t_1, \dots, t_n . Supposons en effet que Y se normalise jusqu'à l'ordre $l-1$:

$$Y = \sum_{j=1}^{n-1} G_j(P^t) E_j^t + Z + m^{l+1} \mathbb{C}^n,$$

où les G_j sont des fonctions convenables, et Z un champ homogène de degré l , nécessairement isochore puisque Y l'est par hypothèse, et que les termes normalisés le sont automatiquement. La commutation de X et Y implique $[j^1 X, Z] = 0$. Posons

$$Z = \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha|=l} Z_{j,\alpha} t^\alpha \partial / \partial t_j,$$

on devra avoir

$$0 = [j^1 X, Z] = \sum_{j=1}^n \sum_{|\alpha|=i} (-\lambda_j + \sum_1^n \alpha_i \lambda_i) Z_{j,\alpha} t^\alpha \partial/\partial t_j.$$

Il en résulte que le coefficient $Z_{j,\alpha}$ est nul, sauf si

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{j-1} = \alpha_j - 1 = \alpha_{j+1} = \dots = \alpha_n$$

(la somme des λ_i est nulle et c'est la seule relation entière liant les λ_i) et que Z s'écrit :

$$Z = (P^t)^k \sum_{j=1}^n c_j t_j \partial/\partial t_j.$$

avec un exposant entier k et des coefficients numériques c_j convenables. Décomposant les n opérateurs $t_1 \partial/\partial t_1, \dots, t_n \partial/\partial t_n$ sur les n opérateurs $E_1^t, \dots, E_{n-1}^t, H = \sum_1^n t_i \partial/\partial t_i$, nous écrivons :

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1} c'_j (P^t)^k E_j^t + c'_n (P^t)^k H.$$

Les $n-1$ premiers termes sont isochores et peuvent être incorporés à la partie normalisée de Y ; quant au dernier terme, il est nul, comme on le voit tout de suite en écrivant que la divergence de Z est nulle. Conclusion : le champ Y se normalise jusqu'à l'ordre l , et par récurrence, on conclut qu'il se normalise complètement dans les coordonnées (t_i) .

Ainsi nous tenons un système de coordonnées formelles t_1, \dots, t_n , isochore, où les $n-1$ champs X_i s'écrivent simultanément sous forme normale

$$(2) \quad X_i = \sum_{j=1}^{n-1} F_{ij}(P^t) E_j^t.$$

On observera que la matrice $F_{ij}(P^t)$ est inversible, à cause de l'indépendance des $j^1 X_i$ à l'origine.

2. — Soit \mathcal{S} (resp. $\hat{\mathcal{S}}$) le module des formes différentielles de degré 1 analytiques (resp. formelles) annulées par tous les X_i .

LEMME. — $\hat{\mathcal{S}}$ est le module libre de base dP^t .

En effet, soit $\xi = \sum_1^n \xi_i dt_i \in \hat{\mathcal{S}}$. Les $n-1$ équations $\langle \xi, X_i \rangle = 0$ peuvent être remplacées par $\langle E_i^t, \xi \rangle = 0$ (voyez la fin du numéro précédent), c'est-à-dire

$$t_1 \xi_1 = t_2 \xi_2 = \dots = t_n \xi_n.$$

De ceci résulte que ξ_1 est divisible par le monôme P^t/t_1 , ξ_2 par P^t/t_2 , puis que ξ est proportionnelle à dP^t .

Nous nous appuyons maintenant sur le théorème de clôture des modules ([3], section 6.3; c'est le cas linéaire du théorème d'Artin [1]; voir aussi [7], section III.4) pour conclure que \mathcal{S} ne se réduit pas à (0), et qu'on peut y trouver une forme ξ ayant même partie principale que dP^t ; alors ξ est une base du module libre $\hat{\mathcal{S}}$. La codimension de son ensemble d'annulation peut se calculer dans les coordonnées formelles (t); et là il coïncide avec l'ensemble critique de P^t , c'est-à-dire la réunion des $(n-2)$ -plans $t_i = t_j = 0$ ($i \neq j$). Il est donc de codimension 2. Par conséquent, d'après un théorème récent de B. MALGRANGE ([4]; voir aussi [5]) sur les singularités de feuilletages, il existe une fonction analytique u , égale à 1 à l'origine, telle que la 1-forme $u \xi$ soit fermée. En appelant J la fonction analytique nulle à l'origine, dont $u \xi$ est la différentielle, on voit que J est une intégrale première commune aux champs X_1, \dots, X_{n-1} , et qu'elle a même partie principale que P^t .

Dans les coordonnées formelles (t), il est clair que les intégrales premières communes aux X_i sont les fonctions de P^t . Il y a donc une écriture en série formelle

$$J = P^t + c_2 (P^t)^2 + \dots,$$

que nous pouvons lire :

$$J = t_1 \times t_2 \times \dots \times t_{n-1} \times [t_n (1 + c_2 P^t + \dots)],$$

comme une factorisation de J en n facteurs indépendants à l'origine, dans les fonctions formelles. Mais, d'après le théorème d'Artin ([1], en version non linéaire cette fois; voir aussi [7], section III.4), il existe une factorisation

$$J = y_1 y_2 \dots y_n,$$

en n facteurs analytiques tangents à l'ordre 1 aux précédents. Ces n fonctions peuvent donc être utilisées comme coordonnées analytiques au voisinage de l'origine; et dans ces coordonnées (qui ne sont pas forcément isochores), le produit $P^y = y_1 \dots y_n$ est une intégrale première commune des X_i .

3. — Nous appellerons *système associé* aux $n-1$ champs X_i une famille $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ de formes différentielles de degré 1, méromorphes de variété polaire commune $P^y = 0$, et vérifiant les équations :

$$\langle \xi_i, X_j \rangle = \delta_j^i \quad (1 \leq i, j \leq n-1).$$

A supposer qu'un tel objet existe, il ne sera défini que modulo (dP^y) , l'idéal différentiel engendré par dP^y .

Plaçons-nous d'abord dans les coordonnées formelles normalisantes t_1, \dots, t_n . Compte tenu des formules (2) et de la définition des formes méromorphes ε_i donnée au début du n° 1, on trouve

$$(3) \quad \xi_i = \sum_{j=1}^{n-1} G_{ij}(P^t) \varepsilon_j^t + (dP^t).$$

Puisque le quotient P^t/P^y est une unité dans les fonctions formelles, les formes $\xi_i^t = P^y \xi_i$ sont exemptes de dénominateur. Donc le système \mathcal{O} -linéaire d'équations :

$$\langle \xi_i^t, X_j \rangle = P^y \delta_i^j \quad (1 \leq i, j \leq n-1),$$

a des solutions dans les formes à coefficients fonctions formelles; par clôture des modules, il en aura aussi dans les formes holomorphes; et les quotients ξ_i^t/P^y fournissent alors un système associé, d'ailleurs unique modulo (dP^y) . En outre, un phénomène important transparait sur les formules (3) : les différentielles $d\xi_i$ tombent dans l'idéal (dP^y) .

Examinons ensuite les choses dans les coordonnées analytiques y_1, \dots, y_n . *A priori* les champs X_i s'écrivent :

$$X_i = \sum_{k=1}^n X_{ik}(y) \partial/\partial y_k$$

avec les X_{ik} des fonctions analytiques. En écrivant que les dérivées $X_i \cdot P^y$ sont nulles, on trouve :

1° que y_k divise X_{ik} : $X_{ik} = y_k X'_{ik}$;

2° que la somme des quotients X'_{ik} (à i fixé, $1 \leq k \leq n$) est nulle.

Après réarrangement des termes, il vient donc une expression

$$X_i = \sum_{j=1}^{n-1} A_{ij}(y_1, \dots, y_n) E_j^y$$

avec des fonctions A_{ij} des n variables y_k (et non pas seulement de P^y : c'est le problème). Passant au système associé, on obtient sans difficulté :

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n-1} B_{ij}(y_1, \dots, y_n) \varepsilon_j^y + (dP^y) \quad (\|B_{ij}\| = \|A_{ij}\|^{-1}).$$

Énonçons un lemme.

LEMME. — Soit f_1, \dots, f_{n-1} des fonctions analytiques au voisinage de l'origine qui vérifient $E_j^y f_k = E_k^y f_j$ quels que soient $1 \leq j, k \leq n-1$. Il existe alors une fonction g analytique au voisinage de l'origine sur \mathbb{C}^n , et $n-1$ fonctions F_1, \dots, F_{n-1} analytiques au voisinage de l'origine sur \mathbb{C} , telles que

$$f_i = E_i^y \cdot g + F_i(P^y), \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

Nous rejetons la preuve en fin de ce numéro, et nous écrivons l'appartenance $d\xi_i \in (dP^y)$ (en utilisant la décomposition des différentielles indiquée au début du n° 1) :

$$d\xi_i = \sum_{1 \leq j, k \leq n-1} (E_k^y \cdot B_{ij}) \varepsilon_k^y \wedge \varepsilon_j^y + (dP^y) \in (dP^y).$$

Il faut donc, pour chaque i fixé, que $E_k^y \cdot B_{ij} = E_j^y \cdot B_{ik}$. Le lemme fournit $n-1$ fonctions $u_i(y)$ et une matrice $C_{ij}(P^y)$ d'ordre $n-1$ telles que

$$B_{ij} = E_j^y \cdot u_i + C_{ij}(P^y),$$

ce qui amène

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n-1} C_{ij}(P^y) \varepsilon_j^y + du_i + (dP^y).$$

La matrice $C_{ij}(0) = B_{ij}(0)$ est inversible; en jouant sur le fait que les calculs se font modulo (dP^y) , on obtient :

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n-1} C_{ij}(P^y) (\varepsilon_j^y + dv_j) + (dP^y).$$

avec des fonctions analytiques v_j convenables sur C^n .

Effectuons alors le changement de coordonnées analytiques

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1 \exp v_1, \\ z_2 &= y_2 \exp (v_2 - v_1), \\ &\dots\dots\dots, \\ z_{n-1} &= y_{n-1} \exp (v_{n-1} - v_{n-2}), \\ z_n &= y_n \exp (-v_{n-1}). \end{aligned}$$

Si l'on a pris la précaution de prendre les v_i nulles en 0, ce système est tangent à l'ordre 1 aux deux précédents; et surtout,

$$\begin{aligned} P^z &= z_1 z_2 \dots z_n = P^y, \\ \varepsilon_i^z &= \varepsilon_i^y + dv_i, \\ \xi_i &= \sum_{j=1}^{n-1} C_{ij}(P^z) \varepsilon_j^z + (dP^z) \quad (1 \leq i \leq n-1). \end{aligned}$$

Par les calculs précédents, effectués en marche arrière, on en déduit facilement :

$$(4) \quad X_i = \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij}(P^z) E_j^z,$$

où $\| D_{ij} \|$ est la matrice inverse de $\| C_{ij} \|$: les $n-1$ champs X_i sont normalisés.

Preuve du lemme. — Il s'agit en fait d'un calcul de cohomologie, mais nous allons procéder élémentairement. On développe les f_i en série

$$f_i = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_{i, \alpha} y^\alpha,$$

la condition sur les dérivées, donne, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $1 \leq j, k \leq n-1$,

$$(\alpha_j - \alpha_{j+1}) f_{k, \alpha} = (\alpha_k - \alpha_{k+1}) f_{j, \alpha}.$$

Cela dit, on sépare dans chaque série f_i les termes en deux : ceux pour lesquels $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$, qui se regroupent en une fonction $F_i(P^y)$, et les autres α , pour lesquels il y a forcément deux exposants consécutifs différents, disons $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$. On pose alors :

$$g_\alpha = f_{j, \alpha} / (\alpha_j - \alpha_{j+1}),$$

ce nombre étant indépendant du choix de j ; puis $g = \sum g_\alpha y^\alpha$ qui résout le problème.

4. — Pour obtenir la normalisation des champs X_i dans un système de coordonnées isochores, nous allons faire un dernier changement de coordonnées analytiques, de la forme

$$x_1 = z_1 u(P^z), x_2 = z_2 u(P^z), \dots, x_n = z_n u(P^z),$$

avec une fonction d'une variable u égale à 1 à l'origine, et qu'il nous reste à choisir.

La forme volume donnée ω s'écrit, dans les coordonnées (z) ,

$$\omega = a(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \quad \text{avec } a(0) = 1.$$

En utilisant la formule $\theta_{fX} \omega = f \theta_X \omega + (X.f) \omega$ valable pour toute fonction f et tout champ X , et les formules (4), on voit que les $n-1$ champs E_i^z sont isochores pour ω ; et comme ils le sont pour $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, $a(z)$ en est une intégrale première commune, c'est-à-dire une fonction de P^z .

Pour que les coordonnées (x) soient isochores, il faut que $a(P^z)$ soit égal au jacobien du changement de coordonnées, c'est-à-dire au déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} u + P^z \dot{u} & P^z \dot{u} z_1 / z_2 & \dots & P^z \dot{u} z_1 / z_n \\ P^z \dot{u} z_2 / z_1 & u + P^z \dot{u} & \dots & P^z \dot{u} z_2 / z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^z \dot{u} z_n / z_1 & \dots & \dots & u + P^z \dot{u} \end{pmatrix}.$$

Par la matrice diagonale (z_1, \dots, z_n) cette première matrice se conjugue à une seconde, obtenue en remplaçant dans la première tous les quotients z_i/z_j par 1; le déterminant de cette seconde matrice s'obtient par des manœuvres simples de lignes et colonnes, et on aboutit à l'équation :

$$u^{n-1}(u + n P^z \dot{u}) = a(P^z).$$

Comme $u(0) = 1$, on peut poser $U = u^n$ sans inconvénient

$$U(P^z) + P^z \dot{U}(P^z) = a(P^z)$$

et l'unique solution analytique égale à 1 à l'origine s'obtient par une banale identification de série. Avec ce choix pour la fonction u , les coordonnées (x) sont isochores : $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Il reste à s'assurer que la forme normale (4) n'a pas été perdue. D'abord, $P^x = P^z u(P^z)^n$, formule qui peut s'inverser analytiquement en $P^z = v(P^x)$. Ensuite, le groupe à un paramètre, engendré disons par E_1^z , s'écrit dans les coordonnées (z) :

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (e^t z_1, e^{-t} z_2, z_3, \dots, z_n).$$

Transporté dans les coordonnées (x) , ceci donne

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (e^t x_1, e^{-t} x_2, x_3, \dots, x_n),$$

la même expression. Donc $E_1^z = E_1^x$, et pareillement pour les autres E_i . Ainsi les formules (4) deviennent

$$X_i = \sum_{j=1}^{n-1} D_{ij}(v(P^x)) E_j^x,$$

et la conclusion du théorème est atteinte : les coordonnées analytiques (x_i) sont isochores et normalisent les $n-1$ champs X_i .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (M.). — On the solution of analytic equations, *Invent. Math.*, Berlin, t. 5, 1968, p. 277-291.
- [2] BRUHAT (F.). — Travaux de Sternberg, *Séminaire Bourbaki*, 13^e année, 1960-1961, n° 217, 18 p.
- [3] HÖRMANDER (L.). — *An introduction to complex analysis in several variables*. 2nd edition. — Amsterdam, North-Holland and publishing Company, 1973 (*North-Holland mathematical Library*, 7).
- [4] MALGRANGE (B.). — Frobenius avec singularités, 1 : Codimension 1, *Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, n° 46, 1976, p. 163-174.

- [5] RAMIS (J.-P.). — Frobenius avec singularités, *Séminaire Bourbaki*, 30^e année, 1977-1978, n° 523, 10 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1979 (Lecture Notes in Mathematics, 710).
- [6] SIEGEL (C. L.) and MOSER (J.). — *Lectures on celestial mechanics*. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaft*, 187).
- [7] TOUGERON (J.-C.). — *Idéaux de fonctions différentiables*. — Berlin, Springer-Verlag, 1972 (*Ergebnisse der Mathematik*, 71).
- [8] VEY (J.). — Orbites périodiques d'un système dynamique au voisinage d'un point d'équilibre, *Annali Scuola norm. sup. Pisa*, Série 4, t. 5, 1978, p. 757-787.
- [9] VEY (J.). — Sur certains systèmes dynamiques séparables, *Amer. J. Math.*, t. 100, 1978, p. 591-614.
-