

BULLETIN DE LA S. M. F.

GEORGES HANSEL

JEAN-PIERRE TROALLIC

**Suites uniformément distribuées et fonctions
faiblement presque-périodiques**

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 207-212

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__207_0

© Bulletin de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUITES UNIFORMÉMENT DISTRIBUÉES
ET FONCTIONS FAIBLEMENT
PRESQUE-PÉRIODIQUES**

PAR

G. HANSEL et J.-P. TROALLIC (*)

RÉSUMÉ. — Dans un groupe topologique localement compact séparable, il existe des suites uniformément distribuées relativement aux fonctions faiblement presque-périodiques. Ce résultat est obtenu par des méthodes géométriques qui ont d'autres applications.

ABSTRACT. — In a separable topological locally compact group, there exist uniformly distributed sequences relatively to the weakly almost-periodic functions. This result is obtained by geometric methods which have other applications.

1. Introduction

Soient G un groupe topologique localement compact séparable, $W(G)$ l'espace des fonctions faiblement presque-périodiques sur G . Veech [13] a soulevé la question de l'existence de suites uniformément distribuées relativement à $W(G)$. Dans le présent travail, nous démontrons l'existence de telles suites en utilisant des techniques de géométrie dans les espaces localement convexes. Rappelons que Veech [12] a établi, par d'autres méthodes, l'existence de suites uniformément distribuées relativement à l'espace des fonctions presque-périodiques (cf. également [1], [2], [5], [10], [11]).

L'un des outils de notre démonstration (théorème 1) constitue une généralisation d'un résultat antérieur de Niederreiter [9].

(*) Texte reçu le 16 mars 1979.

Georges HANSEL et Jean-Pierre TROALLIC, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences et des Techniques, Université de Rouen, 76130 Mont-Saint-Aignan.

2. Combinaisons convexes et suites uniformément distribuées

NOTATIONS. — (a) Soient E un ensemble et \mathcal{S} l'ensemble des suites finies de points de E . Soient $s \in \mathcal{S}$ et $k \in \mathbb{N}$; on note s^k la suite (finie) obtenue par concaténation de k suites égales à s . Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de \mathcal{S} ; on note $\prod_{n \in \mathbb{N}} s_n$ la suite (infinie) obtenue par concaténation des suites s_n .

(b) Soient E et F des espaces vectoriels topologiques séparés. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F ; on pose $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.

Soit A une partie de E ; $\text{co}(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A , $\overline{\text{co}}_s(A)$ l'ensemble des limites de suites de points de $\text{co}(A)$ et $\overline{\text{co}}(A)$ l'adhérence de $\text{co}(A)$. On note \hat{A} l'ensemble des limites de Césaro de suites de points de A . On a évidemment les inclusions $\hat{A} \subset \overline{\text{co}}_s(A)$ et $\overline{\text{co}}_s(A) \subset \overline{\text{co}}(A)$. Il est également facile de voir que $\text{co}(A) \subset \hat{A}$.

THÉORÈME 1. — Soit E un espace vectoriel réel muni d'une topologie localement convexe séparée T moins fine qu'une topologie localement convexe métrisable. Soit A une partie de E . On a $\hat{A} = \overline{\text{co}}_s(A)$.

Démonstration. — Soit $x \in \overline{\text{co}}_s(A)$; montrons que $x \in \hat{A}$. Soit $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de semi-normes sur E définissant une topologie plus fine que T . Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{co}(A)$ qui converge vers x pour T .

(a) Supposons que chaque c_n soit une combinaison convexe de points de A tous affectés d'une même masse

$$c_n = \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n (a_i^n \in A, n \in \mathbb{N}, i \in \{1, \dots, m_n\}).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $M_n = \sup_{i \in \{1, \dots, m_n\}} \|a_i^n\|_n$. Soit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n k_n \geq nm_{n+1} M_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $s_n = (a_1^n, \dots, a_{m_n}^n)$. On pose

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} s_n^{k_n}.$$

Montrons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Césaro vers x pour T . Soit $n \in \mathbb{N}$; il existe des entiers j_n, p_n et t_n uniquement déterminés tels que

$$n = \sum_{i=1}^{j_n} m_i k_i + m_{j_n+1} p_n + t_n, \\ 0 \leq p_n < k_{j_n+1} \quad \text{et} \quad 0 \leq t_n < m_{j_n+1}.$$

Par construction de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = u_n + v_n$$

avec

$$u_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{j_n} m_i k_i c_i + (m_{j_n+1} p_n + t_n) c_{j_n+1} \right)$$

et

$$v_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{i_n} a_i^{j_n+1} - t_n c_{j_n+1} \right).$$

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour T ; la topologie T étant localement convexe, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers x pour T . Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $n \geq p$; on a

$$\|v_n\|_p \leq \frac{2}{n} m_{j_n+1} M_{j_n+1} \leq \frac{2 m_{j_n} k_{j_n}}{n j_n} \leq \frac{2}{j_n}.$$

Par conséquent la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc pour tout T . On en déduit que $(1/n \sum_{i=1}^n x_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour T .

(b) Cas général.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit d_n une combinaison convexe de points de A tous affectés de la même masse telle que $\|d_n - c_n\|_n < 1/n$. La suite $(d_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour $(\|\cdot\|_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donc pour T ; par conséquent la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x pour T . Le raisonnement du (a) appliqué à la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de conclure.

COROLLAIRE 1. — Soit A une partie d'un espace localement convexe métrisable. On a $\hat{A} = \overline{\text{co}}(A)$.

COROLLAIRE 2. — Soient X et Y deux espaces normés, T la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(X, Y)$ et A une partie de $\mathcal{L}(X, Y)$. Pour la topologie T , on a $\hat{A} = \overline{\text{co}}_s(A)$.

Démonstration. — La topologie de la convergence simple sur $\mathcal{L}(X, Y)$ est localement convexe séparée et moins fine que la topologie de la norme usuelle (norme de la convergence uniforme sur la boule unité fermée).

NOTATION. — Soit X un espace compact. $\mathcal{C}(X)$ est l'espace de Banach, pour la norme uniforme, des applications continues de X dans \mathbb{R} et $\mathcal{C}(X)^*$ le dual topologique de $\mathcal{C}(X)$.

DÉFINITION [6]. — Soient X un espace compact et μ une probabilité régulière sur la tribu borélienne de X . Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X est μ -uniformément distribuée si pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_X f d\mu.$$

COROLLAIRE 3 (Niederreiter [9]). — Soit μ une probabilité régulière sur un espace compact X . Il existe une suite de points de X μ -uniformément distribuée si et seulement si μ est limite faible d'une suite de combinaisons convexes de mesures de Dirac sur X .

Démonstration. — Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de X est μ -uniformément distribuée si et seulement si la suite des mesures de Dirac $(\delta_{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement en moyenne de Césaro vers μ dans $\mathcal{C}(X)^*$. Le corollaire 2 permet de conclure.

COROLLAIRE 4. — Soit X un espace métrique compact, μ une probabilité sur la tribu borélienne de X . Il existe dans X des suites μ -uniformément distribuées.

Démonstration. — Soit \mathcal{M} l'ensemble des probabilités sur la tribu borélienne de X . \mathcal{M} est une partie convexe compacte métrisable de $\mathcal{C}(X)^*$ muni de la topologie faible. Soit A l'ensemble des mesures de Dirac sur X . On a $\overline{\text{co}}_s(A) = \overline{\text{co}}(A) = \mathcal{M}$. Le corollaire 3 permet de conclure.

3. Suites uniformément distribuées dans les groupes topologiques localement compacts

NOTATIONS, DÉFINITIONS, RAPPELS. — Soit G un groupe topologique localement compact. On note $\mathcal{C}(G)$ l'espace de Banach, pour la norme uniforme, des applications continues et bornées de G dans \mathbb{R} . Soient $f \in \mathcal{C}(G)$ et $g \in G$; on note f_g l'élément de $\mathcal{C}(G)$ défini par $f_g(x) = f(gx)$. Un élément f de $\mathcal{C}(G)$ est faiblement presque-périodique si $\{f_g \mid g \in G\}$ est faiblement relativement compact dans $\mathcal{C}(G)$ [4]. L'ensemble $W(G)$ des éléments faiblement presque-périodiques est une sous-algèbre de Banach unitaire de $\mathcal{C}(G)$. Pour tout $g \in G$, on définit la translation $T_g : W(G) \rightarrow W(G)$ par $T_g(f) = f_g$. $\{T_g \mid g \in G\}$ est un groupe d'isométries linéaires de $W(G)$ sur lui-même. Soit $f \in W(G)$; on pose $K_f = \overline{\text{co}} \{f_g \mid g \in G\}$. K_f est une partie convexe faiblement compacte de l'espace de Banach $W(G)$.

Il existe sur $W(G)$ une moyenne unique m invariante par translations. (Rappelons qu'une moyenne sur $W(G)$ est une forme linéaire m vérifiant

$m(1) = 1$ et $m(f) \geq 0$ pour $f \geq 0$.) Soit \tilde{m} l'élément de $\mathcal{L}(W(G))$ qui à tout f associe la fonction constante $g \rightarrow m(f)$; pour tout $f \in W(G)$, $\tilde{m}(f)$ est l'unique fonction constante appartenant à K_f .

Rappelons enfin le théorème ergodique en moyenne :

THÉORÈME DE VON NEUMANN [3]. — Soient E un espace de Banach et T un élément de $\mathcal{L}(E)$ de norme inférieure ou égale à 1. Soit $x \in E$. Si $\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est faiblement relativement compact dans E , la suite $(1/n \sum_{k=1}^n T^k(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers un point fixe pour T .

DÉFINITION. — Soit G un groupe topologique localement compact. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de G est uniformément distribuée relativement à $W(G)$ si pour tout $f \in W(G)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = m(f).$$

THÉORÈME 2. — Soit G un groupe topologique localement compact séparable. Il existe dans G des suites uniformément distribuées relativement à $W(G)$.

Démonstration. — Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de G dense dans G et soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n = 1$. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n T_{g_n}$ converge vers un point T de norme inférieure ou égale à 1 dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(W(G))$. Pour tout $f \in W(G)$, il résulte du théorème de von Neumann que la suite $(1/n \sum_{k=1}^n T^k(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point \tilde{f} de $W(G)$, fixe pour T .

(a) Montrons que $\tilde{f} = \tilde{m}(f)$.

La fonction \tilde{f} étant dans K_f , il suffit de montrer qu'elle est constante. Supposons qu'elle ne le soit pas. La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans G donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $T_{g_p}(\tilde{f}) \neq \tilde{f}$ (ce qui implique $1 - \alpha_p > 0$).

La série $\sum_{n \in \mathbb{N}, n \neq p} (\alpha_n / (1 - \alpha_p)) T_{g_n}(\tilde{f})$ converge dans $W(G)$ vers un point h distinct de \tilde{f} . Soit $\varepsilon = \inf(\|T_{g_p}(\tilde{f}) - \tilde{f}\|, \|h - \tilde{f}\|)$. $K_{\tilde{f}}$ étant une partie dentable de $W(G)$ ([7], [8]), il existe une partie convexe fermée C de $W(G)$ strictement contenue dans $K_{\tilde{f}}$ telle que $\text{diam}(K_{\tilde{f}} - C) < \varepsilon$.

Soit $g \in G$ tel que $T_g(\tilde{f}) \in K_{\tilde{f}} - C$. On a

$$\inf(\|T_{g,p}(\tilde{f}) - T_g(\tilde{f})\|, \|T_g(h) - T_g(\tilde{f})\|) = \varepsilon,$$

par conséquent $T_{g,p}(\tilde{f})$ et $T_g(h)$ sont dans le convexe C , ce qui est absurde puisque

$$T_g(\tilde{f}) = \alpha_p T_{g,p}(\tilde{f}) + (1 - \alpha_p) T_g(h) \quad \text{et} \quad T_g(\tilde{f}) \notin C.$$

(b) D'après le premier point, la suite $(1/n \sum_{k=1}^n T^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers \tilde{m} dans $\mathcal{L}(W(G))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $c_n \in \text{co} \{T_g \mid g \in G\}$ tel que $\|c_n - (1/n) \sum_{k=1}^n T^k\| < 1/n$ ($\|\cdot\|$ étant la norme usuelle sur $\mathcal{L}(W(G))$). La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\text{co} \{T_g \mid g \in G\}$ converge simplement vers \tilde{m} dans $\mathcal{L}(W(G))$. Il existe donc, d'après le théorème 1, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de G telle que $(1/n \sum_{k=1}^n T_{x_k})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers \tilde{m} . Pour cette suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a pour tout $f \in W(G)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = m(f).$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZINGER (L.). — Uniformly distributed sequences in locally compact groups I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 188, 1974, p. 149-165.
- [2] BERG (I. D.), RAJAGOPALAN (M.) and RUBEL (L. A.). — Uniform Distribution in locally compact abelian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 133, 1968, p. 435-446.
- [3] EBERLEIN (W. F.). — Abstract Ergodic Theorems and weakly almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 67, 1949, p. 217-240.
- [4] GREENLEAF (F. P.). — *Invariant Means on Topological Groups and Their Applications*, New York, van Nostrand, Reinhold Company, 1969, (van Nostrand Mathematical Studies, 16).
- [5] HARTMAN (S.). — Remarks on equidistribution on non-compact groups, *Compositio Math.*, t. 16, 1964, p. 66-71.
- [6] KUIPERS (L.) and NIEDERREITER (H.). — *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York, 1974.
- [7] MAYNARD (H. B.). — A geometrical characterization of Banach spaces with the Radon-Nikodym property, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 185, 1973, p. 493-500.
- [8] NAMIOKA (I.) et ASPLUND (E.). — A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 73, 1967, p. 443-445.
- [9] NIEDERREITER (H.). — On the existence of uniformly distributed sequences in compact spaces, *Compositio Math.*, t. 25, 1972, p. 93-99.
- [10] RINDLER (H.). — Uniform distribution on locally compact groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. 57, 1976, p. 130-132.
- [11] RUBEL (L. A.). — Uniform distribution in locally compact groups, *Comment. Math. Helv.*, t. 39, 1965, p. 253-258.
- [12] VEECH (W. A.). — Some questions of uniform distribution, *Ann. of Math.*, 94 (2), 1971, p. 125-138.
- [13] VEECH (W. A.). — Topological dynamics, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1977.